МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ

БУКОВИНСЬКА ДЕРЖАВНА ФІНАНСОВА АКАДЕМІЯ

Кафедра ВМКТІС

**ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНЕ ЗАВДАННЯ**

**З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»**

**на тему: «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»**

Виконав:

Студент І курсу

Групи ФК-15

фінансово-економічного

факультету

Воронюк В.М.

Науковий керівник:

Головач В.М.

Чернівці-2008

**ЗМІСТ**

Інтеграли, що «не беруться»

Наближені методи обчислення визначених інтегралів

Невласні інтеграли. Ознаки збіжності невласних інтегралів

Ефективність реклами логістична крива

Список використаної літератури

**1.Інтеграли, що «не беруться»**

Як видно було з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Подібне спостерігається й для інших взаємно обернених операцій: сума довільних натуральних чисел є завжди число Натуральне, а різниця — ні; добуток двох цілих чисел завжди є цілим числом, а частка — ні i т. п. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скiнченному вигляді або не 6еруться.

Наприклад, доведено, що «не беруться» такі інтеграли:

інтеграл Пуассона;



інтеграли Френгеля;



інтегральний логарифм;



інтегральний косинус;



інтегральний синус;



еліптичний інтеграл;



(α=0,1,2…) та ряд інших інтегралів.



Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скiнченне число арифметичних операцій i суперпозицій над основними елементарними функціями. Неелементарні (або так звані спецiальнi) функції розширюють множину елементарних функцій.

Зрозуміло, що інтеграл, який не обчислювався в класі елементарних функцій, може виявитись таким, що обчислюється в розширеному класі функцій.

Таким чином, інтегрування в порiвняннi з диференціюванням — операція набагато складніша. Тому треба твердо володіти основними методами інтегрування i чітко знати види функцій, інтеграли від яких цими методами знаходяться. Крім того, виявляється, що треба розрізняти також інтеграли, які «не беруться». Тому в iнженернiй практиці широко користуються довідниками, в яких мстяться докладні таблиці iнтегралiв, що виражаються через елементарні i неелементарні функції.

**2.Наближені методи обчислення визначених інтегралів**

Нехай треба обчислити визначений інтеграл , де f(х) — неперервна на вiдрiзку [*a*; b] функція. Якщо можна знайти первісну F (х) від функції f (х), то цей інтеграл обчислюється за формулою Ньютона — Лейбнiца: I = F (*b*) - F (*a*). Якщо ж первісна не є елементарною функцією, або функція f (х) задана графіком чи таблицею, то формулою Ньютона — Лейбнiца скористатись вже не можна. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено. Наближено обчислюють визначений інтеграл i тоді, коли первісна функція F (х) хоч i є елементарною, але точні її значення F (*а*) і F (*b*) дістати не просто.



Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого ґрунтуються на геометричному змiстi визначеного інтеграла: якщо f(х)0, то інтеграл *I* дорівнює площі криволiнiйної трапеції, обмеженої кривою *y* = f (х) i прямими х = *a*, х = *b*, у = 0.



Ідея наближеного обчислення інтеграла полягає в тому, що задана крива *y* = f(х) замінюється новою лiнiєю, «близькою» до заданої. Тоді шукана площа наближено дорівнює площі фігури, обмеженої зверху цією лiнiєю.

1. *Формули прямокутників*. Нехай треба обчислити визначений інтеграл від неперервної на вiдрiзку [*а*; *b*] функції f(х).



