**Математические модели в экономике и программировании**

1. Детерминированные и вероятностные математические модели в экономике. Преимущества и недостатки

Методы исследования экономических процессов базируются на использовании математических — детерминированных и вероятностных — моделей, представляющих изучаемый процесс, систему или вид деятельности. Такие модели дают количественную характеристику проблемы и служат основой для принятия управленческого решения при поисках оптимального варианта. Насколько обоснованы эти решения, являются ли они лучшими из возможных, учтены ли и взвешены все факторы, определяющие оптимальное решение, каков критерий, позволяющий определить, что данное решение действительно наилучшее, — таков круг вопросов, имеющих большое значение для руководителей производства, и ответ на которые можно найти с помощью методов исследования операций [Чесноков С. В. Детерминационный анализ социально-экономических данных. — М.: Наука, 1982, стр. 45].

Одним из принципов формирования системы управления является метод кибернетических (математических) моделей. Математическое моделирование занимает промежуточное положение между экспериментом и теорией: нет необходимости строить реальную физическую модель системы, ее заменит математическая модель. Особенность формирования системы управления заключается в вероятностном, статистическом подходе к процессам управления. В кибернетике принято, что любой процесс управления подвержен случайным, возмущающим воздействиям. Так, на производственный процесс оказывают влияния большое количество факторов, учесть которые детерминированным образом невозможно. Поэтому считается, что на производственный процесс воздействуют случайные сигналы. В силу этого планирование работы предприятия может быть только вероятностным.

По этим причинам часто, говоря о математическом моделировании экономических процессов, имеют в виду именно вероятностные модели.

Опишем каждый из типов математических моделей.

Детерминированные математические модели характеризуются тем, что описывают связь некоторых факторов с результативным показателем как функциональную зависимость, т. е. в детерминированных моделях результативный показатель модели представлен в виде произведения, частного, алгебраической суммы факторов, или в виде любой другой функции. Данный вид математических моделей наиболее распространен, поскольку, будучи достаточно простыми в применении (по сравнению вероятностными моделями), позволяет осознать логику действия основных факторов развития экономического процесса, количественно оценить их влияние, понять, какие факторы и в какой пропорции возможно и целесообразно изменить для повышения эффективности производства.

Вероятностные математические модели принципиально отличаются от детерминированных тем, что в вероятностных моделях взаимосвязь между факторами и результирующим признаком вероятностная (стохастическая): при функциональной зависимости (детерминированные модели) одному и тому же состоянию факторов соответствует единственное состояние результирующего признака, тогда как в вероятностных моделях одному и тому же состоянию факторов соответствует целое множество состояний результирующего признака [Толстова Ю. Н. Логика математического анализа экономических процессов. — М.: Наука, 2001, с. 32-33].

Преимущество детерминированных моделей в простоте их применения. Основной недостаток — низкая адекватность реальной действительности, т. к., как было отмечено выше, большинство экономических процессов носит вероятностный характер.

Достоинством вероятностных моделей является то, что они, как правило, больше соответствуют реальной действительности (более адекватны), чем детерминированные. Однако, недостатком вероятностных моделей является сложность и трудоемкость их применения, так что во многих ситуациях достаточно бывает ограничиться детерминированными моделями.

2. Постановка задачи линейного программирования на примере задачи о пищевом рационе

Впервые постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок; позволяющего минимизировать суммарной километраж, была дана в работе советского экономиста А. Н. Толстого в 1930 году.

Систематические исследования задач линейного программирования и разработка общих методов их решения получили дальнейшее развитие в работах российских математиков Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова и других математиков и экономистов. Также методам линейного программирования посвящено много работ зарубежных и, прежде всего, американских ученых.

Задача линейного программирования состоит в максимизации (минимизации) линейной функции.

, где



при ограничениях

(\*)



причем все



Замечание. Неравенства могут быть и противоположного смысла. Умножением соответствующих неравенств на (-1) можно всегда получить систему вида (\*).

Если число переменных системы ограничений и целевой функции в математической модели задачи равно 2, то её можно решить графически.

Итак, надо максимизировать функцию к удовлетворяющей системе ограничений.



Обратимся к одному из неравенств системы ограничений.



