Московский Государственный педагогический Университет

им. В.И.Ленина

Комплексные числа в планиметрии

(Курсовая работа)

Подготовила: студентка III курса

Маематического факультета

Ильичёва Мария В.

Научный руководитель: доцент

Иванов Иван И.

Москва, 2000

Содержание

Введение……………………………………………………………………….3

1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Длина отрезка…….4

2. Параллельность и перпендикулярность. Коллинеарность трех точек……8

3. Углы и площади. Критерий принадлежности четырех точек одной окружности…………………………………………………………………..14

4. Подобные и равные треугольники. Правильный треугольник…………...18

5. Прямая и окружность на плоскости комплексных чисел…………………22

6. Две прямые. Расстояние от точки до прямой………………………………24

Заключение…………………………………………………………………...30

Список использованной литературы……………………………..………....31

**Введение**

Большое значение комплексных чисел в математике и ее приложениях широко известно. Особенно часто применяются функции комплексного переменного. Их изучение имеет самостоятельный интерес.Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать в элементарной геометрии, тригонометрии, теории геометрических преобразований, а также в электротехнике и различных задачах с механическим и физическим со­держанием.

Метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи по готовым формулам прямым вычислением, элементарными выкладками. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условиями задачии ее тре­бованием. В этом состоит необычайная простота этого метода по сравнению с координатным,векторным и другими методами, требующими от решающе­го порой немалой сообразительности, длительных поисков, хотя готовое ре­шение может быть очень коротким.

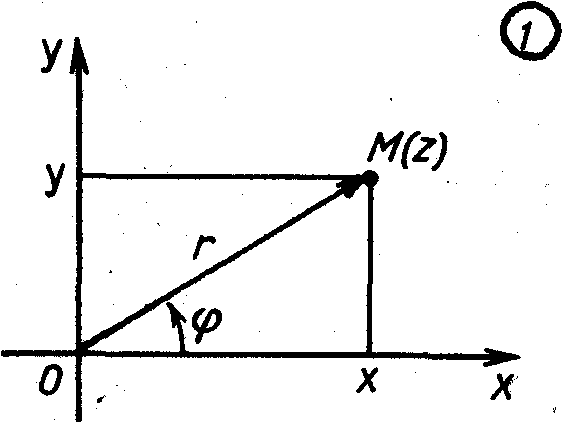
В данной работе излагаются основы метода комплексных чисел в при­менении к задачам элементарной геометриина плоскости и доказательству некоторых основных планиметрических теорем.

Конечно, одна работа не может вместить все существующие теоремы и задачи. Здесь будут рассмотрены лишь некоторые темы, по каждой из которых будет решен ряд задач, наиболее наглядно показывающих простоту этого метода.

**Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Длина отрезка**

При заданной прямоугольной декартовой системе координат на плоскос­ти комплексному числу *z = x+iy (i2= -1)* можно взаимно однозначно по­ставить в соответствие точку *М* плоскости с координатами *х, у* (рис.1):

.



Число *z* тогда называют *комплексной координатой* точки *М.*

Поскольку множество точек евклидовой плоскости находитсяво взаим­но однозначном соответствии с множеством комплексных чисел, то эту плос­кость называют также *плоскостью комплексных чисел.* Начало *О* декартовой системы координат называют при этом *начальной*или *нулевой точкой* пло­скости комплексных чисел.

При *у=0* число *z* действительное. Действительные числа изображаются точками оси *х,* поэтому она называется действительной осью. При *х=0* число *z* чисто мнимое: *z=iy.* Мнимые числа изображаются точками оси *у,* поэтому она называется *мнимой осью.* Нуль - одновременно действительное и чисто мнимое число.

Paccтoяниe от начала *О* плоскости до точки *М(z)* называется *модулем* комплексного числа *z* и обозначает­ся *|z|* или *r*:

|z| = r = |OM| = .

Если  — ориентированный угол, образованный вектором с осью х, то по определению функции синуса и косинуса

**

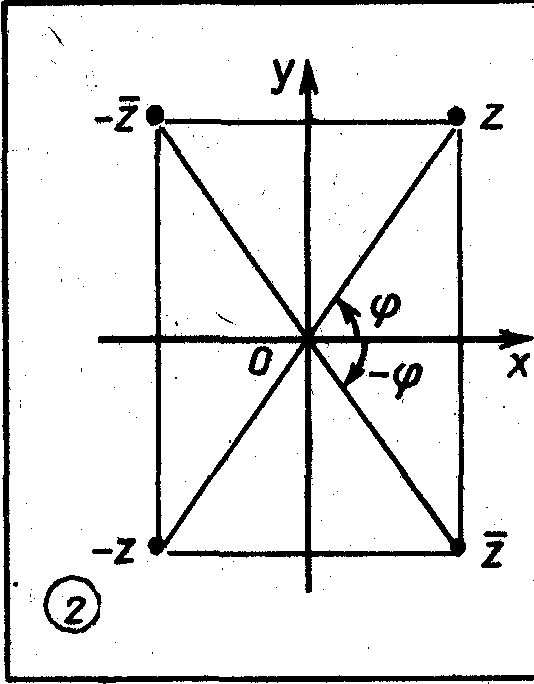
откуда и поэтому *.*

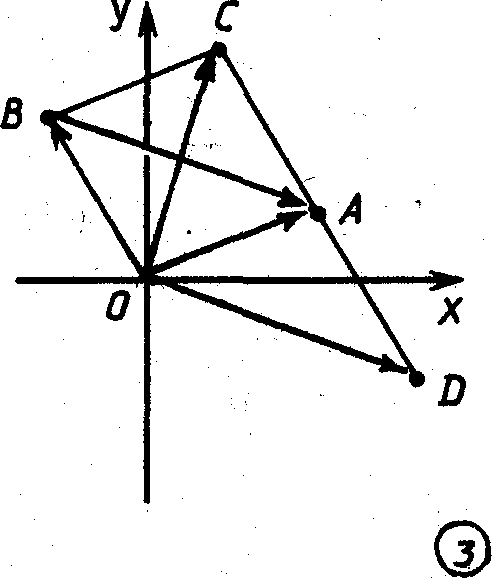
Такое представление комплексного числа z называется его *тригонометри­ческой формой.* Исходное представление *z=x+iy* называют *алгебраичес­кой формой* этого числа. При тригонометрическом представлении угол  называют *аргументом* комплексного числа и обозначают еще через *arg z:*

*.*

Если дано комплексное число *z=x+iy,* то число  называется *комплексно-сопряженным* (или просто *сопряженным)* этому числу *z*. Тогда, очевидно, и число *z* сопряжено числу . Точки *М(z)* и  симметричны относительно оси *х* (рис.2).

Из равенства следует y=0 и обратно. Это значит, что *число, рав­ное своему сопряженному, является действительным и обратно.*





Точки с комплексными координатами *z* и *-z* симметричны относитель­но начальной точки *О*. Точки с комплексными координатами *z* и  сим­метричны относительно оси *у.* Из равенства *z=* вытекает *x=0* и об­ратно. Поэтому условие *z=* является критерием чисто мнимого числа.

Для любого числа *z*, очевидно, |*z| = || = |-z| = ||.*

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами: *.*

Число, сопряженное с суммой, произведением или же частным комплекс­ных чисел, есть соответственно сумма, произведение или же частное чисел, сопряженных данным комплексным числам:



Эти равенства можно легко проверить, пользуясь формулами для опе­раций над комплексными числами.