Поділимо вiдрiзок [*а*; *b*] на *n* рівних частин точками

= *a +*

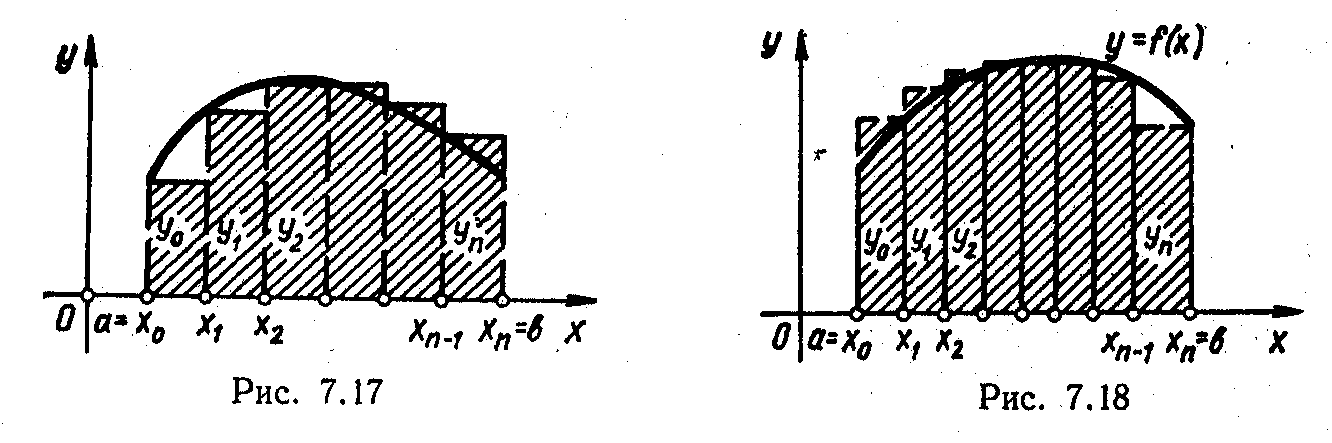


рис. 2.1 рис. 2.2

і знайдемо значення функції f (х) в цих точках:

*f (.*



Замінимо задану криволiнiйну трапецію (рис. 2.1) ступінчатою фігурою, що складається з *n* прямокутників. Основи цих прямокутників однакові i дорівнюють , а висоти збігаються із значеннями в початкових точках частинних iнтервалiв. Площа ступінчатої фігури i буде наближеним значенням визначеного інтеграла:



(1)



Якщо висоти прямокутників є значення в кінцевих точках частинних iнтервалiв (рис. 2.2), то



(2)



Можна довести, що похибка наближеної формули зменшиться, якщо висотами прямокутників взяти значення функції в точках (середини відрізків , (рис. 2.3); тоді



(3)



Формули (1)-(3) називаються формулами прямокутників.

2. *Формула трапецій*. Замінимо криву f(х) не ступінчатою лiнiєю, як у попередньому випадку, а ламаною (рис. 2.3), сполучивши сусiднi точки (). Тоді площа криволiнiйної трапеції наближено дорівнюватиме сумі площ прямокутних трапецій, обмежених вверху вiдрiзками цієї ламаної.

