Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
Вятский государственный гуманитарный университет

Математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

Выпускная квалификационная работа

Инверсия плоскости

в комплексно сопряженных координатах

Выполнила: студентка V курса

математического факультета

***Дмитриенко Надежда Александровна***

Научный руководитель:

старший преподаватель кафедры

алгебры и геометрии

***Александр Николаевич Суворов***

Рецензент:

Допущена к защите в государственной аттестационной комиссии

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2005 г. Зав. кафедрой В.М. Вечтомов

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2005 г. Декан факультета В.И. Варанкина

Киров

2005

Содержание

Введение 3

Глава 1. Основные положения теории инверсии 4

1.1. Общие сведения о комплексной плоскости 4

1.2. Определение инверсии – симметрии относительно окружности 5

1.3. Формула инверсии в комплексно сопряженных координатах 11

1.4. Неподвижные точки и окружность инверсии 11

1.5. Образы прямых и окружностей при обобщенной инверсии 12

1.6. Свойства обобщенной инверсии 19

Глава 2. Применение инверсии при решении задач

и доказательстве теорем 30

2.1. Применение инверсии при решении задач на построение 30

2.2. Применение инверсии при доказательстве 41

Заключение 43

Библиографический список 44

Введение

В наш век современных технологий так и хочется привлечь компьютер для решения задач, в частности, геометрических. Было бы замечательно, если бы от пользователя требовалось только занести в программу нужные данные, а последняя сама бы все рассчитала и выдала, к примеру, радиус и центр искомой окружности. Но вся проблема в том, что программа может работать только с координатами. И есть смысл перевода наиболее эффективных с точки зрения решения задач преобразований, в число которых входит и инверсия, на язык координат. Наиболее просто это получается на комплексной плоскости. Изучению преобразования инверсии комплексной плоскости и посвящена эта дипломная работа.

Цель работы состоит в следующем: обобщить и систематизировать основные факты об инверсии комплексной плоскости и показать применение этого преобразования при решении задач и доказательстве теорем.

Поставленная цель предполагала решение следующих задач:

* вывод комплексной формулы инверсии;
* доказательство основных свойств инверсии на комплексной плоскости;
* решение нескольких задач при помощи инверсии комплексной плоскости;
* доказательство ряда теорем при помощи инверсии комплексной плоскости.

Оказалось, что не так много специальных работ по теме. Инверсия комплексной плоскости оказалась крайне слабо освещена в литературе по сравнению с инверсией евклидовой плоскости. Поступали следующим образом: брали известный факт из евклидовой плоскости, а потом доказывали его методом комплексно сопряженных координат. Чаще всего такие доказательства были понятнее и короче, чем исходные.

Глава 1

Основные положения теории инверсии

*1.1. Общие сведения о комплексной плоскости*. Зададим на плоскости прямоугольную декартову систему координат 0*xy*. Тогда каждому комплексному числу *z*, представленному в алгебраической форме , можно однозначно поставить в соответствие точку *М* плоскости с координатами . Комплексное число *z* называют комплексной координатой соответствующей точки *М* и пишут: .



Следовательно, множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел. Эту плоскость называют плоскостью комплексных чисел.

Все необходимые сведения об этой плоскости очень хорошо даны в книге Я. П. Понарина [3]. Здесь приведем лишь некоторые формулы, взятые из того же источника, использованные в работе.

Расстояние между двумя точками с координатами *а* и *b* равно .



Уравнение прямой в канонической форме: , .



Уравнение окружности с центром в точке *s* и радиусом *r*: . Также часто используют запись , , , где центр , радиус .



Скалярное произведение векторов: .



Коллинеарность трех точек с координатами *а*, *b* и *с*: .



Критерий коллинеарности векторов: .



Расстояние от точки с координатой *z*0 до прямой , : .



Критерий параллельности двух прямых и , заданных в канонической форме: .



Критерий перпендикулярности двух прямых и , заданных в канонической форме: .



Двойное отношение четырех точек плоскости с координатами *а*, *b*, *с* и *d*: ; аргумент *w* равен ориентированному углу между окружностями *abc* и *abd*.



Критерий принадлежности четырех точек одной окружности или прямой: .



Критерий ортогональности окружностей , и , : .



Параллельный перенос на вектор с координатой *ρ*: .



Гомотетия с центром *s* и коэффициентом *σ*: , .



Осевая симметрия с осью симметрии , где : .



Центральная симметрия с центром : .



***1.2. Определение инверсии – симметрии относительно окружности****.*[[1]](#footnote-1)

*Определение 1*. Углом между двумя окружностями называется угол между касательными к окружностям в точке их пересечения.

Если окружности не имеют общих точек, то угол между ними не определен.

*Определение 2.* Углом между окружностью *S* и прямой *l* называется угол между прямой *l* и касательной к окружности *S* в точке пересечения этой окружности с *l*.

Опять же, если прямая и окружность не имеют общих точек, то угол между ними не определен.

Из определения 2 следует, что окружности, центры которых лежат на данной прямой *l*, и только эти окружности, перпендикулярны к прямой *l*.

**Теорема 1**. Все окружности, перпендикулярные прямой *l* и проходящие через точку *А*, проходят и через точку *В*, симметричную точке *А* относительно прямой *l*.

□ Рассмотрим произвольную окружность с центром на прямой *l*, проходящую через точку *А*. Введем систему координат таким образом, что прямая *l* является действительной осью, а начало координат располагается в центре нашей окружности, и радиус ее равен 1.

*l*

*А*

*В*

1

0

Действительная ось имеет уравнение , и формула осевой симметрии относительно *l* будет . Окружность имеет уравнение .



Если точка *А* имеет координату *а*, то симметричная ей точка *В* будет иметь координату . Докажем, что она тоже лежит на окружности.



Действительно, поскольку *А* ей принадлежит, то , что и означает принадлежность точки *В*() этой окружности. ■



Если *А* не лежит на действительной оси, то больше общих точек у пучка окружностей, проходящих через *А* и перпендикулярных *l*, нет. Если бы была еще общая точка *С*, то рассматриваемые окружности проходили бы через точки *А*, *В* и *С*, то есть все совпадали бы.

Если *А* лежит на действительной оси, то у окружностей также больше нет общих точек, поскольку центр их лежит на этой оси, и если есть еще одна общая точка *В* (не лежащая не действительной оси, иначе окружности банально совпадут), то есть еще одна общая точка – симметричная ей, и у окружностей есть три общие точки, то есть они все совпадут, что невозможно.

Значит, если окружности перпендикулярны прямой *l* и проходят через точку *А*, и точка *В* симметрична точке *А* относительно прямой *l* (точки *А* и *В* могут совпадать), то это единственные общие точки этих окружностей.

Поэтому можно дать такое определение симметрии относительно прямой.

*Определение**3*. Точки *А* и *В* называются симметричными относительно прямой *l*, если все окружности, перпендикулярные прямой *l* и проходящие через точку *А*, проходят и через точку *В*.

Введем теперь понятие симметрии относительно окружности. Докажем сначала следующую теорему.

**Теорема 2**. Все окружности, перпендикулярные данной окружности *Σ* и проходящие через данную точку *А*, не лежащую на *Σ*, проходят одновременно и через некоторую точку *В*, отличную от точки *А*.

□ Рассмотрим некоторую окружность *w*, удовлетворяющую нашим условиям.