Каждой точке *М(z)* плоскости - взаимно однозначно соответствует век­тор *.* Поэтому комплексные числа можно интерпретировать векторами, приложенными к точке *O*. Сложению и вычитанию комплексных чисел отвечает сложение и вычитание соответствующих им векторов. Именно если *а* и *b* - комплексные координаты точек *A* и *В* соответственно, то число *с=а+b* является координатой точки С, такой, что (рис.3). Комплексному числу *d=a-b* соответствует такая точка *D,* что *.*

Расстояние между точками *А* и *В* равно :

*|АВ| = |а-b|.* (1)

Так как *|z|2= z,* то

*|AB|2=(a-b)().* (2)

Уравнение *z= r2* определяет окружность с центром *О* радиуса r. Отношение , в котором точка *С* делит данный отрезок *АВ,* выражается через комплексные координаты этих точек так:



откуда  (3)

Если положить  и , то

 (4)

Условия (4) необходимы и достаточны для того, чтобы точки *А, В, С* были коллинеарны.

При точка *С* является серединой отрезка *AB*, и обратно.

Тогда:

*c = .* (4a)

Пусть имеем параллелограмм *ABCD.* Его центр имеет комплексную координату ** *= * при условии, что точки *А, В, С, D* имеют соответственно комплексные координаты *а, b, с, d.* Если не исключать случай вырождения параллелограмма, когда все его вершины оказываются на одной прямой, то равенство

*a+c = b+d* (5)

является необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехуголь­ник *ABCD* был параллелограммом.

*Задача 1.* Точки *М* и *N —* середины диагоналей *АС* и *BD* четырех­угольника *ABCD.* (*Рис.1*)

Доказать, что *|AB|2+|BC|2+|CD|2+|DA|2 = |AC|2+|BD|2+4|MN|2.*

**Решение.** Пусть точкам *A*, *В, С, D, М, N* соответствуют комплексные числа а, *b, с, d, т, п.*

Так как m =  и n = , то

|AB|2+|BC|2+|CD|2+|DA|2 



|AC|2+|BD|2+4|MN|2 

.

Равенство доказано.

*Задача 2.* Доказать, что если в плоскости параллелограмма *ABCD* существует такая точка *М,* что *|MA|2+|MC|2=|MB|2+|MD|2,* тo  *ABCD -* прямоугольник. (*Рис.2*)

**Решение.** Если за начальную точку принять центр параллелограм­ма *ABCD,* то при принятых ранее обозначениях *с= -a, d= -b,* и поэтому данное в условии равенство будет эквивалентно равенству *,* которое означает, что диагонали параллелограмма равны, т. е. он прямоугольник.

*Задача 3.* Доказать, что сумма квадратов диагоналей *AC, BD* четырехугольника *ABCD* равна удвоенной сумме квадратов отрезков *MN, PQ,* соединяющих середины противополож­ных сторон . (*Рис.3*)

C

B B C

*M(O)*

N M MЬ

*A D A D*

*Рис. 1 Рис. 2*

**Решение.** Требуется доказать: 

Запишем левую часть равенства в комплексной форме: . Воспользовавшись (4a), находим комплексное равенство правой части и непосредственным подсчетом убеждаемся, что она равна левой.

*B*

*P*

*C*

*M*

*N*

*A*

*Q D*

*Рис. 3*

*Задача 4.* Доказать, что сумма квадратов медиан *BM, AN, CP* треугольника *ABC* равна  суммы квадратов его сторон. (*Рис.4*)

**Решение.** Требуется доказать:  Запишем левую часть, воспользовавшись формулами (2) и (4а), и убедимся в том, что она равна правой.

*Задача 5.* Доказать, что расстояние от вершины *С* треугольника *АВС* до точки *D,* симметричной центру описанной окружности относительно прямой *АВ,* вычисляется по формуле *|CD|2=R2+|AC|2+|BC|2-|AB|2,* где *R -*радиус описанной окружности. (*Рис.5*)

**Решение.** Точка *M* является серединой *АВ,* так как центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров.

Точка *М* - середина *ОD* (по условию).

Тогда, . Воспользуемся этим равенством, формулами (2) и (4а) и убедимся в справедливости *|CD|2=R2+|AC|2+|BC|2-|AB|2.*

B B

D

M

O

N

P

A

C

A M C

*Рис. 4 Рис. 5*

Параллельность и перпендикулярность. Коллинеарность трех точек

**ОПР:** Пусть на плоскости комплексных чисел даны точки А(а) и B(b). Векторы  и сонаправлены тогда и только тогда, когда *arg a = arg b*, т. е. при *arg а - arg b=arg=0* (при вычитании комплексных чисел, из аргумента делимого вычитается аргумент делителя!).

Очевидно также, что эти векторы направлены противоположно в том и только в том случае, если *arg a - arg b=arg.*

Комплексные числа с аргументами 0, , являются действительными. **ТЕОРЕМА** **(Критерий коллинеарности точек О, А, В):** Для того чтобы точки *А(а) и В(b)* были коллинеарны с начальной точкой *О*, необходимо и достаточно, чтобы частное  было действительным числом, т. е.

 или  (6)

Действительно, так как в этом случае число  действительное *(k=),* то кри­терий (6) эквивалентен такому:

. (7)

Возьмем теперь точки A(а), B(b), C(c), D(d)*.*

**ОПР**: Векторы  и  колли­неарны тогда и только тогда, когда точки, определяемые комплексными числами *а—b* и *с—d,* коллинеарны с началом О.

Замечание:

1. На основании (6) имеем:

; (8)

2. Если точки *А, В, С, D* принадлежат единичной окружности =l,то

, и поэтому условие (8) принимает вид:

 ; (9)

3. Коллинеарность точек *A, В, С* характеризуется коллинеарностью век­торов  и *.* Используя (8), получаем:

*.* (10)

Это критерий принадлежности точек *A, B, С* одной прямой. Его можно представить в симметричном виде

 (11)

Если точки *A* и *B* принадлежат единичной окружности =l, то **, и поэтому каждое из соотношений (10) и (11) преобразуется (после сокращения на *(а-b)* в такое:

 (12)

Точки *А* и *В* фиксируем, а точку *С* будем считать переменной, переобозна­чив ее координату через *z*. Тогда каждое из полученных соотношений (10), (11), (12) будет уравнением прямой *АВ:*

*,* (10а)

*.* (12a)

В частности, прямая *ОА* имеет уравнение 

Переходим к выводу критериев перпендикулярности отрезков. Ясно, что



Комплексные числа с аргументами  и - являются чисто мнимыми.

Поэтому,



или

 (13)

Отрезки *АВ* и *CD* перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы точек с комплексными координатами *а—b* и *с—d* перпендикулярны. В си­лу (13) имеем:

 (14)

В частности, когда точки *А, В, С, D* принадлежат единичной окружности =l, то зависимость (14) упрощается:

 (15)

Выведем уравнение касательной к единичной окружности =l в ее точке

*P(р)*. Если *М (z) —* произвольная точка этой касательной, то ** и обратно. На основании (14) имеем:

**

или

*.*

Поскольку *,* то уравнение касательной становится таким:

. (16)

Это частный случай уравнения (12a) при *а=b=р.* Решим еще две вспомогательные задачи, необходимые для решения содержательных геометрических задач.