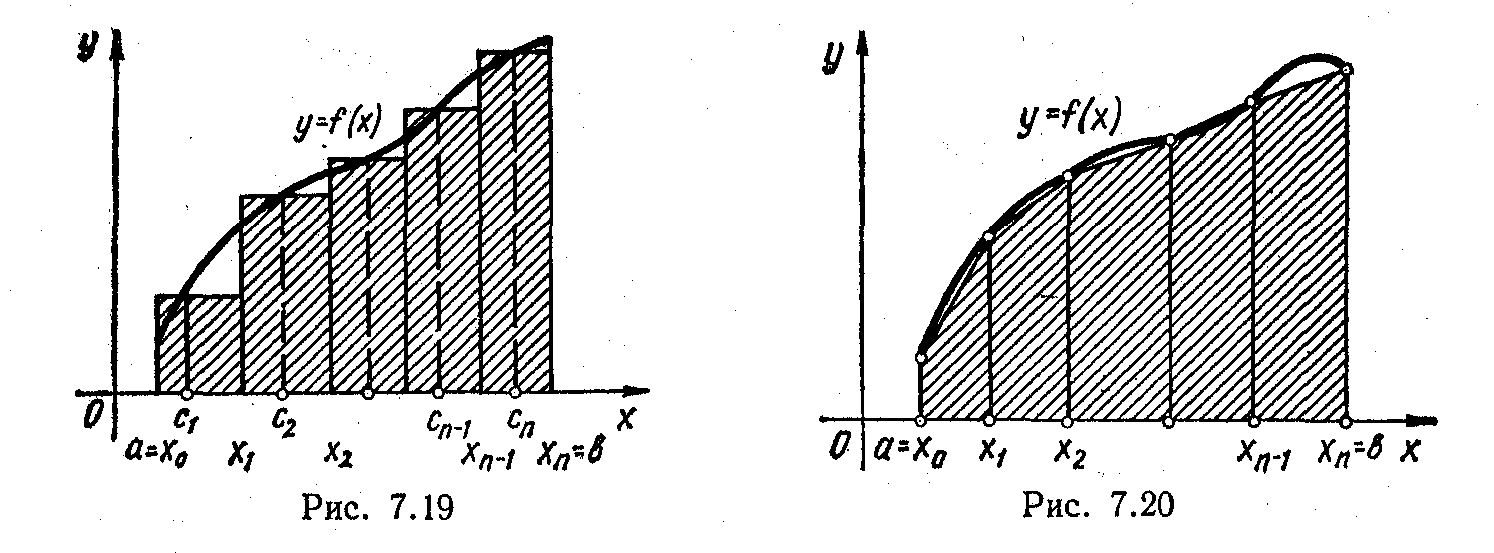


рис. 2.3 рис. 2.4

Площа *k-ї* трапеції дорівнює , де і —



основи трапеції, а - = - її висота. Тому



(4)



Формула (4) називається формулою трапецій.

3. *Формула Сiмпсона*. Під час виведення формули трапеції криву, яка є графіком функцій у = *f*(х), замінювали ламаною лiнiєю. Щоб дістати точніший результат, замінимо цю криву іншою кривою, наприклад параболою.

Покажемо спочатку, що через три рiзнi точки , які не лежать на одній прямій, можна провести лише одну параболу .



Справді, підставляючи в рівняння параболи координати заданих точок, дістанемо систему рівнянь:

(5)



визначник якої

,



оскільки числа за умовою рiзнi. Отже, ця система має єдиний розв’язок, тобто коефiцiєнти *a*, *b* i *c* параболи визначаються однозначно.



Зокрема, розв’язуючи систему (5) для точок А (-*h*; ), В (0; ), С (*h;* ), дістанемо

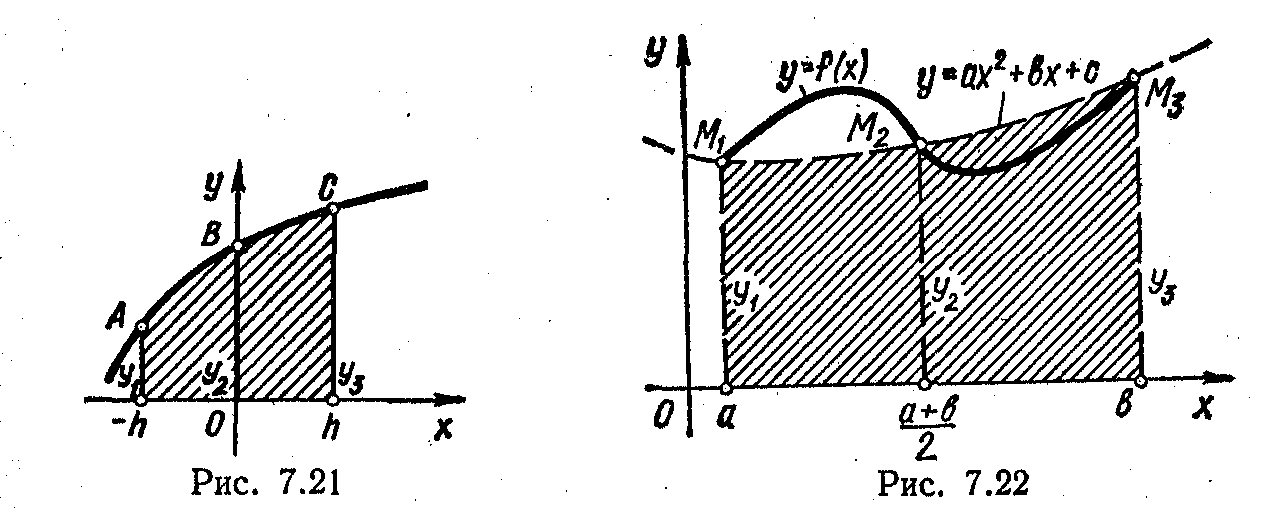


рис. 2.5 рис. 2.6

Знайдемо площу S криволiнiйної трапеції, обмеженої параболою, яка проходить через точки А, В, С, і прямими х = -h, х = h, y =0 (рис. 2.5):



