**«Инкарнация» кватернионов**

*Вводные замечания*

Кватернион, долгие годы считавшийся бесперспективным с подачи ортодоксальных математиков [1], в настоящее время начинает свое триумфальное шествие по науке (физика, химия кристаллов, информатика) и информационно-интерактивным технологиям.

Своим открытием и названием сам кватернион обязан ирландскому математику У.Р. Гамильтону (1805–1865) [2].

Уильям Роуан Гамильтон был человеком многосторонне развитым. В четырнадцать лет владел девятью языками, в 19 лет опубликовал в трудах Королевской Ирландской Академии работу, посвященную геометрической оптике, а в 23 года получил звание королевского астронома Ирландии. К 1833 г. Гамильтон занимал пост директора обсерватории в Денсинке и был известен работами по оптике и аналитической механике. Он предсказал эффект двойной конической рефракции в двуосных кристаллах.

В числе других математических задач он 10 лет безуспешно пытался найти описание поворотов трехмерного пространства на основе алгебры трехмерных чисел, пока не увидел, что их описание соответствует другой алгебре не с двумя мнимыми числами, а с тремя. Общепризнанно, что от типа алгебры, которой подчинена та или иная природная система, зависят ее геометрия, физические законы сохранения.

В одном из писем к своему сыну У.Р. Гамильтон писал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длительные годы определенно направленной мысли и труда, моего – если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k, содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о кватернионах на первом заседании сессии, который и был прочитан соответственно в Понедельник 13-го следующего месяца – ноября».

Стоит упомянуть, что оригинальное описание движения твердого тела с помощью кватерниона дал в 1873 году У. Клиффорд (1845–1879), а А.П. Котельникову (1865–1944) в 1895 году удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как «неразвернутые» формулы теории обобщенных, т.н. дуальных кватернионов [3–6]. Применительно к кинематике этот подход устанавливает соотношение между движениями тела с одной неподвижной точкой и движениями произвольного вида [7].

*Постановка проблемы*

В различных разделах математики возникает потребность рассматривать векторные пространства (над данным полем k), в которых кроме действий сложения и умножения на скаляры определено еще действие умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре векторов третий вектор того же пространства – их произведение. В этой ситуации всегда естественно предполагать, что результат умножения *λy* линеен по каждому из множителей при фиксированном втором, то есть:

,



Пространство с умножением, удовлетворяющим такому требованию билинейности, называется алгеброй над полем k.

Алгеброй кватернионов называется алгебра размерности 4 над основным полем, обладающим единицей 1 и имеющим базис 1, i, j, k со следующей таблицей умножения [1]:

x *i j k*

*i* -1 *k j*

*j – k* -1 *i*

*k – j – i* -1

Или в более удобной форме:



При этом основное поле может быть взято произвольно.

*Алгебра кватернионов над полем R*

Наиболее интересной является алгебра кватернионов над полем R вещественных чисел.

Прежде всего, установим ассоциативность алгебры кватернионов. Для этого следует проверить 27 равенств: по три возможности для каждого из 3-х множителей в равенствах типа (ab) c=а(bc), проверяемых для базисных элементов *i, j, k*.

Избежать этого можно, установив изоморфизм алгебры кватернионов над и некоторой алгебры матриц специального вида над C. Единице сопоставим единичную матрицу2-го порядка, матрицу(здесь *i* – мнимая единица, ), матрицу и матрицу .



Отсюда следуют равенства: *(проверить знак)* Они означают, что пространство матриц *Е, I, Y, K* образуют алгебру, изоморфную алгебре кватернионов.



На основании ассоциативности умножения матриц делаем заключение об ассоциативности алгебры кватернионов.

Заметим, что если за основное поле принято поле C комплексных чисел, то алгебра кватернионов над C окажется изоморфной алгебре М2(C) всех квадратных матриц 2-го порядка над C, ибо матрицы *Е, I, J, K* линейно независимы над C и их линейные комбинации заполняют всю алгебру М2(C).