*Задача 1.* Найти координату точки пересечения секущих *АВ* и *CD* единичной окружности =l, если точки *А, В, С, D* лежат на этой окруж­ности и имеют соответственно комплексные координаты *а, b, с, d.*

Пользуясь уравнением (12а), получаем систему



из которой почленным вычитанием находим:

 (17)

В том частном случае, когда хорды *АВ* и *CD* перпендикулярны, в силу (15) *ab=-cd,* и поэтому результат (17) приводится к виду



откуда

** (18)

В этом случае точка пересечения определяется только тремя точками *A*, *В, С,* так как *,* и, значит,

 (19)

*3адача 2.* Найти комплексную координату точки пересечения касатель­ных в точках *A(а)* и *B(b)* единичной окружности =l. Для искомой координаты *z* имеем систему



из которой находим:

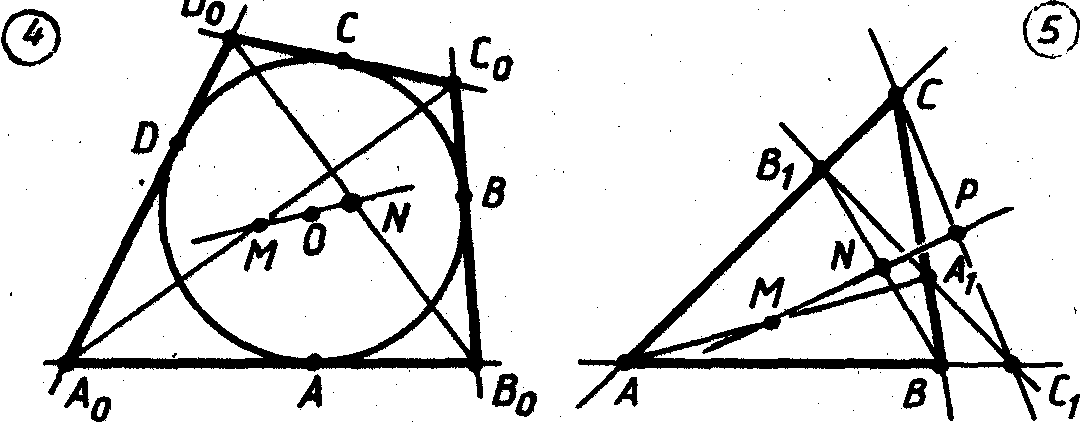
**

Поскольку  то получаем окончательно:

* или * (20)

Покажем теперь метод комплексных чисел в действии, применяя его к доказательству классических теорем элементарной геометрии.

**Теорема Ньютона.** *В* *описанном около окружности четырехуголь­нике середины диагоналей коллинеарны, с центром окружности.*



*Доказательство.* Примем центр окружности за начало, полагая ее радиус равным единице. Обозначим точки касания сторон данного четы­рехугольника *AoBoCoDo* через *А*, *В, С, D* (в круговом порядке) (рис.4). Пусть *М* и *N* — середины диагоналей А*o*С*o* и *BoDo* соответственно. Тогда согласно (20) точки А*o*, В*o*, С*o*, Do будут иметь соответственно комплексные координаты:



где a, b, c, d – комплексные координаты точек A, B, C, D.

Поэтому



Вычисляем  Поскольку то непосредственно видно, что На основании (6) точки *О, М, N* коллинеарны.

**Теорема Гаусса.** Если прямая пересекает прямые, содержащие стороны ВС, СА, АВ треугольника АВС соответственно в точках А1, B1, C1, то середины отрезков АА1, ВВ1, СС1 коллинеарны (рис.5).

*Доказательство.* Используя (11), запишем условия коллинеар­ности троек точек *АВ*1*С, СА*1*В, ВС*1*А, A*1*B*1*C*1*:*

 (21)

Если *М, N, P —* середины отрезков *AA1, BB1, CC1,* то предстоит показать, что

 (22)

Так как  то доказываемое равенство (22) эквивалентно такому:



или после перемножения:

 (23)

Теперь легко видеть то, что (23) получается почленным сложением ра­венств (21). Доказательство закончено.

**Теорема Паскаля.** *Точки пересечения прямых, содержащих про­тивоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.*

*Доказательство.* Пусть в окружность вписан шестиугольник *ABCDEF* и  (рис.6). Примем центр окружности за нулевую точку плоскости, а ее радиус - за единицу длины. Тогда согласно (17) имеем:



Вычисляем

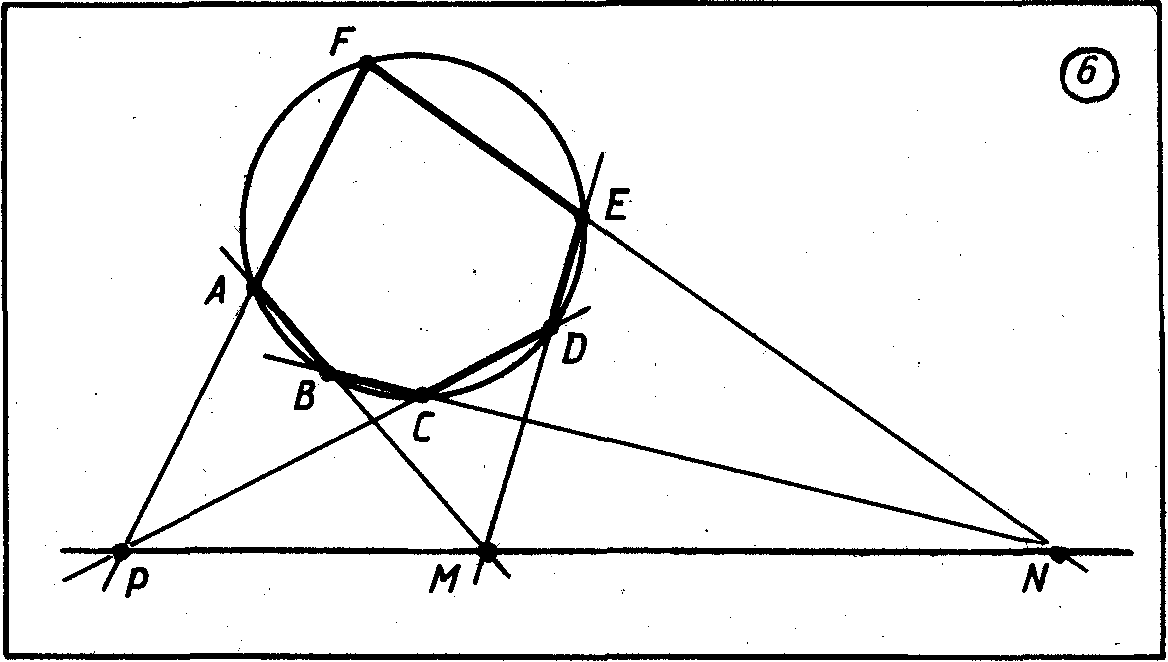


и аналогично



Далее находим:





Поскольку числа  равны соответственно , то устная проверка обнаруживает, что найденное выражение совпадает со своим сопряженным, т. е. является действительным числом. Это означает коллинеарность точек *М, N, Р.*

**Teopeмa Mонжа.** *Во вписанном в окружность четырехугольнике прямые, проходящие через середины сторон и. каждой диагонали перпенди­кулярно противоположным сторонам и соответственно другой диагонали, пересекаются в одной точке.* *Она называется точкой Монжа вписанного четырехугольника.*

*Доказательство.* Серединные перпендикуляры к сторонам че­тырёхугольника *ABCD* пересекаются в центре описанной окружности, который примем за начальную точку. Для каждой точки *М(z)* серединного перпендикуляра к [AB] число чисто мнимое.

В частности, при z=0 оно равно . Для каждой точки *N(z)* прямой, проходящей через середину стороны *CD* перпендикулярно (AB), число  необходимо будет чисто мнимым и обратно. Но для z= оно равно т. е. чисто мнимое. Следовательно, точка *Е* с комплексной координатой

 лежит на указанной прямой. А это выражение симметрично относительно букв а, b*,* с, d*.* Поэтому и остальные пять аналогично построенных прямых содержат точку *Е.*

Решим ещё несколько основных планиметрических задач.

