МОУ “ООШ №16"

Доклад на тему:

“Аксиомы планиметрии”

Выполнила:

Ученица 7 класса

Аулова Евгения

Астрахань 2010

**Из истории аксиом**

Аксиоматический метод появился в Древней Греции, а сейчас применяется во всех теоретических науках, прежде всего в математике. Аксиоматический метод построения научной теории заключается в следующем: выделяются основные понятия, формулируются аксиомы теории, а все остальные утверждения выводятся логическим путём, опираясь на них. Основные понятия выделяются следующим образом. Известно, что одно понятие должно разъясняться с помощью других, которые, в свою очередь, тоже определяются с помощью каких-то известных понятий. Таким образом, мы приходим к элементарным понятиям, которые нельзя определить через другие. Эти понятия и называются основными. Когда мы доказываем утверждение, теорему, то опираемся на предпосылки, которые считаются уже доказанными. Но эти предпосылки тоже доказывались, их нужно было обосновать. В конце концов, мы приходим к недоказываемым утверждениям и принимаем их без доказательства. Эти утверждения называются аксиомами. Набор аксиом должен быть таким, чтобы, опираясь на него, можно было доказать дальнейшие утверждения. Выделив основные понятия и сформулировав аксиомы, далее мы выводим теоремы и другие понятия логическим путём. В этом и заключается логическое строение геометрии. Аксиомы и основные понятия составляют основания планиметрии. Так как нельзя дать единое определение основных понятий для всех геометрий, то основные понятия геометрии следует определить как объекты любой природы, удовлетворяющие аксиомам этой геометрии. Таким образом, при аксиоматическом построении геометрической системы мы исходим из некоторой системы аксиом, или аксиоматики. В этих аксиомах описываются свойства основных понятий геометрической системы, и мы можем представить основные понятия в виде объектов любой природы, которые обладают свойствами, указанными в аксиомах. После формулировки и доказательства первых геометрических утверждений становится возможным доказывать одни утверждения (теоремы) с помощью других. Доказательства многих теорем приписываются Пифагору и Демокриту. Гиппократу Хиосскому приписывается составление первого систематического курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс и его последующие обработки назывались "Элементы". Потом, в III в. до н.э., в Александрии появилась книга Евклида с тем же названием, в русском переводе "Начала". От латинского названия "Начал" произошёл термин "элементарная геометрия". Несмотря на то, что сочинения предшественников Евклида до нас не дошли, мы можем составить некоторое мнение об этих сочинениях по "Началам" Евклида. В "Началах" имеются разделы, логически весьма мало связанные с другими разделами. Появление их объясняется только тем, что они внесены по традиции и копируют "Начала" предшественников Евклида. "Начала" Евклида состоят из 13 книг. 1 - 6 книги посвящены планиметрии, 7 - 10 книги - об арифметике и несоизмеримых величинах, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Книги с 11 по 13 были посвящены стереометрии. "Начала" начинаются с изложения 23 определений и 10 аксиом. Первые пять аксиом - "общие понятия", остальные называются "постулатами". Первые два постулата определяют действия с помощью идеальной линейки, третий - с помощью идеального циркуля. Четвёртый, "все прямые углы равны между собой", является излишним, так как его можно вывести из остальных аксиом. Последний, пятый постулат гласил: "Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то, при неограниченном продолжении этих двух прямых, они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых". Пять "общих понятий" Евклида являются принципами измерения длин, углов, площадей, объёмов: "равные одному и тому же равны между собой", "если к равным прибавить равные, суммы равны между собой", "если от равных отнять равные, остатки равны между собой", "совмещающиеся друг с другом равны между собой", "целое больше части". Далее началась критика геометрии Евклида. Критиковали Евклида по трём причинам: за то, что он рассматривал только такие геометрические величины, которые можно построить с помощью циркуля и линейки; за то, что он разрывал геометрию и арифметику и доказывал для целых чисел то, что уже доказал для геометрических величин, и, наконец, за аксиомы Евклида. Наиболее сильно критиковали пятый постулат, самый сложный постулат Евклида. Многие считали его лишним, и что его можно и нужно вывести из других аксиом. Другие считали, что его следует заменить более простым и наглядным, равносильным ему: "Через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую".