*Связь алгебры кватернионов с векторами в трехмерном эвклидовом пространстве*

Пусть α = *а + вi + сj + dk* – кватернион. Число *а* называется скалярной частью кватерниона. Сумма *вi + сj + dk* называется векторной частью кватерниона α. Кватернион с нулевой скалярной частью будем называть векторами, они, естественно, изображаются как векторы трехмерного эвклидова пространства.

Пусть и – два вектора-кватерниона. Вычислим их произведение (в алгебре кватернионов):



Здесь – векторное, а (*u1, u2)* – скалярное произведение кватернионов *U1*и *U2*. Таким образом, скалярной частью кватерниона-произведения *U1U2* оказывается скалярное произведение векторов *u1*и *u2*, взятое с обратным знаком. Векторная же часть кватерниона *u1u2* равна вектору произведения векторов *u1, u2*. Тем самым операция умножения векторов как элементов алгебры кватернионов как бы объединяет оба умножения векторов – скалярное и векторное.



Далее, можно видеть, что:



Отсюда,



Из последней формулы следует известное в векторной алгебре соотношение Якоби для условных u1, u2, u3:

[u1, u2, u3] + [[u2, u3], u1] + [[u3, u1], u2] = 0.

Для этого достаточно принять во внимание связь между ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли.

*Алгебра кватернионов как алгебра с делением*

Пусть дан кватернион α = *а + вi + сj + dk* = *а + u*.

Кватернион = *а – вi – сj – dk* = *а – u*, отличающийся от α знаком векторной части, называется сопряженным с кватернионом α. Ясно, что .



Умножим кватернион α на сопряженный ему . Получим



α= *(а + u) (а – u)* = *а2 + аu – аu – u2*= *a2*+ (*u, u*) – [*u, u*] = *а2*+ (*u, u*) = *а2 + в2 + с2 + d2*.



Поэтому, если α ≠0, то α>0. Заметим еще, что α=α.



Число называется модулем (нормой) кватерниона α и обозначается через модуль . Теперь легко установить, что каждый, отличный от 0 кватернион α имеет обратный. Действительно, , так что обратным кватернионом для кватерниона α является . Таким образом, алгебра кватернионов над полем R есть алгебра с делением. Заметим, что здесь существенно было использовано то обстоятельство, что за основное поле принято поле R, заключение о неравенстве *a2 + b2 + d2*≠ 0 при α ≠0 было бы неверно, например, для поля C или для вычетов по простому модулю.



*Тождество Эйлера*

Начнем с уникально интересной теоремы.

Теорема. Модуль произведения 2-x кватернионов равен произведению модулей сомножителей.

Доказательство.

Сначала докажем, что кватернион, сопряженный с произведением 2-х кватернионов, равен произведению сопряженных кватернионов, взятых в обратном порядке.

Действительно, пусть α = *а + u*, β = *в + v*, где а, в R, *u* и *v* – вектор-кватернионы. Тогда αβ = *аb + аv + вu + vu* = *ab – (uv) + av + bu* + [*u, v*].



Далее, = *аb – ub + vu* = *аb* – (*u, v) –* *аv –* *bu* + [*v, u*] = *аb –* (*u, v) – аv –* *bu* – [*u, v*] = αβ.



Теперь имеем:

,



откуда , что и требовалось доказать.



Рассмотрим теперь тождество через компоненты кватернионов, положив



α = *а1 – b1i – c1j – d1k*, β = *а2 – в2i – с2j – d2k* так, что

αβ=a1a2+b1b2+c1c2-d1d2+(а1b2-в1a2-с1d2+d1c2) i+(а1c2+b1d2-с1a2-d1b2) j+(а1a2-в1c2+с1b2-d1a2) k.