*3адача 3.* Доказать, что диагонали четырехугольника *ABCD*, вписанного в окружность, перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

**Решение.** Требуется доказать: 

Запишем  используя (15): . Тогда, воспользовавшись формулами (15), (2) и тем, что точки *A, B,C, D* принадлежат окружности , приходим к выводу, что 

*3адача 4.* Доказать, что если средние линии *MP, NQ* четырехугольника *ABCD* равны, то его диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны и обратно.

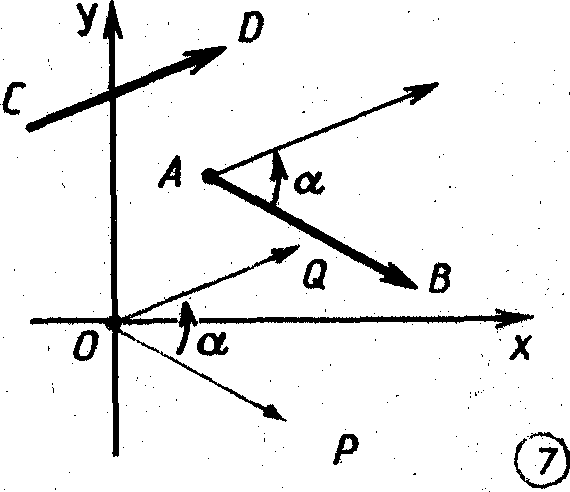
**Решение.** Требуется доказать: .

(a) так как

 , cогласно (4a). Подставим эти выражения в равенства (a) и получим:  но это и есть условие того, что (см. 14).

**Углы и площади. Критерий принадлежности четырех точек одной окружности**

Условимся обозначать символом  положительно ориентирован­ный угол, на который надо повернуть вектор *,* чтобы он стал сонаправлен



с вектором*.* Если  и, то точкам *Р и Q* соответст­вуют комплексные числа b—а и d—c(рис.7) и

** (24)

Эта формула в применении к положительно ориентированному треуголь­нику *АВС* дает:

 (25)

Если z=r( ,то  Отсюда

 (26)

Тогда    так как 

Итак,

 (27)

Аналогично находим:

. (28)

Выведем формулу для площади S положительно ориентированного треугольника *АВС:*

или

 (29)

что можно записать в виде определителя третьего порядка:

 (30)

Если треугольник АВС вписан в окружность , то формула (29) преобразуется к виду

. (31)

Для площади S положительно ориентированного четырехугольника *ABCD* имеем:

 (32)

Если четырехугольник *ABCD* вписан в окружность zz==l, то (32) при­нимает вид:

 (33)

Три произвольно взятые точки всегда принадлежат либо одной окруж­ности, либо одной прямой. Критерии принадлежности трех точек одной прямой рассмотрены выше.

Докажем КРИТЕРИЙ принадлежности четырех точек одной окружности или прямой.

Возьмем четыре произвольные точки *A, В, С, D* соответственно с комплексными координатами а, b,c,d. Комплексное число

** (34)

называется *двойным отношением* точек *A*, *В, С, D* и обозначается (*AB*, *CD***)***.* Порядок точек существен.

**Теорема.** *Для того чтобы, четыре точки лежали на одной прямой или на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы их двойное отношение было действительным числом.*

*Доказательство.* Если точки А, В, С, D коллинеарны, то отно­шения  и действительные числа (см. условие (10)). Следовательно, в этом случае будет действительным и двойное отношение (34). Если точки *А*, *В, С, D* лежат на окружности, то рассмотрим два воз­можных случая:

1. точки *С и D* находятся в одной полуплоскости от прямой *АВ*;
2. точки *С и D* находятся в различных полуплоскостях от прямой *АВ*.

В первом случае ориентированные углы *ВСА* и *BDA* равны, во втором случае ВСА+АDВ= ±, т. е. ВСА-ВСА= ±. В обоих случаях разность  равна нулю или ±. Но поскольку согласно (24) эта разность равна



то  — действительное число.

Обратно: если двойное отношение четырех точек действительно, то эти точки или коллинеарны, или принадлежат одной окружности. В самом деле, тогда если  действительное число, то и  действительное число. Поэтому точки *А, В, С* коллинеарны и точки *А, В, D* коллинеарны, и, значит, все четыре точки коллинеарны. Если же число  комплексное, то и число  также комплексное, отличное от действительного. Поэтому точки A, *B, С* неколлинеарны и точки *А, В, D* также неколлинеарны. Так как по условию двойное отношение вещественно, то



Следовательно, либо *BCA=BDA,* либо *ВСА—ВDА=±,* т.е. *ВСА+ADB=±*. В первом случае отрезок *АВ* из точек *С и D* виден под равными углами, и, стало быть, они принадлежат одной дуге окружности, стягиваемой хордой *АВ.* Во втором случае сумма противоположных углов четырехугольника *ACBD* равна ±, и поэтому он будет вписанным в окружность. Доказательство закончено.

*Задача 1.* В окружности проведены три параллельные хорды Доказать, что для произвольной точки *М* окружности прямые образуют равные углы соответственно с прямыми *ВС, СА, АВ.*

**Решение.** Принимая окружность за единичную, отнесем точкам *А*, *В, С, A1, B1, C1* комплексные числа Тогда по условию (9) параллельности хорд имеем  Следует доказать, что  (рис.8).

Первое равенство эквивалентно такому: 

Или

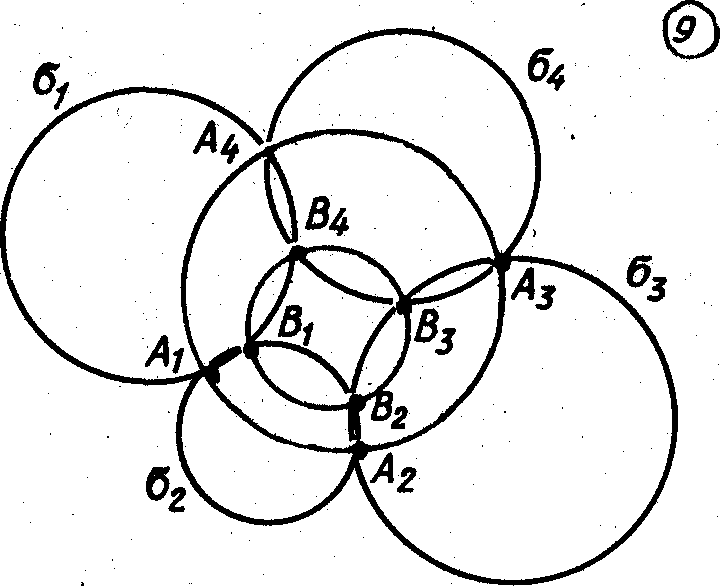
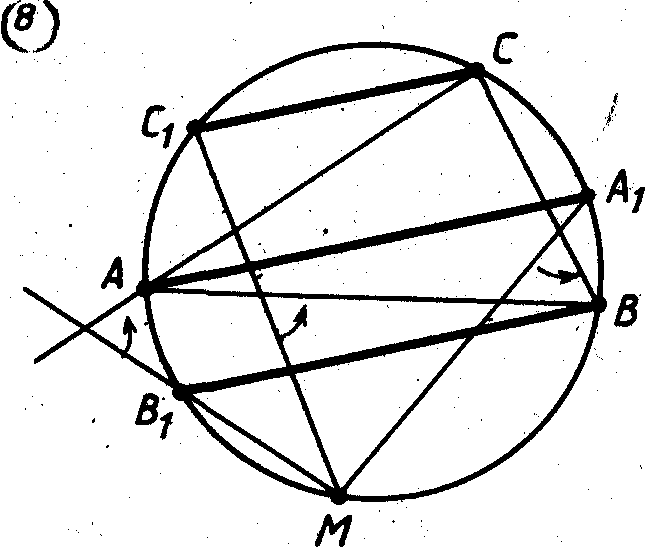


т. е. эта дробь должна быть числом действительным. А это имеет место, поскольку сопряженное ей число



равно этой же дроби. Аналогично доказывается и второе равенство углов.