Критика разрыва между геометрией и арифметикой привела к расширению понятия числа до действительного числа. Споры о пятом постулате привели к тому, что в начале XIX века Н.И. Лобачевский, Я. Бойяи и К.Ф. Гаусс построили новую геометрию, в которой выполнялись все аксиомы геометрии Евклида, за исключением пятого постулата. Он был заменён противоположным утверждением: "В плоскости через точку вне прямой можно провести более одной прямой, не пересекающей данную". Эта геометрия была столь же непротиворечивой, как и геометрия Евклида. Модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости была построена французским математиком Анри Пуанкаре в 1882 г. На евклидовой плоскости проведём горизонтальную прямую. Эта прямая называется абсолютом (x). Точки евклидовой плоскости, лежащие выше абсолюта, являются точками плоскости Лобачевского. Плоскостью Лобачевского называется открытая полуплоскость, лежащая выше абсолюта. Неевклидовы отрезки в модели Пуанкаре - это дуги окружностей с центром на абсолюте или отрезки прямых, перпендикулярных абсолюту (AB, CD). Фигура на плоскости Лобачевского - фигура открытой полуплоскости, лежащей выше абсолюта (F). Неевклидово движение является композицией конечного числа инверсий с центром на абсолюте и осевых симметрий, оси которых перпендикулярны абсолюту. Два неевклидовых отрезка равны, если один из них неевклидовым движением можно перевести в другой. Таковы основные понятия аксиоматики планиметрии Лобачевского. Все аксиомы планиметрии Лобачевского непротиворечивы. Определение прямой следующее: "Неевклидова прямая - это полуокружность с концами на абсолюте или луч с началом на абсолюте и перпендикулярный абсолюту". Таким образом, утверждение аксиомы параллельности Лобачевского выполняется не только для некоторой прямой и точки A, не лежащей на этой прямой, но и для любой прямой и любой не лежащей на ней точки A. За геометрией Лобачевского возникли и другие непротиворечивые геометрии: от евклидовой отделилась проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, возникла риманова геометрия (общая теория пространств с произвольным законом измерения длин) и др. Из науки о фигурах в одном трёхмерном евклидовом пространстве геометрия за 40 - 50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чём-то сходных со своей прародительницей - геометрией Евклида.

**Аксиомы планиметрии**

Аксиомы принадлежности

* Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
* Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Аксиомы расположения

* Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
* Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Аксиомы измерения

* Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумму длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.
* Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180 градусов. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Аксиомы откладывания

* На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок, заданной длины, и только один.
* От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол заданной градусной мерой, меньшей 180 градусов, и только один.
* Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Аксиома параллельности

* Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

**Евклид**

Биография

Евклид (иначе Эвклид) – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Биографические сведения о Евклиде крайне скудны. Известно лишь, что учителями Евклида в Афинах были ученики Платона, а в правление Птолемея I (306-283 до н.э.) он преподавал в Александрийской академии.

Евклид – первый математик александрийской школы. Евклид – автор ряда работ по астрономии, оптике, музыке и др. Арабские авторы приписывают Евклиду и различные трактаты по механике, в том числе сочинения о весах и об определении удельного веса. Умер Евклид между 275 и 270 до н. э.