*А*

*Σ*

*w*

1

0

Введем систему координат таким образом, что начало координат располагается в центре окружности *Σ* и радиус ее равен 1, а точка *А* лежит на действительной оси.

Тогда *Σ* задается уравнением , *w* задается уравнением , где *s* – координата центра, *r* – радиус. Перпендикулярность окружностей дает равенство . Раз *А* лежит на *w*, то верно , а с учетом предыдущего равенства .



Точка *А*, по условию, не лежит на окружности *Σ*, и *А* лежит на действительной оси, поэтому и , то есть , откуда . Последнее число, очевидно, тоже является действительным. Тогда докажем, что точка с координатой лежит на *w*, то есть верно . Но это равносильно , или , что верно. Значит, точка с координатой лежит на *w*. Так как она отлична от точки *А*, а окружность *w* бралась произвольно, то мы нашли другую общую точку всех наших окружностей, что и требовалось. ■



Заметим, что точка *А* не может совпадать с центром окружности *Σ*, поскольку тогда касательная к *w* будет иметь с последней две общие точки, что невозможно.

Естественно, что других общих точек у окружностей, перпендикулярных окружности *Σ* и проходящих через точку *А*, не лежащую на *Σ*, нет, поскольку тогда пучок этих окружностей проходил бы через три точки, то есть все окружности бы совпадали.

Заметим также, что точки с координатами 0, *а* и коллинеарны. Две последние точки лежат по одну сторону от центра *Σ*. Причем если *А* лежит внутри окружности *Σ*, то *В* – вне ее, и наоборот. Также произведение расстояний от этих точек до центра окружности постоянно и равно действительному числу – квадрату радиуса данной окружности.



Если *А* лежит на *Σ*, то других общих точек у пучка таких окружностей нет. Действительно, если бы была еще одна точка, не лежащая на *Σ*, то по теореме была бы к тому же общей и не совпадающая с ней точка, не лежащая на окружности, то есть не совпадающая с *А*. Тогда у окружностей три общих точки и они все совпадут, что невозможно. Если же еще одна общая точка окружностей лежит на *Σ*, то можно поступить так. Точка *А* лежит на *Σ,* поэтому или . Но мы всегда можем перенаправить действительную ось в противоположную сторону, поэтому будем считать, что . Тогда из верного равенства получаем, что . Так как *В* лежит на *w*, то верно , но *В* лежит и на *Σ*, тогда последнее равенство запишется как . Получаем систему ⇔ ⇔ .



Так как , то и левая часть первого условия не должна равняться нулю. Значит, из первого условия можно смело находить центр *w*. Но тогда все окружности пучка совпадут, так как радиус окружностей находится как расстояние , что невозможно.



Также заметим, что и в этом случае квадрат расстояния от точки *А* до центра окружности равен квадрату радиуса данной окружности.

Теперь становится естественным следующее определение:

*Определение 4*. Точка *А* называется симметричной точке *В* относительно окружности *Σ*, если каждая окружность, проходящая через *А* и перпендикулярная *Σ*, проходит через точку *В*.

Для каждой точки *А* существует только одна ей симметричная. Причем, очевидно, что если *А* лежит на *Σ*, то у нее нет отличных от нее симметричных точек, она симметрична сама себе. Также очевидно, что если *А* совпадает с центром окружности симметрии, то у нее нет симметричной ей точки.

Еще ясно, что произведение расстояний от центра данной окружности до симметричных точек равно квадрату радиуса этой окружности.

Если точка *А* симметрична точке *В* относительно окружности *Σ*, то и точка *В* симметрична точке *А* относительно окружности *Σ*. Это позволяет говорить о точках, симметричных относительно окружности. Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры *F* относительно окружности *Σ*, образует фигуру *F*’, симметричную фигуре *F* относительно окружности *Σ*.

Симметрия относительно прямой является предельным случаем симметрии относительно окружности, так как прямую можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса.

Симметрия относительно окружности называется также инверсией; в этом случае окружность, относительно которой производится симметрия, называется окружностью инверсии, центр этой окружности – центром инверсии, а квадрат ее радиуса – степенью инверсии.

Инверсию можно еще определить и так:

*Определение* *5*. Инверсией плоскости с центром в точке *S* и степенью инверсии *k* называется преобразование, которое всякую точку *М* плоскости, отличную от *S*, отображает в такую точку *М*’, что точка *М*’ лежит на луче *SM* и произведение .



Докажем равносильность определений 4 и 5.

4⇒5. Вспомним, что при доказательстве теоремы 2 и далее в рассуждениях мы пришли к факту, что симметричные относительно окружности точки лежат на одной прямой с центром окружности *Σ* и по одну сторону от него, причем произведение их расстояний до центра этой окружности равно постоянному действительному числу – квадрату радиуса окружности. Это было показано для каждой точки, отличной от центра окружности.

5⇒4. Проведем окружность с центром в точке *S* и радиусом . Нам дано, что . Но любая окружность, перпендикулярная проведенной и проходящая через точку *М*, не лежащую на проведенной окружности, проходит и через точку *М*’, мы это показали ранее. Значит, действительно, точки *М* и *М*’ симметричны в смысле определения 4.



Чтобы это было действительно преобразование, допускают, что точка *S* отображается в бесконечно удаленную точку, и наоборот (в данном случае нам удобнее мыслить бесконечно удаленную область как одну точку).

Определение 5 менее геометрично, чем предыдущее, но обладает преимуществом большей простоты. Исходя из этого определения, инверсию иногда еще называют преобразованием обратных радиусов. С этим определением связано также название «инверсия» (от латинского слова *inversio* – обращение).

Очевидно, слова «точка *М*’ лежит на луче *SM* и произведение » можно с успехом заменить словами «точки *S*, *M* и *М*’ коллинеарны и скалярное произведение векторов ». Здесь *k* всегда положительно. Но иногда полезно рассмотреть преобразование, которое переводит точку *M* в *М*’ так, что и точки *S*, *M* и *М*’ коллинеарны, но *M* и *М*’ лежат по разные стороны от точки *S*. Тогда, очевидно, *k* будет отрицательным. Такое преобразование называют инверсией с центром в точке *S* и отрицательной степенью. Здесь также допускают, что центр инверсии переходит в бесконечно удаленную область, и наоборот.



Вообще, говоря об инверсии, имеют в виду обычно инверсию с положительной степенью. Если знак степени инверсии может быть любым, то такое преобразование называют обобщенной инверсией. Его определение будет таким.

*Определение 6*. Обобщенной инверсией плоскости с центром в точке *S* и степенью инверсии *k* называется преобразование, которое всякую точку *М* плоскости, отличную от *S*, отображает в такую точку *М*’, что точки *S*, *M* и *М*’ коллинеарны и скалярное произведение векторов . При этом считают, что *S* переходит в бесконечно удаленную область, и наоборот.



Это преобразование инволютивное, поскольку точки *М* и *М*’ входят в формулу равноправно, а для центра инверсии и бесконечно удаленной области все очевидно.



***1.3. Формула инверсии в комплексно сопряженных координатах***. Найдем формулу обобщенной инверсии при задании точек комплексными числами. Пусть точкам *S*, *M* и *М*’ соответствуют комплексные числа *s*, *z* и *z*’.

По формуле скалярного произведения векторов . Коллинеарность точек *S*, *M* и *М*’ дает равенство . Отсюда имеем ⇔ , откуда и получаем искомую формулу .