*Задача 2.* На плоскости даны четыре окружности так, что окружности  и  пересекаются в точках  и ; окружности  и  пе­ресекаются в точках и , окружности  и — в точках и  и ок­ружности  и  — в точках  и . Доказать, что если точки лежат на одной окружности или прямой, то и точки  также лежат на одной



окружности или прямой (рис.9).

**Решение.** Согласно теореме этого параграфа и условию задачи будут действительрыми двойные отношения:



Поэтому будет действительным и число



Следовательно, из вещественности двойного отношения  вы­текает вещественность и двойного отношения .

Подобные и равные треугольники. Правильный треугольник

**ОПР:** Треугольники *АВС* и подобны и одинаково ориентированы (по­добие первого рода), если только  и 

(углы ориентированные).

Эти равенства с помощью комплексных чисел можно записать так:



Два равенства  и  эквивалентны одному  или

 (35)

где  комплексное число, коэффициент подобия.

Если, в частности, - число действительное, то и на основании признака (8) будет. По такой же причине и. Следовательно, треугольники  и  гомотетичны.

Соотношение (35) — необходимый н достаточный признак того, что треугольники *АВС* и  являются подобнымии одинаково ориенти­рованными. Ему можно придать симметричный вид:

 (36)

или

. (37)

**ОПР.** Треугольники *АВС* и подобны и противоположно ориентированы (подобие второго рода),  и *.* Последнее равенство дает:



Два равенства

 и 

эквивалентны одному



или

 (38)

где  - комплексное число, -коэффициент подобия.

Соотношение (38) есть необходимый и достаточный признак того, что треугольники *АВС* и подобны и ориентированы противоположно. Его можно записать в симметричной форме:

 (39)

или же так:

 (40)

Если, то треугольники *АВС* и будут равны (конгруэнтны).

Тогда соотношения (35) и (38) становятся признаками равенства треугольников соответственно одинаковой и противоположной ориентации.

Рассмотренные признаки подобия треугольников позволяют обосновать простой способ построение произведения и частного двух комплексных чисел. Пусть даны точки  с комплексными координатами  и требуется построить точку *М* с координатой *z=ab.* Тогда, очевидно, . Это равенство говорит о том, что треугольники *ОЕА* и *ОВМ* подобны и одинаково ориентированы. Отсюда и вытекает способ построения точки *М,* соответствующей произведению *ab* (рис.10).

Обратно: если даны точки *М* и *А* соответственно с координатами *ab* и *a*, то точка *В,* соответствующая частному этих чисел строится на основании тех, же подобных треугольников.

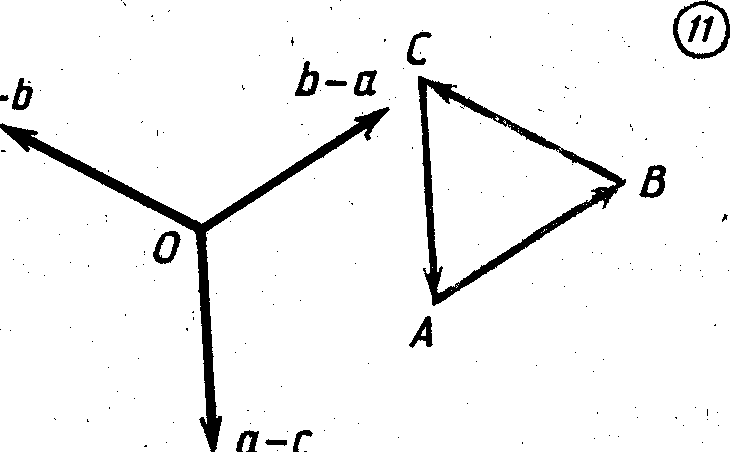
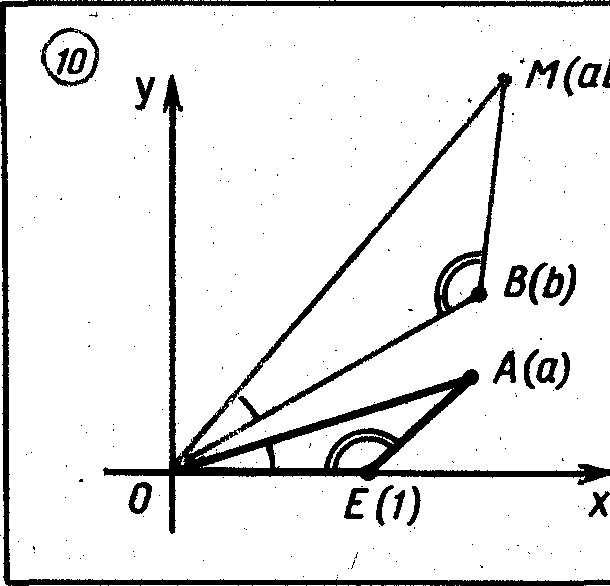
Следует обратить внимание на один важный частный случай. Если |а|=1, то точка *М* будет образом точки *В* при повороте около нулевой точки на угол. Если потребовать, чтобы ориентированный треугольник *АВС* был подобен ориентированному треугольнику *BCA,* то треугольник *АВС* необходимо будет *правильным.* Поэтому из условия (36) получаем необходимое и достаточное условие того, чтобы треугольник АВС был правильным

 (41)

или

 (42)

Введем в употребление комплексное число являюще­еся одним из корней уравнения (Формула для нахождения корней -) Другие два корня которого равны 1 и. По теореме Виета для кубического уравнения  имеем  Это легко проверить и непосред­ственно. Тогда равенство (41) будет эквивалентно такому:





или после умножения первого трехчлена на :

. (43)

Итак, для того чтобы треугольник *АВС* был правильным, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из равенств:

 (44)

или же

 (45)

Оказывается, первое из этих равенств соответствует только тому случаю, когда треугольник *АВС* ориентирован положительно, а второе выполняется лишь при отрицательной его ориентации. В самом деле, так как умножению на  отвечает поворот на , то при положительной ориентации треугольника (рис.11), откуда и поэтому 

Аналогично проверяется выполнение равенства (45) для отрицательно ориентированного правильного треугольника *АВС.* Очевидно, одновременно равенства (44) и (45) выполняться не могут.

Если правильный треугольник *АВС* вписан в окружность, то при его положительной ориентации и , а при отрицательной ориента­ции и Поэтому каждое из условий (44) и (45) принимает вид:

 (46)

*Задача 1.* Доказать, что треугольник*,* стороны которого при­надлежат касательным в вершинах треугольника *АВС* к его описанной ок­ружности, гомотетичен треугольнику с вершинами в основаниях высот треугольника *АВС.*

**Решение.** Принимаем описанную окружность за единичную  Руководствуясь формулами (20) и (19), получаем:



Проверяем выполнимость признака (35):



причем, т. е. -действительное число. Значит, треугольники и  гомотетичны.