Начала Евклида

Основное сочинение Евклида называется Начала. Книги с таким же названием, в которых последовательно излагались все основные факты геометрии и теоретической арифметики, составлялись ранее Гиппократом Хиосским, Леонтом и Февдием. Однако Начала Евклида вытеснили все эти сочинения из обихода и в течение более чем двух тысячелетий оставались базовым учебником геометрии. Создавая свой учебник, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино. Начала состоят из тринадцати книг. Первая и некоторые другие книги предваряются списком определений. Первой книге предпослан также список постулатов и аксиом. Как правило, постулаты задают базовые построения (напр., «требуется, чтобы через любые две точки можно было провести прямую»), а аксиомы — общие правила вывода при оперировании с величинами (напр., «если две величины равны третьей, они равны между собой»). В I книге изучаются свойства треугольников и параллелограммов; эту книгу венчает знаменитая теорема Пифагора для прямоугольных треугольников. Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена так называемой «геометрической алгебре». В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников; при работе над этими книгами Евклид мог воспользоваться сочинениями Гиппократа Хиосского. В V книге вводится общая теория пропорций, построенная Евдоксом Книдским, а в VI книге она прилагается к теории подобных фигур. VII–IX книги посвящены теории чисел и восходят к пифагорейцам; автором VIII книги, возможно, был Архит Тарентский. В этих книгах рассматриваются теоремы о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (известный ныне как алгоритм Евклида), строится чётные совершенные числа, доказывается бесконечность множества простых чисел. В X книге, представляющей собой самую объёмную и сложную часть Начал, строится классификация иррациональностей; возможно, что её автором является Теэтет Афинский. XI книга содержит основы стереометрии. В XII книге с помощью метода исчерпывания доказываются теоремы об отношениях площадей кругов, а также объёмов пирамид и конусов; автором этой книги по общему признанию является Евдокс Книдский. Наконец, XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников; считается, что часть построений была разработана Теэтетом Афинским. В дошедших до нас рукописях к этим тринадцати книгам прибавлены ещё две. XIV книга принадлежит александрийцу Гипсиклу (ок. 200 г. до н.э.), а XV книга создана во время жизни Исидора Милетского, строителя храма св. Софии в Константинополе (начало VI в. н. э.). Начала предоставляют общую основу для последующих геометрических трактатов Архимеда, Аполлония и других античных авторов; доказанные в них предложения считаются общеизвестными. Комментарии к Началам в античности составляли Герон, Порфирий, Папп, Прокл, Симпликий. Сохранился комментарий Прокла к I книге, а также комментарий Паппа к X книге (в арабском переводе). От античных авторов комментаторская традиция переходит к арабам, а потом и в Средневековую Европу. В создании и развитии науки Нового времени Начала также сыграли важную идейную роль. Они оставались образцом математического трактата, строго и систематически излагающего основные положения той или иной математической науки.

Другие сочинения Евклида

Вторым после «Начал» сочинением Евклида обычно называют «Данные» — введение в геометрический анализ. Евклиду принадлежат также «Явления», посвященные элементарной сферической астрономии, «Оптика» и «Катоптрика», небольшой трактат «Сечения канона» (содержит десять задач о музыкальных интервалах), сборник задач по делению площадей фигур «О делениях» (дошел до нас в арабском переводе). Изложение во всех этих сочинениях, как и в «Началах», подчинено строгой логике, причем теоремы выводятся из точно сформулированных физических гипотез и математических постулатов. Много произведений Евклида утеряно, об их существовании в прошлом нам известно только по ссылкам в сочинениях других авторов.

Еще о Евклиде

Евклид, сын Наукрата, известный под именем «Геометра», ученый старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира». Одна из легенд рассказывает, что царь Птолемей решил изучить геометрию. Но оказалось, что сделать это не так-то просто. Тогда он призвал Евклида и попросил указать ему легкий путь к математике. «К геометрии нет царской дороги», — ответил ему ученый. Так в виде легенды дошло до нас это ставшее крылатым выражение. Царь Птолемей I, чтобы возвеличить свое государство, привлекал в страну ученых и поэтов, создав для них храм муз — Мусейон. Здесь были залы для занятий, ботанический и зоологический сады, астрономический кабинет, астрономическая башня, комнаты для уединенной работы и главное — великолепная библиотека. В числе приглашенных ученых оказался и Евклид, который основал в Александрии — столице Египта — математическую школу и написал для ее учеников свой фундаментальный труд. Именно в Александрии Евклид основывает математическую школу и пишет большой труд по геометрии, объединенный под общим названием «Начала» — главный труд своей жизни. Полагают, что он был написан около 325 года до нашей эры. Предшественники Евклида — Фалес, Пифагор, Аристотель и другие много сделали для развития геометрии. Но все это были отдельные фрагменты, а не единая логическая схема. Обычно о «Началах» Евклида говорят, что после Библии это самый популярный написанный памятник древности. Книга имеет свою, весьма примечательную историю. В течение двух тысяч лет она являлась настольной книгой школьников, использовалась как начальный курс геометрии. «Начала» пользовались исключительной популярностью, и с них было снято множество копий трудолюбивыми писцами в разных городах и странах. Позднее «Начала» с папируса перешли на пергамент, а затем на бумагу. На протяжении четырех столетий «Начала» публиковались 2500 раз: в среднем выходило ежегодно 6—7 изданий. До XX века книга «Начала» считалась основным учебником по геометрии не только для школ, но и для университетов. «Начала» Евклида были основательно изучены арабами, а позднее европейскими учеными. Они были переведены на основные мировые языки. Первые подлинники были напечатаны в 1533 году в Базеле Любопытно, что первый перевод на английский язык, относящийся к 1570 году, был сделан Генри Биллингвеем, лондонским купцом Знание основ евклидовой геометрии является ныне необходимым элементом общего образования во всем мире. В арифметике Евклид сделал три значительных открытия. Во-первых, он сформулировал (без доказательства) теорему о делении с остатком. Во-вторых, он придумал "алгоритм Евклида" - быстрый способ нахождения наибольшего общего делителя чисел или общей меры отрезков (если они соизмеримы). Наконец, Евклид первый начал изучать свойства простых чисел - и доказал, что их множество бесконечно.