Розглянемо тепер криволiнiйну трапецію , обмежену кривою у = *f*(х) (рис. 2.6). Якщо через точки цієї кривої провести параболу , то за формулою (6)



(7)



Однак, якщо вiдрiзок [a;b] досить значний, то формула (7) матиме велику похибку. Щоб збільшити точність, розіб’ємо вiдрiзок [a;b] на парне число 2n однакових частин, а криволiнiйну трапецію — на n частинних криволiнiйних трапецій. Застосовуючи до кожної з цих трапецій формулу (7), дістанемо



Додамо почленно ці наближені рiвностi:



Ця формула називається формулою парабол або формулою Сiмпсона. Формули (1), (2), (3), (4) i (8) називаються квадратурними.

Різницю між лівою i правою частиною квадратурної формули називають її залишковим членом i позначають через . Абсолютна похибка квадратурної формули, очевидно, залежить від числа *n* — кiлькостi частинних вiдрiзкiв, на які розбивається вiдрiзок інтегрування [а;b]. Наведемо формули, які дозволяють, по-перше, оцінювати абсолютні похибки квадратурних формул, якщо задано n, і, по-друге, визначати число n так, щоб обчислити заданий інтеграл з наперед заданою точністю.



Якщо функція f (х) має на вiдрiзку [а; b] неперервну похідну i , то абсолютна похибка наближених рівностей (1) — (4) оцінюється формулою



(9)



Для функцій f(x), які мають другу неперервну похідну і , виконується нерівність



(10)



яка справедлива для формул прямокутників і трапецій.

Абсолютна похибка в наближеній рівності (8) оцінюється формулою

(11)



Якщо функція f(x) має на відрізку [a;b] четверту неперервну похідну і то для формули Сiмпсона справедлива оцінка:



(12)



*Приклад:*

1. Обчислити інтеграл .



Це інтеграл від біноміального диференціала, який в елементарних функціях не обчислюється. Обчислимо його наближено. Розіб’ємо відрізок [0;1] на 10 рівних частин точками .



Знайдемо значення функції в цих точках:



За формулою прямокутників маємо



Оскільки то залишковий член формули прямокутників



Отже, *І=*1,069900,03536.



За формулою трапецій (4) дістанемо



Оскільки , то залишковий член формули трапецій



Отже, *І=*1,090610,00236.



За формулою Сiмпсона (2n=10)



Оскільки то залишковий член формули Сiмпсона



Таким чином, *І=*1,089490,000012, тобто формула Сiмпсона значно точніша формули прямокутників і трапецій.



**Невласні інтеграли. Ознаки збіжності невласних інтегралів**

Раніше було введено визначений інтеграл як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що вiдрiзок інтегрування скiнченний, а пiдiнтегральна функція на цьому вiдрiзку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на *п* частинних вiдрiзкiв скiнченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скiнченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла — інтеграла від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Нехай функція *f(х)* визначена на проміжку [*a*;) і інтегрована на будь-якому відрізку [*a* ; *b*], де . Тоді, якщо існує скінченна границя



(13),



її називають невласним інтегралом першого роду і позначають так:

(14)



Таким чином, за означенням

(15)



У цьому випадку інтеграл (14) називають збіжним, а підінтегральну функцію *f(x)* – інтегрованою на проміжку *(а;+)*.



Якщо ж границя (13) не існує або нескінченна, то інтеграл (14) називають також невласним але розбіжним, а функція *f(x)* – неінтегровною на [*a*;).