Итак, обобщенная инверсия имеет формулу или, что то же самое, . При *k*>0 получаем инверсию с положительной степенью, при *k*<0 – с отрицательной.



Но всякое ли преобразование плоскости, заданное формулой , является обобщенной инверсией? Если принять *,* , то достаточно потребовать, чтобы и для обобщенной и для обычной инверсии (с положительной степенью).



Значит, всякое преобразование плоскости, задаваемой формулой , есть обобщенная инверсия.



***1.4. Неподвижные точки и окружность инверсии.*** Исследуем уравнение инверсии на неподвижные точки: для них должно выполняться равенство ⇔ . Мы не рассматриваем центр инверсии и бесконечно удаленную область, так как мы доопределили, что они не остаются неподвижными, а переходят друг в друга. Тогда будет выполняться равенство .



Очевидно, что если , то все искомые точки образуют окружность с центром в точке с координатой *s* и радиусом . Эта окружность при называется окружностью инверсии. Если обозначить радиус окружности инверсии через *R*, то выполняется . И формулу инверсии для *k*>0 можно переписать более наглядно: .



Если степень инверсии отрицательна, то преобразование не имеет неподвижных точек (поскольку невозможно изобразить на плоскости, даже комплексной, точки, координаты которых удовлетворяют равенству ). Но иногда эту мнимую окружность также называют окружностью инверсии, ее центр расположен в центре инверсии, а радиус будет равен ==.



Так как , то, очевидно, инверсию отрицательной степени легко представить в виде коммутативной композиции инверсии с положительной степенью и центральной симметрии с общим центром в *s*.



***1.5. Образы прямых и окружностей при обобщенной инверсии.*** Без ограничения общности рассуждений можно принять , и формула инверсии примет вид , более удобный для практики. Ведь нам пока не важны коэффициенты в получающейся формуле, важно, какую фигуру она описывает.



Пусть задана прямая *l* с уравнением , . При подстановке в это уравнение и получаем: . Умножим на , это будет равносильным преобразованием, поскольку ; получим, опуская в полученном результате штрихи: .



Если *q* = 0, то получаем уравнение . Так как , то умножим обе части уравнения на , получим . Это уравнение прямой, совпадающей с заданной прямой *l*. Если , то получаем уравнение окружности , так как . Она содержит центр инверсии, ее центр расположен в точке , а радиус равен . Заметим, что центр лежит на прямой , проходящей через центр инверсии перпендикулярно *l*.



Итак, прямая, содержащая центр инверсии, отображается при этой инверсии в себя; прямая, не содержащая центр инверсии, отображается в окружность, проходящую через него. Поскольку инверсия инволютивна, то окружность, содержащая центр инверсии, отображается в прямую, не содержащую его.

Возьмем теперь окружность , не проходящую через центр инверсии . Тогда выполняется . Ее образ имеет уравнение (штрихи опущены). При раскрытии скобок получим . Умножим на , это будет равносильным преобразованием, поскольку ; получим . Так как , то этим уравнением задается окружность с центром и радиусом . Она не проходит через центр инверсии. Интересно, что центр инверсии *0*, центр данной окружности *s* и центр ее образа коллинеарны, поскольку число действительное. Но центр окружности при инверсии не переходит в центр окружности образа. Если центр данной окружности *s* перейдет в , то тогда должно выполняться . Поскольку , умножим на , получим равносильное равенство . Отсюда , то есть , что невозможно. Значит, предположение было неверно, и центр данной окружности не переходит в центр окружности образа.



Итак, окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, также не проходящую через центр инверсии.

В частности, если центр инверсии совпадает с центром окружности, то и окружность при инверсии переходит в окружность , центр которой также совпадает с центром инверсии. Итак, окружность, центр которой совпадает с центром инверсии, при этой инверсии переходит в концентрическую окружность. В частности, окружность с уравнением инвариантна.



Интересно, что центр инверсии является одновременно и центром гомотетии, переводящей одну окружность в другую. Для нашего случая гомотетия будет иметь уравнение . Убедиться в этом можно простой подстановкой: эта гомотетия переводит окружность в фигуру . Поделив обе части на , получим окружность с центром и радиусом , что и требовалось доказать.



Теперь становится ясно, что каждую окружность можно при помощи подходяще выбранной инверсии перевести в другую данную окружность или прямую. Докажем это.

Пусть даны две окружности действительного радиуса. Рассмотрим сначала случай, когда их радиусы не равны.

Мы уже показали, что центры окружностей и центр инверсии должны лежать на одной прямой. Понятно, что центр инверсии не лежит на данных окружностях.

Точки, лежащие на прямой центров, переходят в точки, лежащие на той же прямой. Поэтому могут быть два порядка точек: и .



Введем систему координат таким образом, что центры окружностей лежат на действительной оси, причем центр одной совпадает с началом координат, а радиус ее равен 1.

*a*1

*а*2

-1

1

0

Покажем, что существует инверсия для первого случая.

Пусть точки пересечения второй окружности с действительной осью имеют координаты *а*1 и *а*2. Тогда при инверсии *а*1 переходит в -1, а *а*2 – в 1. Тогда можно записать, что , . То есть получаем систему: , что равносильно . Вычтем: , откуда, в силу неравности радиусов, . Может статься, что это не является решением. Решением это будет в точности тогда, если совпадут значения *k* из обоих уравнений.



Из первого уравнения = .



Из второго условия получаем =. Тот же самый результат. Итак, получаем единственную инверсию с центром в точке и степенью .



Точка с координатой *а*2 лежит на действительной оси правее точки с координатой *а*1, поэтому для определения знака степени нужно знать знак произведения .



Степень инверсии будет положительна в двух случаях: либо , откуда , либо , откуда , то есть когда одна окружность лежит целиком внутри другой. В остальных случаях степень инверсии будет отрицательна.



Рассмотрим второй случай. Тогда при инверсии *а*1 переходит в 1, а *а*2 – в -1. Можно записать, что , . То есть получаем систему: , что равносильно . Вычтем: , откуда, в силу неравности радиусов, .



Аналогично, может оказаться, что это не является решением. Решением это будет в точности тогда, если совпадут значения *k* из обоих уравнений.

Из первого уравнения , откуда . Из второго уравнения = . Тот же самый результат.



Знак степени определяется знаком произведения . Отрицательна она будет только в случае , то есть или в случае , то есть . Это происходит в точности когда одна окружность лежит внутри другой. Положительной степень будет в противном случае.



Итак, когда радиусы окружностей не равны, одну в другую можно перевести ровно двумя инверсиями, причем одна из них с положительной степенью, а другая – с отрицательной.

Если же радиусы окружностей равны, то все выкладки будут иметь место, но гораздо упростятся. Для первого случая получим из равенства , что , тогда . Причем у нас не может быть случая, когда одна окружность лежит внутри другой, значит, степень положительна.



Для второго же случая получаем верное равенство , но , и получим , то есть окружности концентричны, но в силу равенства радиусов они совпадают. Это невозможно по предположению, значит, такой инверсии не может быть.



Можно сделать вывод, что если радиусы окружностей равны, то одну в другую можно перевести ровно одной инверсией с положительной степенью. В принципе, этого следовало ожидать: у двух окружностей равного радиуса только один центр гомотетии.