Получим известное тождество Эйлера:

(а12+в12+с12+d12) (а22+в22+с22+d22)=(а1a2+b1b2+с1c2+d1d2)2+(а1b2-b1a2-с1d2+d1c2)2+(а1c2-b1d2-с1a2-d1b2)2+(а1d2-b1c2+с1b2-d1a2)2,

позволяющее выразить произведение двух сумм квадратов в виде суммы 4 квадратов билинейных выражений. Аналогичные тождества имеют место для сумм двух квадратов (это тождество связано с умножением комплексных чисел) и для сумм 8 квадратов. Оказывается, что аналогичных тождеств для сумм n квадратов, кроме перечисленных при n = 2,4,8 и тривиального тождества при n = 1, не существует.

*Вращение трехмерного евклидова пространства*

Пусть u, v, w – тройка попарно ортогональных векторов единичной длины, ориентированная так же, как тройка i, j, k. Тогда согласно правилу умножения векторов в алгебре кватернионов получим υ2 = v2 = ω2 = -1. Далее, υv = – vυ + [υ, v] = [υ, v] = ω. Здесь воспользуемся тем, что векторное произведение взаимоортогональных единичных векторов равно единичному вектору, ортогональному к ним обоим и направленному в соответствии с ориентацией базисных векторов i, j, k. Аналогично, vυ = -ω; vω = -ωv = υ; ωυ = -υω = ω. Таким образом, правило умножения векторов υ, v, ω является полным аналогом правила умножения векторов i, j, k. Иными словами, отображение 1→1, i→υ, j→v, k→ω задает изоморфизм алгебры кватернионов на себя, то есть, автоморфизм этой алгебры. Линейное преобразование пространства векторов, отражающих тройку i, j, k на тройку υ, v, ω, есть, очевидно, собственно ортогональное преобразование, ибо эти 2 тройки образуют ортогональные, одинаково ориентированные базисы пространства векторов.

Все автоморфизмы получаются указанным способом.

Действительно, пусть υ, v, ω – φ-образы i, j, k при некотором автоморфизме. Тогда υ2 = v2 = ω2 = -1; vυ = -υv = ω; vω = -ωv = υ и ωυ = -υω = v. Из равенства υ2 = 1 заключаем, что кватернион и есть вектор единичной длины. Действительно, пусть υ = а + υ1, где а – скалярная часть υ. Тогда -1 = υ2 = а2 + 2аυ1 - , откуда 2аυ1= 0. Если допустить, что υ1= 0, то 1 = а2, что невозможно. Поэтому υ ≠ 0, следовательно, а = о, . По той же причине кватернионы υ и v являются векторами единичной длины. Далее, из того, что скалярная часть кватерниона υv = ω равна 0, заключаем, что векторы υ и v ортогональны. По той же причине ортогональны векторы υ, ω и ω, υ, так что υ, v, ω составляют тройку попарно ортогональных единичных векторов. Ориентация этой тройки совпадает с ориентацией тройки i, j, k, ибо в противном случае было бы υv = ω, а не vυ = ω.



Пусть теперь α – некоторый кватернион единичного модуля. Отображение х→α-1хα есть автоморфизм алгебры кватернионов и, следовательно, он осуществляет некоторое собственное вращение пространства векторов. Пусть α=а+υ0, где а – скалярная часть α. Тогда , так что можно положить а = соsφ, = sinφ, 0≤φ≤. Тогда α = cosφ + υsinφ, где υ – вектор единичной длины (если α = -1, то υ0 = 0 и в качестве υ можно взять любой единичный вектор).



Пусть теперь v – какой-либо вектор единичной длины, ортогональный векторам υ, v, и пусть ω = υv. Выясним, как действует автоморфизм х→α-1хα на векторы υ, v, ω. Ясно, что векторы α и υ коллинеируют, так что α -1υα = υ.