**Н.И. Лобачевский**

Биография

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856), великий русский математик, создатель геометрии Лобачевского, деятель университетского образования и народного просвещения. Известный английский математик Уильям Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии». Н.И. Лобачевский родился в Нижнем Новгороде. Его родителями были Иван Максимович Лобачевский (чиновник в геодезическом департаменте) и Прасковья Александровна Лобачевская. В 1800 году после смерти отца мать вместе с семьёй переехала в Казань. Там Лобачевский окончил гимназию (1802—1807), а затем (1807—1811) и только что основанный Казанский Императорский университет, которому отдал 40 лет жизни. Большое влияние во время обучения в университете на Лобачевского оказал Мартин Фёдорович Бартельс — друг и учитель великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Он взял шефство над бедным, но одарённым студентом. На старшем курсе в характеристику Лобачевского включили «мечтательное о себе самомнение, упорство, неповиновение», а также «возмутительные поступки» и даже «признаки безбожия». Над ним нависла угроза отчисления, но заступничество Бартельса и других преподавателей помогло отвести опасность. По окончании университета Лобачевский получил степень магистра по физике и математике с отличием (1811) и был оставлен при университете. В 1814 году стал адъюнктом, спустя 2 года — экстраординарным, и в 1822 году — ординарным профессором. Студенты высоко ценили лекции Лобачевского. Круг его обязанностей был обширен — чтение лекций по математике, астрономии и физике, комплектация и приведение в порядок библиотеки и музея и т. д. В списке служебных обязанностей есть даже «наблюдение за благонадёжностью» всех учащихся Казани. В 1819 году в Казань приехал ревизор (М. Л. Магницкий), который дал крайне отрицательное заключение о состоянии дел в университете. Магницкого назначили попечителем; он уволил 9 профессоров, ввёл строгую цензуру лекций и казарменный режим. Бартельс уехал в Дерпт, а Лобачевского назначили деканом физико-математического факультета. В эти годы он пишет учебники по геометрии и алгебре; первый из них был осуждён за использование метрической системы мер, а второй вообще не был напечатан. В 1826 г. Магницкий был смещён с должности попечителя за злоупотребления. Назначается новый попечитель М. Н. Мусин-Пушкин. Лобачевский избирается ректором университета. Он с головой погружается в хозяйственные дела — реорганизация штата, строительство механических мастерских, лабораторий и обсерватории, поддержание библиотеки и минералогической коллекции, участвует в издании «Казанского Вестника» и т. п. Многое он делает собственными руками. Читает научно-популярные лекции по физике для населения. И одновременно он неустанно развивает и шлифует дело своей жизни — неевклидову геометрию. В 1832 году Лобачевский женился на Варваре Алексеевне Моисеевой. У них родилось семеро детей. 1834: вместо «Казанского вестника» начинается издание «Учёных записок Казанского университета». Лобачевский был ректором Казанского университета в период с 1827 по 1846 годы, пережив эпидемию холеры (1830) и сильнейший пожар (1842), уничтоживший половину Казани. Благодаря энергии и умелым действиям ректора жертвы и потери в обоих случаях были минимальны. Усилиями Лобачевского Казанский университет становится первоклассным, авторитетным и хорошо оснащённым учебным заведением, одним из лучших в России. 20 ноября 1845 года Лобачевский был в шестой раз утвержден в должности ректора на новое четырёхлетие. Несмотря на это, в 1846 году Министерство грубо отстраняет Лобачевского от должности ректора и профессорской кафедры (официально — по причине ухудшения здоровья). Формально он получил даже повышение — был назначен помощником попечителя, однако жалованья ему за эту работу не назначили. Вскоре Лобачевский разорён, имение его жены было продано за долги. В 1852 году умирает старший сын Лобачевского. Здоровье его самого подорвано, слабеет зрение. Главный труд учёного, «Пангеометрия» записывают под диктовку ученики слепого учёного в 1855 году. Умирая, Николай Лобачевский произнес с горечью: «И человек родился, чтобы умереть». Его не стало 12 февраля 1856 года. Похоронен на Арском кладбище в Казани.