Покажем теперь, что существует инверсия, переводящая прямую *l* в окружность действительного радиуса, и обратно. Ясно, что эта окружность проходит через центр инверсии, а прямая нет. Мы уже показали, что центр инверсии лежит на прямой *m*, проходящей через центр нашей окружности перпендикулярно *l*. Значит, он может быть только в одной из точек пересечения окружности с прямой *m*.

Введем систему координат так, что начало координат располагается в центре окружности, а прямая *m* совпадает с действительной осью.

Данная прямая *l* параллельна мнимой оси, поэтому будет иметь уравнение , . Прямая пересекает действительную ось в точке с координатой . Окружность, если обозначить ее радиус *r*, будет иметь уравнение . Инверсии, если они есть, будут иметь формулы и , где *k*1 и *k*2 нам пока не известны. Первая переведет окружность в прямую с уравнением ⇔ ⇔ . Чтобы это была *l*, достаточно потребовать , откуда .

*l*

*m*

0



Вторая инверсия переведет окружность в прямую с уравнением ⇔ ⇔ . Чтобы это была *l*, достаточно потребовать , откуда .



Могут получиться следующие случаи:

1) ⇔ , тогда , ;



2) ⇔ , тогда , , то есть второй инверсии не существует – это происходит при касании прямой и окружности в точке с координатой -*r*;



3) ⇔ , тогда , ;



4) ⇔ , тогда , то есть первой инверсии не существует – это происходит при касании прямой и окружности в точке с координатой *r*, ;



5) ⇔ , тогда , .



Можно сделать вывод, что если прямая не имеет общих точек с окружностью, то одну в другую можно перевести ровно двумя инверсиями, причем одна из них с положительной степенью, а другая с отрицательной. Если прямая касается окружности, то одну в другую можно перевести только одной инверсией с положительной степенью. Если прямая и окружность пересекаются, то одну в другую можно перевести двумя инверсиями с положительными степенями.

Две же различные прямые никогда не могут быть переведены друг в друга инверсией.

***1.6. Свойства обобщенной инверсии****.*[[2]](#footnote-2)

1º. При обобщенной инверсии с центром *О* и степенью *k* внутренние точки окружности *Σ*(*О*,) (окружность инверсии, если *k* положительно) переходят во внешние и наоборот (поэтому говорят также о зеркальном отображении относительно окружности).



□ Для центра инверсии и бесконечно удаленной области это очевидно. Для остальных точек при инверсии с положительной степенью это было доказано выше, в теореме 2. А так как инверсию с отрицательной степенью можно представить как коммутативную композицию инверсии с положительной степенью и центральной симметрии с центром в начале инверсии, то и для нее все очевидно. ■

2º. Преобразование плоскости, представляющее собой последовательно выполненную дважды одну и ту же инверсию, есть тождественное преобразование

□ Следует из инволютивности преобразования инверсии. ■

3º. Две фигуры, инверсные третьей фигуре относительно одного и того же центра *О*, гомотетичны.

□ Действительно, пусть *М* – точка фигуры *F*, *М*1 и *М*2 – точки, соответствующие ей в двух инверсиях с общим центром *О* и коэффициентами *k*1 и *k*2. Без ограничения общности рассуждений можно рассмотреть инверсию с центром в начале координат. Тогда, если точки *М*, *М*1 и *М*2 будут иметь координаты *m*, *m*1 и *m*2 соответственно, то , . Замечаем, что вторая точка получена из первой при гомотетии с уравнением . ■



Мы видим, что выбор степени инверсии не влияет на форму полученных фигур. Эта форма изменяется только при изменении центра инверсии.

4º. Зависимость расстояния между образами *A’* и *B’* двух точек *А* и *В* от расстояния между этими точками при инверсии с центром *S* и степенью *k* выражается в формуле .



□ Инверсия задается формулой . Тогда . Отсюда = = =. А это и означает . ■



5º. Инверсия сохраняет величину угла между окружностями, а также между окружностью и прямой, между двумя прямыми, но изменяет его ориентацию на противоположную.

□ Пусть заданы две окружности (прямая и окружность, две прямые), одна из которых проходит через точки *A*, *B*, *C*, а другая – через точки *A*, *B*, *D.* Берем точки «хорошие», то есть среди них нет бесконечно удаленной и нулевой, так как мы будем брать инверсию с центром в нуле. Если заданы две прямые, считаем *А* = *В*. Если *A*’, *B*’, *C*’, *D*’ *–* образы этих точек при инверсии , то их двойное отношение *w*’ равно числу, комплексно сопряженному двойному отношению *w* точек *A*, *B*, *C*, *D*:



.



Согласно геометрическому смыслу аргумента двойного отношения, он равен ориентированному углу между окружностями (прямой и окружностью, двумя прямыми) *ABC* и *ABD*, но . ■



Следствие 1. Инверсия сохраняет двойное отношение расстояний между точками, каждая из которых не совпадает с центром инверсии и с бесконечно удаленной точкой.

□ Заметим, что . Из этого следует, что инверсия сохраняет двойное отношение расстояний между точками, каждая из которых не совпадает с центром инверсии и с бесконечно удаленной точкой.



Для иных наборов точек это утверждение, вообще говоря, неверно. Например, будем предполагать, что все четыре точки различны. Если центр инверсии совпадает, скажем, с точкой *А*, то, при неравенстве остальных точек бесконечно удаленной, получаем отношение , не имеющее смысла. Если же *А* совпадает с бесконечно удаленной точкой, то получим - тоже нет смысла. ■



Следствие 2. Две точки и их образы при инверсии лежат на одной окружности или одной прямой.

□ Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим инверсию . Пусть точки *А(a)* и *В(b)* переходят при инверсии в точки *А’(a’)* и *В’(b’)*. Тогда координаты образов будут и соответственно. Если двойное отношение их вещественно, то все доказано.



, то есть они действительно лежат или на одной окружности, или на одной прямой.



Чтобы они лежали на прямой, нужно потребовать, чтобы точки *А* и *В* были коллинеарны с центром инверсии, причем каждая из точек даже может совпадать с центром инверсии или бесконечно удаленной точкой. ■

Следствие 3. Касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямая переходят при инверсии в касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямую, если только точка касания не совпадает с центром инверсии, иначе они переходят в параллельные прямые.

□ Угол между касающимися окружностью и прямой или касающимися окружностями равен 0º. Если точка касания не совпадает с центром инверсии, то окружности переходят в две окружности, если центр инверсии не на одной из окружностей, в противном случае в окружность и прямую. Угол сохраняется, значит, все верно.

Если же точка касания совпадает с центром инверсии, то окружность переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии, а прямая переходит сама в себя. Угол между прямыми сохраняется и равен 0º, то есть они действительно параллельны. ■

*Определение* *7*. Прямая называется касательной к кривой в точке *М*0, если для произвольной точки кривой *М* расстояние от *М* до прямой стремится к нулю быстрее, чем от *М* до *М*0, когда *M*→ *М*0, то есть , где *Р* – это проекция точки *М* на прямую.



*Определение* *8*. Окружность называется касательной к кривой в точке *М*0, если касательная к окружности в этой точке является и касательной к кривой в этой точке.

*Определение* 9. Углом между двумя кривыми в их общей точке называется угол между касательными к этим кривым в рассматриваемой точке.

Если кривые не имеют общих точек, или хотя бы одна из них не имеет касательной в общей точке, то угол между кривыми не определен.