Далее,

α-1= cosφ-υsinφ; α=cosφ+υsinφ;

α-1vα=(cosφ-υsinφ) v (cosφ+υsinφ)=(vcosφ-ωsinφ) (cosφ+υsinφ)=

=vcos2φ-ωsinφcosφ+vυsinφcosφ-ωυ2sinφ=v (cos2φ-sin2φ)-2ωsinφcosφ=vcos2φ-ωsin2φ;

α -1ωα =(ωcosφ+vsinφ) (cosφ+υsinφ)=vsin2φ+vcos2φ.

Итак, автоморфизм х→α-1хα не меняет вектор υ и поворачивает на угол 2φ плоскость, натянутую на вектора v и ω (считаем положительным направление вращения от v к ω), то есть, вращает пространство векторов вокруг оси, проходящей через вектор υ, на угол 2φ. Известно, что всякое собственное вращение трехмерного пространства есть поворот вокруг оси на некоторый угол, так что любое собственное вращение может рассматриваться как трансформация х→α-1хα пространством кватерниона с единичным модулем.

Заметим, что преобразование х→α-1хα при не дает ничего нового, если положить и при любом кватернионе х.



В любой ассоциативной алгебре с единицей обратимый элемент α порождает автоморфизм алгебры х→α-1хα, называемый внутренним автоморфизмом алгебры.

Кватернионы единичного модуля образуют группу относительно умножения. Сопоставление каждому такому кватерниону вращения х→α-1хα трехмерного пространства векторов есть гомоморфное отображение, ибо, то есть, произведению кватернионов отвечает произведение вращения. Ядро этого гомоморфизма состоит только из элементов .



Действительно, α = а + bi + сj + dk принадлежит ядру, если α-1хα = х, при любом векторе х, т.е., если хα = αх. Положив х = i, получим с = d = 0, а, положив х = j, получим

b = d = 0.

Итак, α = а =1, ибо. Тем самым получаем, что группа S0 (3) собственных вращений трехмерного пространства изоморфна фактор-группе кватернионов единичного модуля по подгруппе {1}.



Представление трехмерных вращений при помощи кватернионов очень удобно тем, что кватернион, связанный с вращением, определяет непосредственно его геометрические характеристики – ось вращений и угол поворота. При обычном задании вращения при помощи ортогональной матрицы для определения оси вращения и угла нужно произвести некоторые вычисления. Закон умножения кватернионов тоже проще закона умножения матриц 3 порядка.

Заметим еще, что группа кватернионов с единичным модулем изоморфна группе u(2) унитарных матриц 2-го порядка с определителем равным единице.

Действительно, кватерниону α = а + bi + сj + dk соответствует матрица

,



а сопряженная



– кватерниону .



Из равенства следует, что АА\*=Е, т.е. матрица произведений является унитарной.



Далее, detА = а2 + b2 + с2 + d2 = 1, если матрица †=унитарна и detА=1, то равенство А-1=А\* дает δ=, γ= – β, то есть, .



Таким образом, отображение α→А осуществляет изоморфизм группы кватернионов единичного модуля и группы вращений u(2) – группа алгебраических преобразований Лоренца.

*Кватернион как перспективный инструментарий фундаментальных физических моделей*

В данной работе лишь ставятся задачи, которые представляют интерес с точки зрения физики, а точнее, новой еще не существующей науки – «физической математики».

1. Реабилитация и развитие т.н. нестандартной математики в полном объеме, в которой аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений считается некорректным. Тоже касается теории векторов, которые имеют смысл лишь в абсолютно изотропном и прямом пространстве, отказывая в корректности и компактности в любом криволинейном пространстве даже постоянной кривизны, не говоря уже о произвольном т.н. «финдслеровом» пространстве.

2. При этом становятся актуальными не только гиперкомплексные числа [5, 6], среди которых «скомпрометированные» своей некоммутативностью кватернионы, но и забытая сегодня функция sinvers, которой было предсказано большое будущее еще нашим русским математиком П.Л. Чебышевым.