Аналогічно інтегралу (15) означається невласний інтеграл на проміжку [; *b*):



(16)



Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

(17)



де *с* – довільне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (17) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (17), не залежить від вибору числа с.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею означеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція *f*(*x*) неперервна і невід’ємна на проміжку [*a*;) і коли інтеграл (16) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області (рис. 3.1)

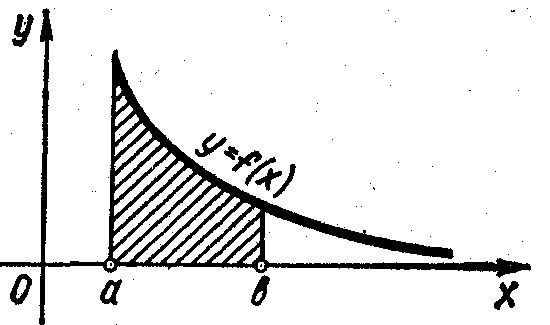


рис. 3.1

Приклад:

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність



а) За формулою (15) маємо



Отже інтеграл а) збігається.

б)



Оскільки ця границя не існує, то інтеграл б) розбіжний.

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла ґрунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхiдностi обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні.

Теорема 1. *Якщо на проміжку функції f(x) і g(x)неперервні і задовольняють умову , то із збіжності інтеграла*



(18)



*випливає збіжність інтеграла*

*,* (19)



*а із розбіжності інтеграла (19) випливає розбіжність інтеграла (18).*

Наведена теорема має простий геометричний зміст (рис. 3.2); якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скiнченне число, то площа меншої області є також скiнченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

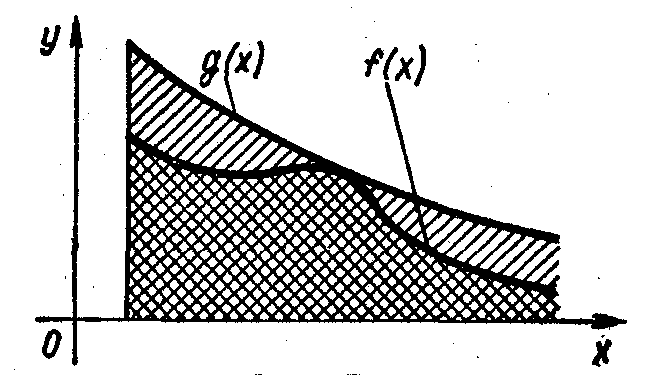


рис. 3.2

Приклад:

Дослідити на збіжність інтеграл



оскільки :



і інтеграл збігається, то за теоремою 1 заданий інтеграл також збігається.



Теорема 2. *Якщо існує границя то інтеграли (18) і (19) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.*



Ця ознака iнодi виявляється зручнішою, ніж теорема 1, бо не потребує перевірки нерiвностi *.*



Приклад:

Дослідити на збіжність інтеграл



оскільки інтеграл

збігається і ,



то заданий інтеграл також збігається.

В теоремах 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід’ємних функцій. У випадку, коли пiдiнтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Якщо інтеграл збігається, то збігається й інтеграл .*



Приклад:

Дослідити на збіжність інтеграл :



тут підінтегральна функція знакозмінна; оскільки

,



то заданий інтеграл збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла не випливає, взагалі кажучи збіжність інтеграла . Ця обставина виправдовує такі означення.



Якщо разом з інтегралом збігається й інтеграл , то інтеграл називають абсолютно збіжним, а функцію - абсолютно інтегровною на проміжку .



Якщо інтеграл збігається, а інтеграл розбігається, то інтеграл називають умовно (або неабсолютно) збіжним.



Тепер теорему 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збiжнiсть інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збiжностi.

2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

Нехай функція визначена на проміжку . Точку *х=b* назвемо особливою точкою функції , якщо при (рис. 3.3)

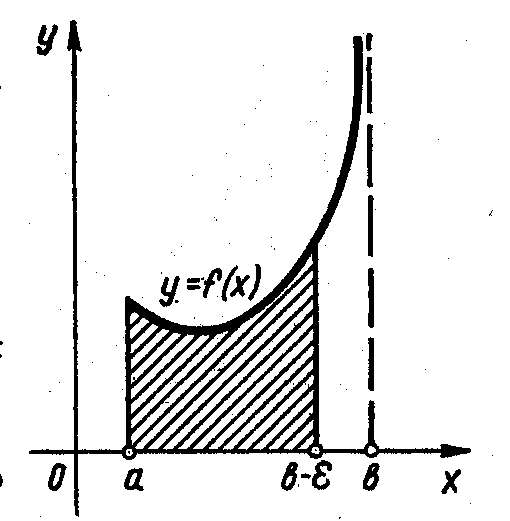


рис. 3.3

Нехай функція на відрізку при довільному , такому, що тоді існує скінченна границя



