**Математическое моделирование волнового движения воды в узком глубоком непризматическом водохранилище с учетом упругости воды**

Асп. Музаев Н.И.

Кафедра математики.

Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет

Составлена математическая модель волнового движения воды в узком глубоком непризматическом водохранилище с учетом упругости воды. Модель представляет начально-краевую задачу математической физики для потенциала средней по ширине векторной скорости. В основном дифференциальном уравнении начально-краевой задачи в качестве переменных коэффициентов содержится ширина водохранилища, зависящая от продольной и вертикальной координат. Составленная математическая модель позволяет решить широкий класс прикладных задач, связанных с теорией колебаний и волн в узких глубоких непризматических водохранилищах.

Предположим, что в прямоугольной системе координат xoyz часть пространства, ограниченная условиями 0 ≤ x ≤ l, – 1/2 B(x, z) ≤ y ≤ 1/2 B(x, z), –H ≤ z ≤ 0, представляет узкое глубокое непризматическое водохранилище. Ось oz направлена вертикально вверх, ось ox направлена в продольном, а ось oy – в поперечном направлении водохранилища. L – длина, B(x,z) – ширина, H – глубина водохранилища. Как правило, в горных условиях водохранилища строятся в узких глубоких каньонах ущелий рек. В связи с этим в дальнейшем будем считать, что ширина водохранилища B(x, z) намного меньше, чем ее длина. Кроме этого будем считать, что градиенты в поперечном направлении поля скоростей и гидродинамического давления намного меньше, чем градиенты в продольном и вертикальном направлении водохранилища. Ширина схематизированного водохранилища зависит от продольной и вертикальной координат B = B(x, z), т.е. рассматривается водохранилище с непризматической конфигурацией как в продольном, так и в вертикальном направлении. Для таких водохранилищ решение пространственной задачи волнового движения воды связано с большими математическими трудностями и в мире никем не решена.

В связи с этим трехмерные дифференциальные уравнения гидродинамики интегрально усредняют по площади живого сечения воды, в результате получают одномерные дифференциальные уравнения движения воды в естественных водоемах. В связи с тем, что водохранилища в горных местностях являются глубокими и узкими, то, в отличие от теоретической гидравлики, трехмерные уравнения гидродинамики мы интегрально усредняем только по поперечной координате y, а вертикальную координату оставляем без изменений.

В гидродинамике волнового движения жидкости дифференциальные уравнения используют в «отфильтрованном» виде, т.е. пренебрегают нелинейные члены как малые величины по сравнению с линейными членами. В проекциях на оси x, y и z эта система в «отфильтрованном» виде запишется так [1-3]:

; ; ; (1)



,



где приняты следующие обозначения: Vx , Vy и Vz – скорости в продольном, поперечном и вертикальном направлениях соответственно, зависящие от всех пространственных координат и времени t ; ρ – плотность; P – гидродинамическое давление; a – скорость звука в воде.

Усредним интегрально систему дифференциальных уравнений (1) по поперечной координате y.

; ;



. (2)



.



Обратимся к известной формуле дифференцирования под знаком интеграла:

. (3)



Интегралы, входящие в выражения (2), преобразуются так:

;



. (4)



В результате такого усреднения система~(2) запишется следующим образом:

; (5)



; (6)



, (7)



где приняты обозначения:

,



,



. (8)



Величины Ux , Uz и P представляют собой средние значения по ширине водохранилища соответственно Ux , Uz и P; q(x,z,t) – интенсивность боковой приточности, определяющаяся выражением:

(9)



Систему (5,6) в векторной форме можно записать так:

, (10)



, (11)



где .



Считая, что движение воды безвихревое, т.е. rot = 0, и вводя потенциал средней по ширине скорости



, (12)



из выражения (10) получаем интеграл Коши в линейном приближении:

. (13)



Компоненты средней скорости через потенциал скорости Φ(x, z, t) выражаются так:

, . (14)



В связи с тем, что потенциал скорости волнового движения жидкости определяется с точностью до произвольной функции, зависящей только от времени t, произвольную функцию f(t) можно считать тождественно равной нулю. На свободной волновой поверхности должно быть задано гидродинамическое давление . При отсутствии внешнего давления .



Обозначив уравнения волновой поверхности через z = η(x, t), выражение (13) запишется так:

. (15)



Линеаризуя выражение (15), получаем:

. (16)



В линейном приближении очевидно равенство:

. (17)



Дифференцируя выражение (16) по t и подставляя в него (17), получаем:

. (18)



Из выражения (13) при f(t) = 0 для давления получается следующая его зависимость от потенциала скорости:

. (19)



Подставив выражения (14) и (19) в (11), получим следующее дифференциальное уравнение для потенциала скорости:

. (20)



Как известно, в классической теории двумерного волнового движения упругой жидкости, для потенциала скорости имеется следующее уравнение [1,3]:

. (21)



Сравнивая уравнения (20) и (21), легко заметить, что в полученном в данной работе уравнении дополнительно содержатся три слагаемых. Последние две слагаемые в левой части учитывают непризматическое очертание водохранилища как в плане, так и по глубине. Величина q(x, z, t) представляет интенсивность вытеснения воды обвально-оползневым массивом либо интенсивность вторжения селелавинообразного потока в водохранилище.

Отметим, что в статье [4] получено дифференциальное уравнение для потенциала волнового движения несжимаемой жидкости в непризматическом водохранилище. В данной работе теория представляется более общей в связи с тем, что в ней учтена упругость воды, т.е. первое слагаемое уравнения(20).

**Список литературы**

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.

2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.

4. Музаев И. Д., Созанов В. Г. К теории поверхностных гравитационных волн Коши – Пуассона в узких глубоких непризматических водоемах// Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. ест. науки. Ростов-на Дону. 1995. № 3.