*3адача 2.* Два равных одинаково ориентированных треугольника *АВС* и ** вписаны в одну окружность. Доказать, что треугольник с верши­нами в точках пересечения прямых *ВС* и*, СА* и, *AB* и подобен данным треугольникам.

**Решение.** Придадим окружности уравнение . Вершины. треуголь­ника  служат образами вершин треугольника *АВС* при повороте на некоторый угол  . Поэтому  Если*—* точки пересечения прямых *ВС* и  *СА* и  *АВ* и  соот­ветственно, то на основании (17)  откуда  Аналогично  

Осталось проверить условие (17): что делается непосредственной подстановкой.

*3адача 3.* Доказать, что середины отрезков, соединяющих соответственные вер­шины двух равных и противоположно ориентированных треугольников, коллинеарны.

**Решение.** Для доказательства данной задачи воспользуемся:

1) Формулой (38),- необходимое и достаточное условие равенства двух противоположно ориентированных треугольников *ABC* и  ;

2) Формулой (4а) для точек *M, N, P*:  (из условия задачи);

3) Формулой (11),- коллинеарности точек *M, N, P*: 

Теперь простой проверкой убеждаемся в том, что из 1)2)  3).

**ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ**

Пусть произвольной точке *М* плоскости комплексных чисел соответ­ствует комплексное число*.* Из равенств  и  од­нозначно выражаются декартовы координаты *х* и *у* точки *М* через комплекс­ные числа и :

 (1)

Поэтому комплексные числа *z* и  называются *сопряженными комплексными координатами* этой точки.

Формулы (1) позволяют осуществить переход от уравнения геометри­ческой фигуры в декартовых координатах к ее уравнению в сопряженных комплексных координатах. Однако сейчас мы предпочли непосредственное рассмотрение уравнений в сопряженных комплексных координатах.

Геометрический смысл уравнения 

Найдем множество точек плоскости, сопряженные комплексные коорди­наты которых удовлетворяют уравнению

 (2)

Сначала выделим особый случай, когда с=0. Тогда имеем систему отно­сительно  и 

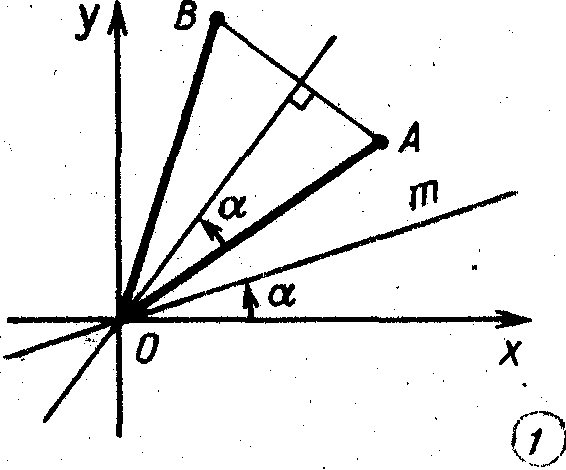


второе уравнение которой получается из первого переходом к сопряжен­ным числам. Уравнивая коэффициенты при , путем вычитания второго уравнения из первого получаем:



Если *,* т.е. , то решением полученного уравнения, а значит, и решением исходного уравнения  будет единственное число z=0. При  уравнение  напишем в виде . Модули левой и правой частей равны. Необходимо, чтобы , откуда . Этому условию удовлет­воряет каждая точка прямей *m*, проходящей через начало под углом  к действительной оси (рис.1). Так, уравнением

 (3)



задается прямая при  и точка  при *.*

Пусть теперь . Свободный член уравнения (2) можно всегда сделать действительным числом путем умно­жения обеих частей уравнения на *с.* Поэтому сразу будем полагать  Тогда имеем систему:

**

из которой получаем: *.* Рассмотрим возможные случаи.

Если *,* то  и подстановкой в исходное уравнение получаем: ** или .

При  его решение единственно:



При  решений нет.

Если , то  и , т. е. . В этом случае уравнением (2) при  *прямая.* В самом деле, возьмем точку  и век­тор  точки *В(b)* и рассмотрим множество точек *М(z),* для каждой из ко­торых *(MQ)(OB):*

 (4)

Очевидно, это множество есть прямая. При  и  уравнение (4) эквивалентно уравнению (2).

Таким образом, при  и  уравнение (2) есть уравнение прямой, которая проходит через точку  перпендикулярно вектору *.*

Наконец, отметим случай, когда *,* но *.* Тогда система



приводит к противоречию: , т.е. .

Подведем итоги. Уравнением , в котором хотя бы один из коэффициентов *a* и *b* отличен от нуля, задается:

1) прямая при *|а|=|b|*, *с=0*, а также при *;*

2) единственная точка при *;*

3) пустое множество в иных случаях, т. е. при *|a| = |b|, ,* а так­же при *,* *.*

Достигнув поставленной цели, возвратимся снова к системе:

**

не налагая ограничений на коэффициенты *а, b, с,* кроме того, что *a* и *b* не равны нулю одновременно. Уравнивая коэффициенты при *,* приходим к уравнению *,* которое:

а) имеет единственное решение при *;*

б) имеет бесконечное множество решений при  и *;*

в) не имеет решений при  и *.*

Отсюда и на основании результата предыдущих исследований получаем, что уравнение  определяет:

а) единственную точку при 

б) прямую при  и *;*

в) пустое множество при  и *.*

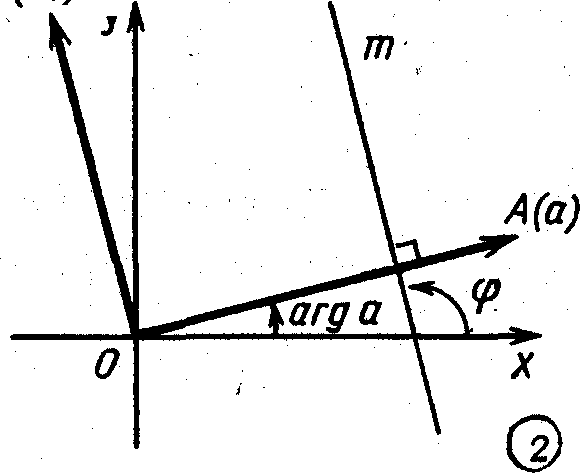
Уравнение

**  (5)

прямой в сопряженных комплексных координатах будем называть *приведен­ным уравнением* прямой.

Две прямые. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая *т* задана приведенным уравнением *.* Так как она перпендикулярна вектору , то вектор  будет ей параллелен (рис.2). Следовательно, ориентированный угол от оси *х* до прямой *т* равен аргументу числа *ai:*



. (6)

Положительно ориентированный угол  от прямой  до прямой  равен углу между их направляющими векторами  и *:*

. (7)

Формулы (6) и (7) позволяют находить соответствующие углы с точ­ностью до слагаемого *.*

Из формулы (7) вытекает критерий перпендикулярности и критерий параллельности прямых  и *.* В самом деле,  чисто мни­мое число. Это значит, что , или

.(8)

При  или  получаем:

. (9)

Если прямая  проходит через точку , то  и ее уравнение можно написать в виде:

 (10)

В силу условия (8) перпендикулярности для прямой, перпендикуляр­ной данной, коэффициентами при, *z* и  будут соответственно числа *а* и *.* Поэтому на основании уравнения (10) получаем уравнение

 (11)

прямой, проходящей через точку  перпендикулярно прямой . Решение системы



дает координату

 (12)

основания *M1* перпендикуляра, опущенного из точки  на прямую .