С геометрической точки зрения все точки, удовлетворяющие этому неравенству, должны либо лежать на прямой , либо принадлежать одной из полуплоскостей, на которые разбивается плоскость этой прямой. Для того чтобы выяснить это, надо проверить какая из них содержит точку ().



Замечание 2. Если , то проще взять точку (0;0).



Условия неотрицательности также определяют полуплоскости соответственно с пограничными прямыми . Будем считать, что система неравенств совместна, тогда полуплоскости, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты которых являются решением данной системы — это множество допустимых решений. Совокупность этих точек (решений) называется многоугольником решений. Он может быть точкой, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью. Таким образом, задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху (снизу). При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим прямую (где h — некоторая постоянная). Чаще всего берется прямая . Остается выяснить направление движения данной прямой. Это направление определяется градиентом (антиградиентом) целевой функции.



Вектор в каждой точке перпендикулярен прямой , поэтому значение f будет возрастать при перемещении прямой в направлении градиента (убывать в направлении антиградиента). Для этого параллельно прямой проводим прямые, смещаясь в направлении градиента (антиградиента).



Эти построения будем продолжать до тех пор, пока прямая не пройдет через последнюю вершину многоугольника решений. Эта точка определяет оптимальное значение.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования геометрическим методом включает следующие этапы:

Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

Находят многоугольник решений.

Строят вектор .



Строят прямую .



Строят параллельные прямые в направлении градиента или антиградиента, в результате чего находят точку, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху (снизу) функции на допустимом множестве.



Определяют координаты точки максимума (минимума) функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Задача о рациональном питании (задача о пищевом рационе)

Постановка задачи

Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: П1, П2, П3, П4; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно С1, С2, С3, С4. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков — не менее b1 единиц; углеводов — не менее b2 единиц; жиров — не менее b3 единиц. Для продуктов П1, П2, П3, П4 содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице, где aij (i=1,2,3,4; j=1,2,3) — какие-то определённые числа; первый индекс указывает номер продукта, второй — номер элемента (белки, углеводы, жиры).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| продукт | элементы | | |
| белки | углеводы | жиры |
| П1  П2  П3  П4 | A11  A21  A31  A41 | A12  A22  A32  A42 | A13  A23  A33  A43 |

Требуется составить такой пищевой рацион (т. е. назначить количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

Математическая модель

Обозначим x1, x2, x3, x4 количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в рацион. Показатель эффективности, который требуется минимизировать, — стоимость рациона (обозначим её L): она линейно зависит от элементов решения x1, x2, x3, x4.

Целевая функция:



Система ограничений:

a11x1+a21x2+a31x3+a41x4 больше или равно b1

a12x1+a22x2+a32x3+a42x4 больше или равно b2

a13x1+a23x2+a32x3+a43x4 больше или равно b3

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения x1, x2, x3, x4.

Таким образом, поставленная задача сводится к следующему: найти такие неотрицательные значения переменных x1, x2, x3, x4, чтобы они удовлетворяли ограничениям — неравенствам и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:



**Список литературы**

Гончаров В. В. Важнейшие понятия и концепции в современном управлении. — М.: МНИИПУ, 2002, 341 с.

История экономических учений. // Под ред. Н. А. Хохлова. — СПб: Питер, 2002, 324 с.

Казаков А. П., Минаев Н. В. Экономика. Курс лекций. Упражнения. Тесты и тренинги. — М.: Изд-во ЦИПКК АП, 1999, 359 с.

Макроэкономика. Учебное пособие. // Под ред. А. М. Бункина. — М.: Инфра-М, 1995, 337 с.

Нуриев, Розанова. Поведение потребителя в рыночной экономике. // Вопросы экономики, 2003, № 1, с. 4-9.

Социально-экономическая статистика. // Под ред. Г. Л. Громыко. — М.: Изд-во МГУ, 1999, 350 с.

Толстова Ю. Н. Логика математического анализа экономических процессов. — М.: Наука, 2001, 160 с.

Ховард К., Эриашвили Н. Д., Никитин А. М. Экономическая теория. — М, 2000, 564 с.

Чесноков С. В. Детерминационный анализ социально-экономических данных. — М.: Наука, 1982, 259 с.