, (20)



її називають невласним інтегралом другого роду і позначають так:

(21)



Отже, за означенням

= (22)



У цьому випадку кажуть, що інтеграл (21) існує або збігається. Якщо ж границя (20) нескінченна або не існує, то інтеграл (21) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо *х=а* - особлива точка (рис. 3.4), невласний інтеграл визначається так:

=

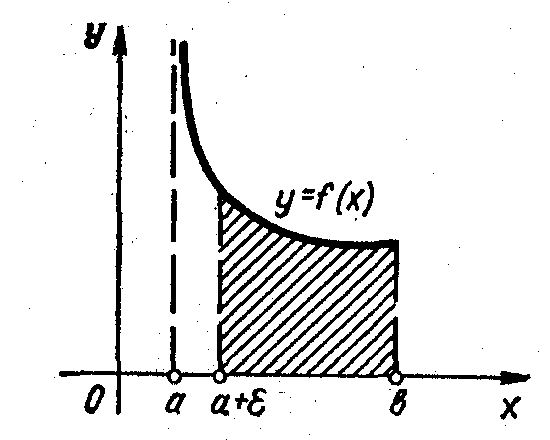


рис. 3.4

Якщо необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки , то за умови існування обох невласних інтегралів і за означенням покладають (рис. 3.5)



=+.

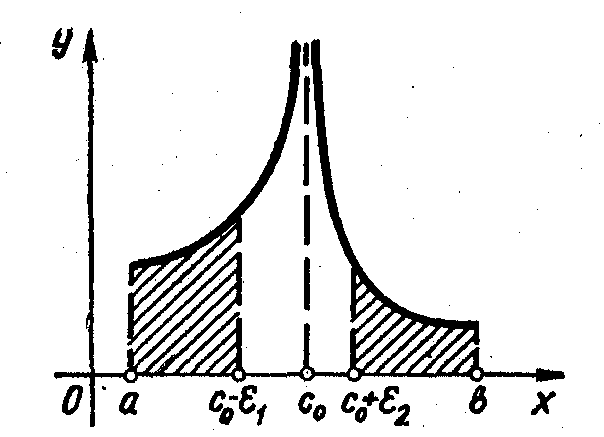


рис. 3.5

Нарешті, якщо *а* та *b* — особливі точки, то за умови існування обох невласних iнтегралiв і за означенням покладають



=+,



де *с -* довільна точка інтервалу (*a;b*).

Приклад:

Обчислити невласний інтеграл:

= .



Отже інтеграл збіжний.

Сформулюємо тепер ознаки збiжностi для невласних iнтегралiв другого роду.

Теорема 4. *Якщо функції*  і *неперервні на проміжку [a;b), мають особливу точку х= b і задовольняють умову , то із збіжності інтеграла випливає збіжність інтеграла* , *із розбіжності інтеграла*  *випливає розбіжність .*



Приклад:

Дослідити на збіжність інтеграл : заданий інтеграл збігається, бо і збігається інтеграл .



Теорема 5. *Нехай функції*  *і* *на проміжку [a;b) неперервні, додатні і мають особливість точці х= b , тоді якщо існує границя*



***,***



*то інтеграли*  *і або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*



Приклад:

Дослідити на збіжність інтеграл : функції *f(x)=* *та* = мають особливість у точці *х=0.* Оскільки =, і інтеграл розбігається, то заданий інтеграл також розбігається.



Теорема 6. *Якщо х=b – особлива точка функції*  і інтеграл  *збігається, то інтеграл також збігається.*



Приклад: дослідити на збіжність інтеграл .



Заданий інтеграл збігається, тому що і збігається інтеграл .



**4.Ефективність реклами**. **Логістична крива.**

Розвиток багатьох процесів у економіці, в тому числі і на підприємствах, відображає логістична крива, яка характеризується часовою чи іншою залежністю параметрів об’єкта. Дану криву ще називають зигзагоподібною (S-подібною), оскільки вона нагадує букву S.