3. Из всех проблем, способных с большей или меньшей вероятностью занять место великой теоремы Ферма, наибольшие шансы имеет проблема плотнейшей упаковки шаров. Проблему плотнейшей упаковки шаров можно сформулировать как задачу о том, как наиболее экономно сложить из апельсинов пирамиду. Молодым математикам такая задача досталась в наследство от Иоганна Кеплера. Проблема родилась в 1611 году, когда Кеплер написал небольшое сочинение «О шестиугольных снежинках». Интерес Кеплера к расположению и самоорганизации частиц вещества и привел его к обсуждению другого вопроса – о плотнейшей упаковке частиц, при которой они занимают наименьший объем. Если предположить, что частицы имеют форму шаров, то ясно, что как бы они ни располагались в пространстве, между ними неизбежно останутся зазоры, и вопрос состоит в том, чтобы объем зазоров свести к минимуму. В работе [8], например, утверждается (но не доказывается), что такой формой является тетраэдр, оси координат внутри которого определяют базисный угол ортогональности в 109о28’, а не 90о. Эта проблема имеет огромное значение для физики элементарных частиц, кристаллографии и других разделов естествознания. На рис. 1 приведена иллюстрация наиболее «экономной» упаковки разных и одинаковых частиц в классическом трехмерном пространстве (рис. 1а), в которой координатное пространство имеет четыре, а не три орта, представляющие прекрасную задачу для гипергеометрических чисел от кватернионов до октав (бикватернионов) и более [5, 6]. Хотя кватернион и описывает «ориентацию» объекта в пространстве и «вращение», но принято считать, что это вращение ограниченно именно лишь ±180°. В то же время упаковка типа тетраэдра может быть названа группой лишь в рамках 6-осевых поворотов, и «плоскоугольная» проекция ортогональности между всеми базисными орт-векторами равна не 90°, а «волшебные» 109°28’ (рис. 1б) подобно осям молекулы СН4 (рис. 1в).

4. Рецепт Дирака создания Новой Физики: «Прежде всего, – говорил Дирак, – нужно отбросить все так называемые «физические представления», ибо они – не что иное, как термин для обозначения устаревших предрассудков предшествующих поколений».

Начинать, по его словам, следует с красивой математической теории. «Если она действительно красива, – считал Дирак, – то она обязательно окажется прекрасной моделью важных физических явлений. Вот и нужно искать эти явления, развивать приложения красивой математической теории и интерпретировать их как предсказания новых законов физики», – так строится, по словам Дирака, вся новая физика, и релятивистская, и квантовая.

Еще менее известно, по мнению Арнольда, что релятивистские электронные уравнения Дирака имеют корни в виде кос – древней математической теории. Он заметил, исходя из топологии семейства эллиптических кривых в алгебраической геометрии, что в группе сферических кос из четырех нитей существует элемент второго порядка, и интерпретировал это свое открытие в виде теории спина электрона, имеющего 2 значения. Это означает, что для того, чтобы частица вернулась в прежнее положение, ей нужно повернуться не на 3600, а на 720.

Это было никому не понятно, и поэтому ему не верили. Чтобы убедить физиков в справедливости соответствующей странной математической теоремы, утверждающей, что фундаментальная группа SO(3) вращений трехмерного пространства состоит из двух элементов, Дирак продемонстрировал соответствующий эксперимент, изготовив физически свою сферическую косу второго порядка. Почему коса? Берутся две концентрические сферы и соединяются четырьмя переплетенными нитями. Не шестью, как если бы хоть одно соединение было осевым и отвечало бы евклидовой (а, точнее, галилевой) симметрии, а четырьмя. Еще одну внутреннюю концентрическую сферу также соединяют четырьмя переплетенными нитями, скрученными между собой (это называют «сферической косой»). Теперь, если убрать среднюю сферу, самая большая сфера окажется связана с самой маленькой незапутанными нитями. Получается тривиальная коса. Но ни Дирак, ни Арнольд не обращают внимания на то, что здесь и появляется радиально-сферическая система координат с ортогональностью не 900 или поворотом-фракталом 3600, а все те же «кристаллические 109°28’.