Так как расстояние *d* от точки M0 этой прямой равно, то

. (13)

Геометрический смысл, уравнения 

Из формулы расстояния между двумя точками получается уравнение окружности по ее центру *S (s)* и радиусу *R* :

 (14)

Пусть дано уравнение

*,* (15)

в котором на комплексные коэффициенты *а, b, с* не накладывается заранее никаких условий. Требуется найти множество точек, координаты которых ему удовлетворяют. С этой целью удобно представить его в эквивалентном виде:

. (16)

Рассмотрим все возможные случаи для коэффициентов *а, b, с.*

1. Сравнивая уравнение (16) с уравнением (14) окружности, приходим к выводу, что уравнение (16), а значит, и уравнение (15) задают окружность тогда и только тогда, когда  и *ab—с -* действительное число. Так как в этом случае , то *с* должно быть действительным числом.

Итак, уравнение

**  (17)

есть уравнение окружности с центром *s=-b* и радиусом *.*

2. При и *с=ab* уравнению (16) удовлетворяет единственная точ­ка *s=-b.* В частности, этот случай имеет место при *а=b=с=0*. Соблюдая аналогию, говорят, что уравнением  задается окруж­ность с центром *s=-b нулевого радиуса.*

3. Если *,* , но *,* то  - чисто мнимое число. Полагаем , тогда (16) можно записать так:

. (18)

Уравнению (18) не удовлетворяет ни одна точка плоскости, поскольку левая часть неотрицательна, а правая отрицательна при любом значении *z.* Говорят, что это уравнение есть уравнение окружности мнимого радиуса *iR* с действительным центром *S*, имеющим комплексную координату *s=-b.*

4. Когда *,* но *,* уравнение (16) противоречиво: левая часть его действительна, а правая нет. В этом случае оно не задает никакого геометри­ческого образа (даже мнимого!).

5. Осталось рассмотреть случай, когда *.* Тогда из уравнения (15) вычтем уравнение **, получающееся из (15) переходом к сопряженным комплексным числам. Получаем:

,

откуда



Выполняя эту подстановку в уравнение (15), приводим его к виду

. (19)

При  уравнения (15) и (19) равносильны. В зависимости от того, отличен от нуля или равен нулю дискриминант

**

квадратного уравнения (19), оно будет определять две различные (дейст­вительные!) или две совпавшие точки. При *D=0* совпавшие точки имеют комплексную координату



В частности, при *c=ab* как уравнение (16), так и уравнение (19) дает па­ру точек *z1=-b* и .

Итак, *уравнением (15) задается либо окружность (действительная, мнимая, нулевого радиуса), либо две точки (различные или же совпавшие), либо пустое множество точек.*

Рассмотрим одну замечательную пару окружностей.

Две пересекающиеся окружности называются *ортогональными,* если касательные к ним в их общей точке перпендикулярны. Тогда, очевидно, ка­сательная к одной из ортогональных окружностей в их общей точке содержит центр другой окружности.

Для того чтобы окружности *(A, R)* и *(В, r)* были ортогональны, необ­ходимо и достаточно, чтобы *|AB|2=R2+r2* , или

. (20)

Если окружности заданы уравнениями



и



то , и поэтому критерий (20) их ортогональности трансформируется так:

 (21)

Решение задач

*Задача 1.* Хорды *АВ* и *PQ* окружности пересекаются в точке *С*. Найти множество точек *М* пересечения прямых *АР* и *BQ,* если точки *А, В, С* постоян­ны, а точки *Р* и *Q* пробегают данную окружность (рис.3).

**Решение.** Пусть *z -* комплексная координата произвольной точки *М* искомого множества и данная окружность принята за единичную . В си­лу зависимости координат точек, принадлежащих секущей к окружности (см. предыдущую статью), имеем:



откуда . Подставляя эти выражения во второе ра­венство, получаем:

,

или



Привлекая *,* полученному уравнению придадим вид

.

Теперь ясно, что искомое множество точек представляет собой пару пря­мых, одной из которых является прямая *АВ,* а другая имеет уравнение

 (22)

в приведенной форме. Как видим, эта прямая не зависит от хорды *АВ,* а опре­деляется лишь окружностью и точкой *С.* Она называется *полярой* точки *С* относительно окружности .

*Задача 2.* Около окружности описан квадрат *ABCD.* Точки  - ортогональные проекции его вершин *A, В, С, D* соответственно на произвольную касательную к окружности. Доказать, что

.

**Решение.** Радиус окружности примем за единицу длины. Систему ко­ординат выберем так, чтобы точки касания сторон *АВ, ВС, CD, DA* с окруж­ностью имели координаты  *.* Тогда вершины *А, В, С, D* будут иметь координаты Касательная к окружности в ее произвольной точке *Р (р)* имеет уравнение  в приве­денной форме. Руководствуясь формулой (13), находим:



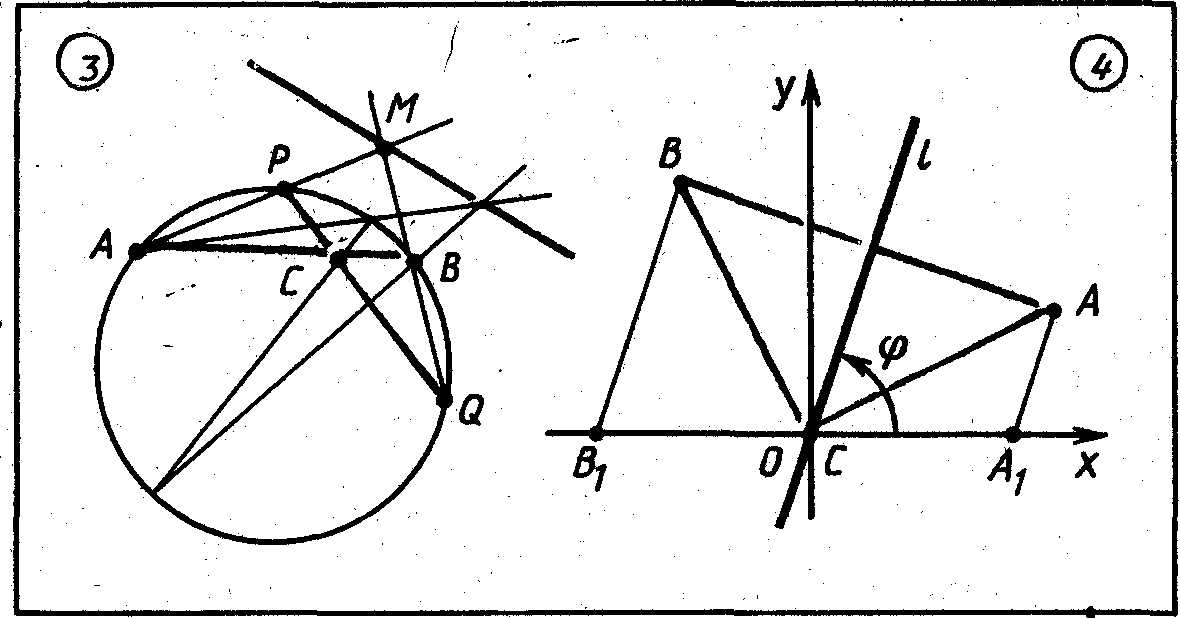
Аналогично получаем:



Равенство доказано.

*Задача 3.* Вершины *A* и *В* прямоугольного равнобедренного треу­гольника *АВС* спроектированы параллельно некоторой прямой *l* на прямую, проходящую через вершину *С* прямого угла, соответственно в точки  и . Доказать, что сумма  зависит только от угла  между осью проекций и прямой *l* (при заданном треугольнике *АВС).*

**Решение.** Примем ось проекций за действительную ось *х* и вершину *С* за начало *О*. Прямую *l* проведем через *О* и зададим принадлежащей ей точкой *Р(р),* *|p|=1*. Ее уравнение имеет вид*.* Если вершина *A* имеет координату *а, |а|=1*, то вершине *В* соответствует число *ai* (рис.4).