Геометрия Лобачевского

Сохранились студенческие записи лекций Лобачевского (от 1817 года), где им делалась попытка доказать пятый постулат Евклида, но в рукописи учебника «Геометрия» (1823) он уже отказался от этой попытки. В «Обозрениях преподавания чистой математики» за 1822/23 и 1824/25 Лобачевский указал на «до сих пор непобедимую» трудность проблемы параллелизма и на необходимость принимать в геометрии в качестве исходных понятия, непосредственно приобретаемые из природы. 7 февраля 1826 года Лобачевский представил для напечатания в Записках физико-математического отделения сочинение: «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» (на французском языке). Но издание не осуществилось. Рукопись и отзывы не сохранились, однако само сочинение было включено Лобачевским в его труд «О началах геометрии» (1829—1830), напечатанный в журнале «Казанский вестник». Это сочинение стало первой в мировой литературе серьёзной публикацией по неевклидовой геометрии, или геометрии Лобачевского. Лобачевский считает аксиому параллельности Евклида произвольным ограничением. С его точки зрения, это требование слишком жёсткое, ограничивающее возможности теории, описывающей свойства пространства. В качестве альтернативы предлагает другую аксиому: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную. Разработанная Лобачевским новая геометрия не включает в себя евклидову геометрию, однако евклидова геометрия может быть из неё получена предельным переходом (при стремлении кривизны пространства к нулю). В самой геометрии Лобачевского кривизна отрицательна. Однако научные идеи Лобачевского не были поняты современниками. Его труд «О началах геометрии», представленный в 1832 году советом университета в Академию наук, получил у М.В. Остроградского отрицательную оценку. Среди коллег его почти никто не поддерживает, растут непонимание и невежественные насмешки. Венцом травли стал издевательский анонимный пасквиль, появившийся в журнале Ф. Булгарина «Сын отечества» в 1834 году:

Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьёзной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему школьному учителю? Если не учёность, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего. Но Лобачевский не сдаётся. В 1835—1838 он публикует в «Учёных записках» статьи о «воображаемой геометрии», а затем выходит наиболее полная из его работ «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Не найдя понимания на родине, он пытается найти единомышленников за рубежом. В 1840 году Лобачевский печатает на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных», где содержится чёткое изложение его основных идей. Один экземпляр получает Гаусс, «король математиков» той поры. Как много позже выяснилось, Гаусс и сам тайком развивал неевклидову геометрию, однако так и не решился опубликовать что-либо на эту тему. Ознакомившись с результатами Лобачевского, он выразил свою симпатию к идеям русского учёного косвенно: рекомендовал избрать Лобачевского иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского общества. Восторженные отзывы о Лобачевском Гаусс доверил только своим дневникам и самым близким друзьям. Это избрание состоялось в 1842 году. Однако положения Лобачевского оно не укрепило. Ему осталось работать в родном университете ещё четыре года. Лобачевский не был единственным исследователем в этой новой области математики. Венгерский математик Янош Бойяи независимо от Лобачевского в 1832 году опубликовал своё описание неевклидовой геометрии. Но и его работы остались неоценёнными современниками.

Другие математические достижения

Лобачевский получил ряд ценных результатов и в других разделах математики: так, в алгебре он разработал новый метод приближённого решения уравнений, в математическом анализе получил ряд тонких теорем о тригонометрических рядах, уточнил понятие непрерывной функции и др.

В разные годы он опубликовал несколько блестящих статей по математическому анализу, алгебре и теории вероятностей, а также по механике, физике и астрономии

**Литература**

1. Самин Д. К. 100 великих ученых

2. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. - М.: Наука, 1995.

3. Дягилев Ф.М. Из истории физики и жизни ее творцов. - М.: Наука, 1986.

4. Пидоу Д. Геометрия и искусство. - М.: Наука, 1979.

5. Смышляев В.К. О математике и математиках. - Йошкар-Ола: Наука, 1977.

6. http://nikolaevagvk.narod.ru

8. www.it-n.ru

9. http://soft.mail.ru

10. http://taina.aib.ru

11. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru

12. http://navagrudak.narod.ru