«Между прочим, сейчас ни физики, ни математики этого уже не знают. Может, один я прочитал у Дирака, как это делается и как он это придумал. А в спин физики верят, потому что провозглашено там, дают за это нобелевские премии, значит, что уже это всем известно, что это знаменитая, великая вещь. И все верят, просто потому, что это провозглашено, что это так. Ну так вот. На самом деле, это открытие Дирака – теория спина – было основано на эксперименте, доказавшем математическую теорему». – Это цитата В.И. Арнольда.

5. Кватернион и попытка описать античастицы в микрофизике. Возможно, этому поможет то, что инверсным единичному кватерниону, является его сопряженный.

6. Исследование возможности использования кватернион-представлений в группах вращательных симметрий S0 (m, n) собственных вращений n-мерного пространства, например, групп S0 (1,4) и S0 (2,3) де Ситтера (de Sitter) [8], постулирующих неустранимую кривизну и фундаментальную приоритетность вращательных движений при описании любых физических объектов и объяснении известных физических явлений [8–10]. Это удобно, т. к. можно циклически получать кватернион из матрицы и обратно матрицу из кватерниона. В этом случае мы получим интегрирование вращения без использования тригонометрических функций или квадратных корней. Крайне интересным обстоятельством является то, что в работе [7] автор формулирует четыре своеобразные аксиомы, из которых следует, что первые три из них обосновывают специальную теорию относительности, а при отказе от четвертой – Пуанкаре-инвариантности, мы получаем кватернионное описание пространства-времени. Но в [6] перспективные результаты получены именно при аналогичном отказе от фундаментальности 10-параметрической группы Пуанкаре. Поэтому аппарат кватернионов может быть использован для описания метрики Г. Минковского (1864–1909), инвариантной относительно преобразования Х. Лоренца (1853–1928). Особенно перспективно, на взгляд автора, использование целочисленных алгебр Галуа, диофантовых уравнений и кватернионов в физическом моделировании космо- и микромира [6, 8].

**Литература**

1. Мантуров О.В. и др. Толковый словарь математических терминов / под ред. проф. В.А. Диткина. М.: «Просвещение». – 1965. – 539 с.
2. Hamilton W.R. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. Philos. Mag., 1844, v. 25. – P.10–13.
3. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. Котельников А.П. Теория винтов и комплексные числа. Сб. Некоторые приложения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1950.
4. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. М., Наука, Гл. ред. физ-мат лит., 1978.
5. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. – 144 с.
6. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М.: Наука, 1986. – 120 с.
7. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и динамика движения. М.: ФИЗМАТГИЗ. 2006. – 289 c.
8. Мирмович Э.Г., Усачёва Т.В. Алгебра кватернионов и вращения в трехмерном пространстве // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты №1, 2009. – С. 75–80.
9. Мирмович Э.Г., Лев Ф.М. Некоторые аспекты Де-Ситтер-инвариантной динамики / Деп. в ВИНИТИ №6099–84. 06.09.84 г. Хабаровск: СВ КНИИ ДВНЦ АН СССР. 1984. – 33 с. (Lev F.M. and Mirmovich E.G., VINITI No 6099 Dep.; Lev F.M. A possible mechanism of gravity Artwork Conversion Software Inc., 1201 Morningside Drive, Manhattan Beach, CA 90266, USA. arXiv:hep-th/0307087 v1 9 Jul 2003).
10. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. №1. 2004. – С. 112–122 (www.hypercomplex.ru).
11. Чуб В.Ф. Уравнения инерциальной навигации и кватернионная теория пространства-времени // Там же. №1 (7). 2007. – С. 133–140.
12. Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника. 1989. – 211 c.
13. Кассандров В.В. Алгебродинамика: кватернионный код Вселенной. В сб.: Метафизика. Век ХХI / Ред. Ю.С. Владимиров. М.: Лаборатория знаний. БИНОМ. 2006. – С. 142.