Очевидно, что угол между двумя кривыми в их общей точке также можно определить как угол между касательными окружностями (касательной окружностью и прямой) к этим кривым в рассматриваемой точке.

*Определение 10*. Всякое преобразование, при котором сохраняются углы между кривыми, называется конформным преобразованием.

Следствие 4. Инверсия есть конформное преобразование.

□ **Лемма**. Пусть дана окружность с центром *s* и точка *m*0 на ней. Тогда прямая, проходящая через эту точку и касающаяся данной окружности, будет иметь уравнение .



○ Искомая касательная перпендикулярна прямой, проходящей через *s* и *m*0, и сама проходит через *m*0.

Перенесем центр координат в точку *m*0, то есть применим параллельный перенос, который будет иметь уравнение . Прямая, проходящая через *s*-*m*0 и 0, будет иметь уравнение , или в канонической форме . Любая прямая, проходящая через 0, будет иметь уравнение . Чтобы она была перпендикулярна прямой , нужно, чтобы . То есть можно взять . Значит, искомая прямая будет иметь уравнение . Переводим в исходные координаты: . ●



Пусть нам даны кривые *γ* и *ν*, имеющие общую точку с координатой *m*0, и пусть каждая из них имеет касательную в этой точке – *l* и *p* соответственно. Пусть при некоторой инверсии кривые *γ* и *ν* перейдут в кривые *γ*’ и *ν*’, прямые *l* и *p* – в прямые или окружности *l*’ и *p*’. Все фигуры будут проходить через точку с координатой *m*’0. Угол между последними, по свойству 5, сохранится, так что остается показать, что они будут касательными к кривым *γ*’ и *ν*’ в точке с координатой *m*’0.

Итак, для доказательства достаточно показать, что если дана кривая *γ* и касательная *l* к ней в точке с координатой *m*0, то *l*’ будет также касательной к *γ*’ в точке с координатой *m*’0.

Прямая *l* будет касательной к кривой в точке *М*0 при , где *Р* – это проекция точки *М* на прямую *l*, *М* – точка кривой γ.



Выполним инверсию *I*, пусть ее степень равна *k*, а центр *s* не в точке *М*0. Поместим начало координат в *s*, и уравнение инверсии будет . Также направим действительную ось через точку *М*0. Если уравнение *l* , , то уравнение *l*' будет , .



Заметим, что по условию выполняется ⇔ ⇔ .



Если *l*' – окружность, то касательная к ней в точке *М*0’ будет, по лемме, иметь уравнение ⇔ . В силу равенства получаем ⇔ ⇔ .



Покажем, что она будет касательной и к *γ*’ в точке *М*0’, то есть , где *Q* – это проекция точки *М’* на эту прямую, *М*’ – точка кривой γ’.



Из свойства 4 имеем: . Отсюда следует, что . Действительно, = = 0. Также = = 0.



Тогда ⇔ ⇔ ⇔ ⇔ .



По известным неравенствам , и получаем: ≤ + ≤ = + .



Рассматриваемый предел ограничен слева нулем, а справа пределом = + = 0 + .



Но мы брали *m*0 действительным числом, поэтому . Значит, доказываемый предел равен нулю, если *l*' – окружность.



Если *l*' – прямая, то ее уравнение совпадет с прообразом: . Тогда нам уже дано равенство . Покажем, что сама прямая будет касательной к *γ*’ в точке *М*0’. Действительно, ⇔ ⇔ ⇔ , а этот предел нам дан.



Мы пришли к выводу, что когда центр инверсии не лежит в рассматриваемой точке, то угол между кривыми сохраняется.

Если же взять центр инверсии в точке *М*0, то последняя отобразится в бесконечно удаленную область. Касательные *l* и *p* перейдут сами в себя и по соглашению о бесконечно удаленной области будут касаться кривых *γ*’ и *χ*’ в несобственной точке *М*’0. Можно определить угол между ними в несобственной точке как имеющийся угол между ними. ■

Следствие 5. Четное число инверсий не меняет угла между кривыми, нечетное число меняет направление угла на противоположное.

6º. Каждые две окружности или прямую и окружность можно при помощи инверсии перевести в две прямые (пересекающиеся или параллельные) или в две концентрические окружности.

□ Если данные окружности или окружность и прямая касаются, то при центре инверсии в точке касания переходят в две параллельные прямые (следствие 4).

Пусть даны две не касающиеся окружности действительного радиуса. Если они пересекаются, то, взяв за центр инверсии одну из точек пересечения, получим две пересекающиеся прямые (они будут пересекаться по образу второй точки пересечения).

Пусть окружности не пересекаются. Если они уже концентрические, то существует две инверсии, переводящие их одна в другую. Если же они не концентрические, то в две прямые они перейти не могут, так как тогда центр инверсии должен располагаться одновременно на обеих, что невозможно. Попробуем их перевести в две концентрические окружности.

Введем систему координат таким образом, что центры окружностей лежат на действительной оси, причем центр одной из них совпадает с началом координат, и радиус этой окружности равен 1.

*a*1

*а*2

-1

1

0

Центр инверсии лежит также на действительной оси. Действительно, центр инверсии, центр образа первой окружности и центр ее же лежат на одной прямой. Но тогда центр второй окружности лежит там же. А центры обеих окружностей принадлежат действительной оси.

Пусть координаты пересечения второй окружности с действительной осью равны *а*1 и *а*2, у первой окружности это будут точки с координатами -1 и 1. Пусть на оси дана точка *О* с координатой *s*. Тогда при инверсии с центром в точке *О* и степенью *k* будут выполняться равенства: , , и . Но точки лежат на действительной оси, поэтому верно , , .



Полученные окружности концентричны, если . То есть , что равносильно , откуда получаем равносильное уравнение относительно *s*: , где *s* не совпадает с рассмотренными четырьмя точками.



=. Значит, дискриминант положителен в точности тогда, когда окружности не пересекаются. Это и доказывает существование нужной инверсии, причем их будет две. Также нужно заметить, что степень инверсии погоды не делает.



Пусть теперь даны не касающиеся окружность и прямая. Если они не пересекаются, то, взяв центр инверсии на прямой или окружности, получим при инверсии прямую и окружность. Не подходит. Если возьмем центр инверсии вне прямой и окружности, то получим две окружности. Попробуем найти инверсию, при которой они концентрические.

1

*a*

Введем систему координат таким образом, что прямая будет мнимой осью, а центр окружности лежит на действительной оси и координата одной из точек пересечения окружности в осью равна 1, а вторая точка пересечения имеет положительную координату *а*.

Возьмем точку на действительной оси, не принадлежащую данной прямой и окружности, пусть ее координата равна *s*. Проведем инверсию с центром в этой точке и степенью *k*. Если она переведет фигуры в концентрические окружности, то аналогично это только тогда, когда выполняется равенство , то есть , или , откуда, после приведения подобных, получаем . Так как знаменатель заведомо не равен нулю, поскольку мы так брали *s*, то получаем , откуда, в силу положительности *а*, . Итак, такая инверсия существует.



Если же прямая и окружность пересекаются, то, взяв за центр инверсии одну из точек пересечения, получим две прямые. Они будут пересекаться в образе второй точки пересечения. ■

7º. При инверсии с центром *sI* и степенью *k* окружность с центром *s* радиуса *r*, не совпадающая с окружностью инверсии (если степень положительна), отображается в себя тогда и только тогда, когда выполняется равенство .