Прямые *АА1* и *BB1*  получают уравнения  и *.* Для точек, лежащих на оси *х* проекций,*.* Подстановкой в пре­дыдущие уравнения получаем координаты точек *А1* и *В1:*

.

Находим:

,

где  - указанный в условии задачи угол.

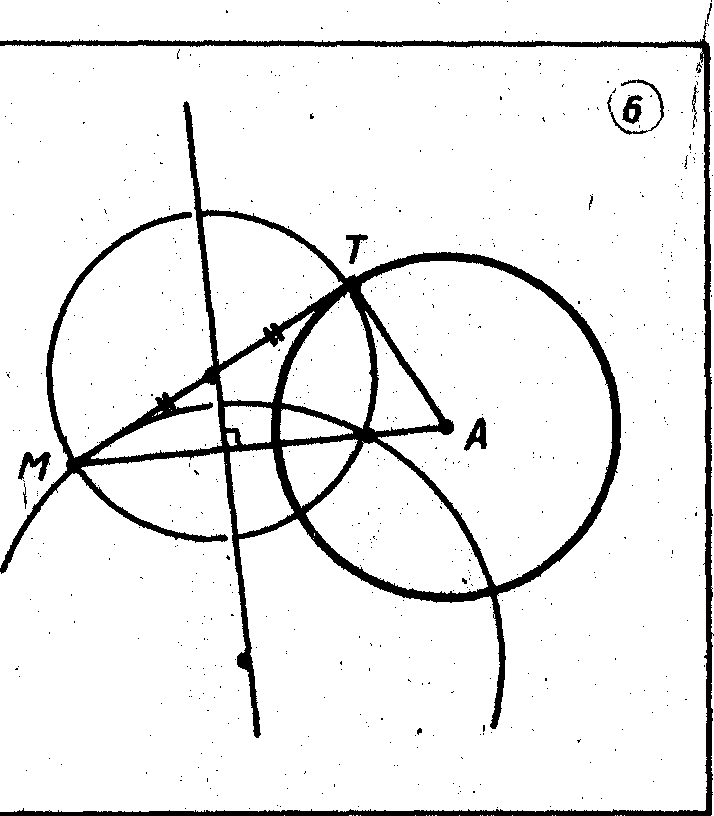
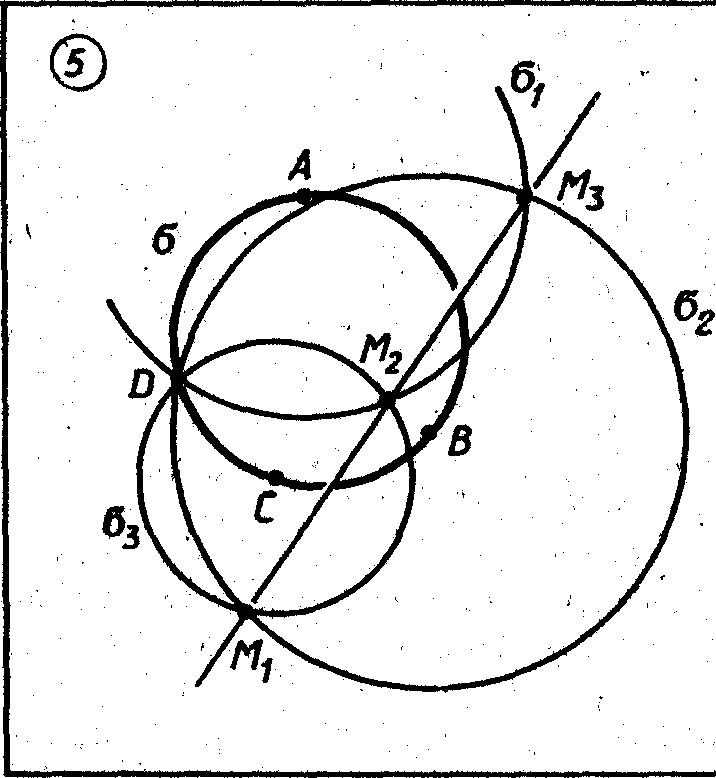
*Задача 4.* На окружности  взяты четыре произвольные точки *А, В, С, D.* Окружности соответственно с центрами *A,* *В, С* и проходя­щие через точку *D* пересекаются вторично попарно в точках (рис.5). Доказать, что точки  коллинеарны.

**Решение.** Пусть окружность  является единичной и точка *D* имеет координату *d=l.* Используя уравнение (14) и тот факт, что окружность имеет центр *A(а)* и содержит точку *D(1),* получаем ее уравнение

, или . Аналогично окружности  и  будут иметь уравнения

 и .

Решая систему уравнений окружностей  и , находим координату второй общей точки *М3* этих окружностей: *m3=a+b-ab.*



Аналогично *m2=c+a-ca, m1=b+c-bc.*

Отсюда находим:

*.*

Это число сопряжено самому себе, и потому точки  коллинеарны.

*Задача 5.* Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку *М (т)* ортогонально данной окружности .

**Решение.** Если окружность обладает заданным свойством, то



Исключая  получаем уравнение относительно :

.

Им определяется прямая с нормальным вектором *,* который равен век­тору *,* где - центр данной окружности. Следовательно, эта пря­мая перпендикулярна прямой *AM* (рис.6).

Заключение

Многие задачи элементарной геометрии можно изящно и просто решать при помощи комплексных чисел. Однако, значение комплексных чисел заключается не только в изяществе и краткости решения задач посредством этих чисел, хотя и это весьма существенно. Не менее важно и то, что в результате применения комплексных чисел при решении задач не редко обнаруживаются новые детали, удается сделать интересные обобщения и внести уточнения, которые подсказываются анализом полученных формул и соотношений.

Конечно, данная работа не может вместить в себя все теоремы и задачи, к тому же многие из них еще не сформулированы. Здесь рассмотрены лишь некоторые темы, по каждой из которых были представлены задачи и их решения.

Хочется отметить и то, что излагаемая тема в этой работе еще мало изучена вообще, просто ею не занимаются, поэтому она таит в себе много скрытого и неизвестного, что дает прекрасную возможность для дальнейшей работы над ней.

Здесь мы остановились на вопросе применения комплексных чисел к решению планиметрических задач, а что, если комплексные числа применять к решению стереометрических задач?! Опять находить красивые закономерности, какие-то факты, уточнения, делать обобщения, открывать все новое и новое. Но это вопросы уже следующих работ.

Подводя итоги, можно сделать вывод: метод комплексных чисел в применении к решению задач по элементарной геометрии можно давать не только студентам высших учебных заведений, но и старшим школьникам на факультативных занятиях. Так как этот метод прост в применении, использует аппарат комплексных чисел, что, безусловно, должно заинтересовать увлекающихся математикой учеников. Дает возможность посмотреть на задачи по геометрии с другой стороны, приучить к тому, что все наглядные задачи (правильность которых видна из чертежа) можно решать аналитическим способом, вообще не прибегая к чертежу.

Список использованной литературы

1. З. А. Скопец “Геометрические миниатюры”.- М.: Просвещение, 1990
2. Л. И. Волковский “Сборник задач по теории функций комплексных переменных”.- М.: Просвещение, 1985
3. И. И. Привалов “Введение в теорию функции комплексного переменного”.- М.: Просвещение, 1988