□ Перенесем начало координат в центр инверсии параллельным переносом , и инверсия тогда будет задана формулой . Координата центра окружности станет , для удобства в дальнейшем будем опускать этот штрих. Тогда уравнение окружности будет . Понятно, что центр инверсии не лежит на окружности, иначе она вообще перейдет в прямую. Это соображение дает нам . Окружность инверсией переводится в , или , то есть . Так как центр инверсии не на окружности, то это равносильно . Это будет та же самая окружность при условии, что ⇔ ⇔ ⇔ ⇔ .



Нас интересует только второе условие совокупности. Кстати, оно при дает условие ортогональности окружности инверсии и нашей окружности. Так попутно мы доказали, что если окружность перпендикулярна окружности инверсии положительной степени, то она при этой инверсии переходит сама в себя.



При переходе к исходным координатам получаем . ■



**Глава 2**

Применение инверсии при решении задач и доказательстве теорем

***2.1. Применение инверсии при решении задач на построение.*** Метод инверсии дает возможность решить ряд наиболее трудных конструктивных задач элементарной геометрии. При этом его комбинация с методом координат, что фактически происходит при попытке решать задачу на комплексной плоскости, дает наиболее точные вычисления местонахождения нужных фигур, что является явным плюсом метода по сравнению с довольно неточными построениями от руки. Недостатком же этого метода является его громоздкость, связанная с необходимостью выполнить большое число довольно объемных вычислений. Но надо сказать, что для компьютера это не является трудностью, и перед пользователем встает лишь проблема перевода алгоритма решения задачи на язык программирования.

Задачи на построение, решаемые методом инверсии, Александров [2] делил на три группы.

Первая группа. В задачах этого рода обратные кривые играют роль геометрических мест. Центр и степень инверсии в этом случае известны.

*Задача 1*. Даны точка *К* и две прямые *АВ* и *ВС*. Провести секущую *KXY* так, чтобы , где *с* – данная длина.



○ Искомые точки *X* и *Y* инверсны друг другу при инверсии с центром в точке *К* и степенью *с*2. Точка *Y* есть пересечение прямой *ВА* с кривой, обратной *ВС*. Это будет окружность, проходящая через центр инверсии, то есть через точку *К*. Найдем ее уравнение.

Передвинем систему координат таким образом, что точка *К* является началом координат (это будет параллельный перенос на вектор *ОК* с формулой , где *ρ* - координата точки *К*), тогда уравнение прямых *ВС* и *АВ* можно записать как и , поскольку они не проходят через точку *К*. Уравнение инверсии примет вид .



Образ прямой *ВС* при инверсии будет , или, после упрощений, . Тогда координата искомой точки *Y* находится из системы: преобразовав которую, получаем систему



Вычислив корни первого уравнения, подставляем их во второе. Если подойдут, это решение. Таким образом, может быть 2, 1 или 0 решений.

Чтобы перевести координату *Y* в исходную систему координат, прибавляем к полученной координате настоящую координату *К*.

Теперь по двум точкам – *Y* и *К* – пишем уравнение искомой прямой: . ●



Вторая группа. В задачах этой группы инвертируется некоторая часть искомой фигуры (отрезок, точка или окружность); при этом теория инверсии, иногда в соединении с другими методами, часто укажет такую зависимость начала инверсии от данных и искомых, которая позволяет решить задачу. Начало и степень инверсии даны или должны быть целесообразно выбраны. В выборе начала, степени, числа инверсий иногда встречаются затруднения.

Лучшим примером задач этого рода служит, по мнению Александрова, частный случай задачи Кастильона (Castillon), разобранный ниже.

*Задача 2*. В данную окружность вписать треугольник так, чтобы прямые, содержащие его стороны, проходили бы соответственно через данные три точки.

○ Когда все три точки лежат на данной окружности, то решение очевидно: достаточно просто соединить эти точки и получим искомый треугольник. Решение единственно, потому что треугольник своими вершинами определяется однозначно.

Если две из трех данных точек лежат на окружности и не коллинеарны с третьей, то решение также очевидно. Если третья точка лежит внутри окружности, то любая прямая, проходящая через нее пересекает окружность в двух точках. Было бы замечательно, если бы она пересекала окружность в одной из данных точек. Это можно устроить двумя способами, и решений тоже два.

Если третья точка лежит вне окружности, то есть ровно один случай, при котором задача не имеет решения – если обе проведенные прямые являются касательными. То есть может быть два, одно или ни одного решения.

Если только одна точка лежит на данной окружности, то решений также в лучшем случае два. Проведем прямую через точку на окружности и точку не на окружности. Получим одну сторону треугольника. Теперь проведем прямую через вторую точку не на окружности и точку пересечения полученной прямой, не совпадающей с данной, если она есть. Получим вторую сторону треугольника. Третья сторона получается автоматически.

Так можно проделать с каждой из двух точек не на окружности, и решений будет два, если в каком-то или в обоих случаях не получится, что первая или вторая проведенная прямая окажется касательной.

Рассмотрим случай, когда три данные точки не лежат на данной окружности.

Пусть *ABC* – искомый треугольник, стороны *АВ*, *ВС* и *СА* которого проходят через три заданные точки *М*1, *М*2 и *М*3 с координатами *m*1, *m*2 и *m*3 соответственно, и вписан он в окружность *w* с центром *S*(*s*)и радиусом *r*.

Поместим начало координат в центр окружности *w* при помощи параллельного переноса . Тогда окружность будет иметь уравнение , а новые координаты данных точек будем для простоты обозначать теми же буквами, не забывая при этом их истинного смысла.



Заметим, что положение точки *А* определяет весь треугольник, поскольку прямая *Am*1 в пересечении с окружностью дает точку *В*, затем прямая *Bm*2 в пересечении с окружностью дает точку *С*.

Выполним инверсию *I1* с центром в точке *М*1 и степенью , ее формула будет . При этом окружность *w* перейдет сама в себя по свойству 7: . Значит, точка *А* перейдет в точку *В*, поскольку не может перейти в себя, а образ ее лежит на окружности и прямой *Am*1 одновременно.



Затем осуществим инверсию *I*2 с центром в точке *М*2 и степенью . Опять окружность *w* перейдет сама в себя, а точка *В* перейдет в точку *С*. Потом применим инверсию *I*3 с центром в точке *М*3 и степенью . И опять окружность *w* перейдет сама в себя, а точка *С* перейдет в точку *А*.



Наконец, применим инверсию *I* с центром в точке *S*(0) и степенью . Точка *А* перейдет сама в себя, так как лежит на окружности инверсии, сама окружность *w*, как окружность инверсии,– тоже.



Таким образом, композиция инверсий переводит окружность *w* и точку *А* самих в себя.



1) Пусть *Σ* – окружность или прямая, проходящая через точку *А*. Обозначим , причем, очевидно, . Кстати, отсюда - это нам понадобится ниже.



Чтобы *Σ* перешла в прямую *Σ*’, необходимо, чтобы проходила через *S*, то есть *Σ* проходила через . Обратно, если *Σ* проходит через *S*’, то *Σ* – прямая.



Вывод: *Σ’* – прямая ⇔.



2) Теперь аналогично поработаем с *Σ’* – прямой или окружностью, очевидно, проходящей через *А*. Как мы уже выяснили, , и *Σ*, по допущению, проходит через *А*. Чтобы *Σ’* перешла при композиции инверсий в прямую *Σ*, необходимо, чтобы проходила через *М*1, то есть *Σ*’ проходила через . Обратно, если *Σ*’ проходит через *М’*, то *Σ* – прямая.



Вывод: *Σ* – прямая ⇔.



Теперь рассмотрим прямую *AS’*. По первому выводу, будет прямая. С другой стороны, раз *AS’* – прямая, то, по второму выводу, будет проходить через *М’*. Тогда имеем, что , где *AS’* и *AM’* - прямые.



Угол, образованный прямой *AM’* с окружностью *w* в результате 4 последовательных инверсий не изменится ни по величине, ни по направлению (по следствию 5). Отсюда следует, что прямые *AS’* и *AM’* , образующие в точке *А* одинаковый угол с данной окружностью, совпадут. И точка *А* может быть найдена как пересечение прямой *S*’*M*’ с окружностью *w*. В зависимости от взаимного положения этой прямой и окружности, задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Может получиться, что точки *S*’ и *M*’ совпадут. Это происходит либо при =, либо при . Мы этот случай рассматривать не будем, поскольку цель главы – показать применение инверсии при решении задачи, а это было сделано.



Отсюда алгоритм решения:

1. Переносим начало координат в точку *S*(*s*). Это параллельный перенос. Соответственно, высчитываем новые координаты точек *m*1, *m*2 и *m*3 по формуле .



1. Находим координаты точек и при инверсиях с формулами , , . Если координаты совпали, то получился случай, который мы не рассматривали, иначе они задают прямую , для простоты обозначим , .



1. Три раза заходим в процедуру решения системы ⇔ . В первый раз с , , и получаем точки *а*1 и *а*2. Второй раз (если есть и *а*2, то с каждым из этих значений) – с , . Для каждого *а*i можем получить одно-единственное решение – координату *b*i. Третий раз (если есть и *b*2, то с каждым из этих значений) – с , . Для каждого *b*i можем получить одно-единственное решение – координату *c*i.



1. Переводим полученные координаты в исходную систему координат: . Это и будут вершины треугольника. ●



Третья группа. Всякая задача на построение дает некоторую фигуру, причем некоторые элементы этой фигуры неизвестны. Инвертируем эту фигуру. Тогда данные искомые отобразятся известным образом, и часто может случиться, что зависимость данных и искомых в отображенной фигуре гораздо проще, чем в основной фигуре. Тогда надо построить отображенную фигуру. Потом инвертировать ее обратно с тем же центром и степенью. В этом и состоит главная идея метода инверсии. Разумный выбор начала инверсии играет существенную роль: вычисления можно сильно сократить. Степень инверсии в этом случае обычно бывает произвольной.

Классическим примером задач этого типа можно назвать задачу Аполлония.

*Задача Аполлония*. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

○ Пусть даны три окружности: , и .



Допустим, что мы уже построили нужную окружность . Она, в общем случае, может касаться данных окружностей восемью способами: каждую внутренним или внешним образом.



Таблица 1. Характер касания с искомой окружностью *w*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | S1 | S2 | S3 |
| 1 | внешнее | внешнее | внешнее |
| 2 | внутреннее | внешнее | внешнее |
| 3 | внешнее | внутреннее | внешнее |
| 4 | внутреннее | внутреннее | внешнее |
| 5 | внешнее | внешнее | внутреннее |
| 6 | внутреннее | внешнее | внутреннее |
| 7 | внешнее | внутреннее | внутреннее |
| 8 | внутреннее | внутреннее | внутреннее |

Если у нас есть две касающиеся окружности, то выполним инверсию с центром в точке касания, эти две окружности перейдут в параллельные прямые, и задача сведется к более простой: построить окружность или прямую, составляющую с получающимися параллельными прямыми и еще одной прямой или окружностью угол в 180°.

Если же нет касающихся окружностей, то применим так называемый метод расширения. Мы можем изменять наши окружности так, чтобы центры их всегда оставались постоянными, а радиусы менялись, вплоть до нулевого, и касание искомой окружности с данными сохранялось (возможно, выродившись в принадлежание точки окружности). Причем сделаем так, чтобы две из окружностей касались.

Если у нас все окружности одна в другой, как матрешки, то решений, очевидно, нет. Рассмотрим противоположный случай, когда есть хотя бы две окружности не одна в другой. Для определенности, пусть это первая и вторая. Они могут быть только либо пересекающимися, либо вне друг друга.

Сделаем их касающимися следующим образом.

Таблица 2. Новые радиусы для окружностей одна вне другой, чтобы касались.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Измененный r*1 | *Измененный r*2 | *Измененный r*3 | *Измененный rw* | *x* | *касание* |
|  |  | , |  |  | 1, 5 |
|  |  | , |  |  | 2, 6 |
|  |  | , |  |  | 3, 7 |
|  |  | , |  |  | 4, 8 |

Таблица 3. Новые радиусы для пересекающихся окружностей, чтобы касались.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Измененный r*1 | *Измененный r*2 | *Измененный r*3 | *Измененный rw* | *x* | *касание* |
|  |  | , |  |  | 1, 5 |
|  |  | , |  |  | 2, 6 |
|  |  | , |  |  | 3, 7 |
|  |  | , |  |  | 4, 8 |

Объединим все это в новую таблицу, не учитывая вид касания.

Таблица 4. Итоги.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Измененный r*1 | *Измененный r*2 | *Измененный r*3 | *Измененный rw* | *x* |
|  |  | , | , |  |
|  |  | , |  |  |
|  |  | , |  |  |

Итак, первая и вторая окружности стали касаться. Посмотрим, может ли одна из них выродиться в точку.

В первом случае *х* отрицателен, если окружности пересекаются, но вырождение невозможно, так как это означало бы касание изначальных окружностей внутренним образом. А третья окружность может выродиться.

Во втором случае *r*2 точно не ноль, так как окружности не касаются внешним образом, и радиус первой явно положительное число. Но третья может выродиться.

В третьем случае все аналогично. Третья же окружность может выродиться.

Можно сделать вывод, что касающиеся окружности не вырождаются.

Обратим внимание, что искомая окружность тоже может выродиться в общую точку всех трех окружностей – точку касания первых двух. Но третья не будет касаться их в этой точке и не выродится, иначе окружности бы изначально были касающимися. То есть, в случае получающихся трех прямых, нужно учитывать и общую точку.

Вообще, задача свелась к следующей. Найти окружность, касающуюся трех данных, если две из них касаются и не вырожденные, а третья может быть вырожденной.

Выполним инверсию в точке касания. Касающиеся окружности перейдут в две параллельные прямые, а оставшаяся – в окружность (точку) или прямую. Нужно найти прямую или окружность, параллельную получающимся прямым или касающуюся получающейся окружности (проходящей через точку). Причем искомая окружность или прямая не должна проходить через точку касания, иначе она при инверсии перейдет в прямую, а не окружность.

Для начала ищем окружность, касающуюся двух параллельных прямых и еще одной прямой или окружности. Искомая окружность не должна проходить через *А*. Это вспомогательная задача 1.

Затем ищем прямую, параллельную двум параллельным прямым и еще одной прямой или касающуюся заданной окружности. Искомая прямая не должна проходить через *А*. Но не забываем и об общей точке трех прямых – бесконечно удаленной, которая при инверсии перейдет в центр инверсии и потом, возможно, станет центром искомой окружности. Это вспомогательная задача 2.

*Вспомогательная задача 1*. Даны две параллельные прямые и окружность, возможно вырожденная, либо прямая. Найти касающуюся всех трех фигур окружность.

○ Пусть заданы две параллельные прямые и . Центр искомой окружности, очевидно, будет находиться на прямой .



Если задана еще одна прямая , то центр находится также на прямой . Получаем систему из уравнений двух прямых, из которых легко находим центр искомой окружности, если это возможно (то есть они все не параллельны).



⇔ ⇔ . Далее, если возможно, находим из второго условия и проверяем выполнение первого.



Если найден центр, то радиус окружности находится как расстояние от прямой до прямой . Для этого заметим, что точка с координатой лежит на прямой . Тогда расстояние от этой точки до прямой равно = = .



Помним, что если мы изменяли радиусы, то решением является и бесконечно удаленная точка, то есть окружность с центром в бесконечно удаленной точке и нулевым радиусом.

Если задана окружность или точка , которую для простоты будем считать окружностью нулевого радиуса, то перенесем в центр этой окружности начало координат с помощью параллельного переноса . В силу касания получаем либо систему , либо систему , где *R* – радиус искомой окружности – расстояние между параллельными прямыми и , - образ прямой при параллельном переносе. Обе системы легко решаются. ●



*Вспомогательная задача* 2. Даны две параллельные прямые и окружность, возможно вырожденная, либо прямая. Найти касающуюся всех трех фигур прямую.

○ Пусть заданы две параллельные прямые и . Искомая прямая будет иметь уравнение .



Если дана еще окружность или точка, которую для простоты будем считать окружностью нулевого радиуса, то перенесем в центр этой окружности начало координат с помощью параллельного переноса . Расстояние от центра окружности до искомой прямой должно равняться радиусу окружности, то есть в переобозначенных координатах. Отсюда два значения *q*, но нужно следить, чтобы прямые не совпали.



Если дана прямая, то если она не параллельна двум другим, то решений нет. Иначе решений бесконечно много, только нужно следить, чтобы прямые не совпали. ●

*Алгоритм решения задачи Аполлония может быть таким*:

1. Если все окружности расположены одна в другой, как матрешки (при одновременном выполнении условий[[3]](#footnote-3) , и ), то решений нет, иначе:



1. Определяем две окружности не одна в другой (для них не выполняется неравенство ); если они касающиеся (при или ), то принимаем и выполняем следующий шаг один раз, иначе делаем их касающимися, повторяя для каждого *х* следующий шаг три раза.



1. Изменяем радиусы, делая касание; определяем точку касания (ее координата будет равна для касающихся окружностей *Si* и *Sj*); выполняем инверсию с центром в этой точке; решаем задачи 1 и 2, снова делаем инверсию; выводим и запоминаем результат, если такого еще нет.



1. Проверяем результаты на касание. ●

***2.2. Применение инверсии при доказательстве.*** Здесь снова используется тот факт, что зависимость данных и искомых в отображенной фигуре часто гораздо проще, чем в основной фигуре. Замечательно, если в задаче фигурирует окружность: метод дает возможность заменять фигуры, содержащие окружности, более простыми фигурами.

**Теорема Птолемея**. Для всякого четырехугольника *ABCD*, вписанного в окружность, верно .



□ Пусть точки *A*, *B*, *C*, *D* имеют координаты *a*, *b*, *c*, *d* соответственно.

Примем *А* за центр инверсии, и пусть степень инверсии равна 1. При этом окружность переходит в прямую. На этой прямой лежат образы точек *B*, *C*, *D* – точки *B*’, *C’*, *D’*, причем порядок точек сохраняется, поскольку по след 5 сохраняется двойное отношение точек *В*, *В*, *С*, *D*, а это есть простое отношение трех точек *В*, *С*, *D*. По свойству 3 можно записать: , и .



Из-за сохранения порядка точек верно , то есть . Приведем к общему знаменателю: . Это и означает, что . ■



**Обратная теорема**. Если для четырех неколлинеарных точек *A*, *B*, *C*, *D* верно , то они лежат на одной окружности.



□ Равенство можно записать как . Ни одна из точек *B*, *C*, *D* не совпадает с *А*, так как иначе будет коллинеарность. Тогда это равносильно равенству . Получим при инверсии с центром *А* и степенью 1. Это значит, что *B*’, *C’*, *D’* должны лежать на одной прямой и центр инверсии – точка *А*. При этой инверсии прямая могла быть переведена или из прямой, или из окружности. Никакая другая кривая не могла быть прообразом этой прямой, так как, по инволютивности, эта прямая есть также прообраз этой кривой при той же самой инверсии, то есть эта кривая – окружность или прямая, третьего не дано.



Если это прямая, то она та же самая, и центр инверсии на ней. То есть все точки лежат на одной прямой. Противоречие условию теоремы. Значит, это была не прямая, а окружность. На ней лежат точки *B*, *C*, *D*. Но раз прямая переводится в окружность, то центр инверсии, то есть точка *А*, расположен на этой окружности. ■

Из этой теоремы следует теорема Пифагора, если четырехугольник является прямоугольником.

Заключение

Необходимо сразу оговориться, что работа не может претендовать на абсолютную полноту изложения данной темы. Однако цели, поставленные в начале работы, достигнуты. Выявлены и систематизированы основные определения и факты, рассмотрены основные виды задач, решаемых с помощью преобразования инверсии.

Интересно было бы рассмотреть симметрию относительно вообще любой плоской кривой, но это уже тема для отдельного исследования.

Дипломная работа может быть полезна студентам и учителям, ведущим факультативные занятия по данной теме. Работа легко может быть преобразована в соответствующую курсовую или дипломную работу по информатике, поскольку необходимые алгоритмы решения задач уже даны, остается только реализовать их на нужном языке программирования.

Библиографический список

1. Адамар, Ж. Элементарная геометрия [Электронный ресурс]: пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. В 2 ч. Ч. 1. Планиметрия / акад. Ж. Адамар; пер. со 2 издания под ред. проф. Д. И. Перепелкина. – Изд. 3-е. – М.: Учпедгиз, 1948. – 608 с. Режим доступа: http://www.mccme.ru.
2. Александров, И. И. Сборник геометрических задач на построение [Электронный ресурс] / И. И. Александров; под ред. Н. М. Наумович. – Изд. 18-е. – М.: Учпедгиз, 1950. – 176 с. Режим доступа: http://www.mccme.ru.
3. Понарин, Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах [Текст]: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.: ил. – ISBN 5-94057-152-2.
4. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. [Электронный ресурс] / В. В. Прасолов. – На основе 4-го изд. (М.: МЦНМО, 2001) – М., 2003. – 551 с.: ил. Режим доступа: http://www.mccme.ru.
5. Яглом, И. М. Геометрические преобразования [Электронный ресурс]. В 2 ч. Ч. 2. Линейные и круговые преобразования / И. М. Яглом. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. – 612 с. – (Серия «Библиотека математического кружка»; вып. 8). Режим доступа: http://www.mccme.ru.

1. Идея этого пункта рассмотрена в [5]. [↑](#footnote-ref-1)
2. Эти свойства сформулированы в виде фактов и теорем в источниках [1], [2], [3], [4], [5]. [↑](#footnote-ref-2)
3. Условия взаимного расположения окружностей даны в источнике [3] на с.88. [↑](#footnote-ref-3)