**Комплексные числа**

**ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА**

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в. Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа. Поэтому квадратные корни из отрицательных чисел стали употреблять в математике и назвали их мнимыми числами – тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам дал Гаусс, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

**1.ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА**

Решение многих задач математики, физики сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов в математике. Стремление сделать уравнения разрешимыми – одна из главных причин расширения понятия числа.

Так для решимости уравнений вида X+A=B положительных чисел недостаточно. Например, уравнение X+5=2 не имеет положительных корней. Поэтому приходится вводить отрицательные числа и нуль.

На множестве рациональных чисел разрешимы алгебраические уравнения первой степени, т.е. уравнения вида AX+B=0 (A0). Однако алгебраические уравнения степени выше первой могут не иметь рациональных корней. Например, такими являются уравнения X2=2, X3=5. Необходимость решения таких уравнений явилось одной из причин введения иррациональных чисел. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

Однако и действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Простейшее из них – уравнение X2+1=0. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными числами образуют множество, которое называют множеством ***комплексных чисел.***

Выясним предварительно, какой вид должны иметь комплексные числа. Будем считать, что на множестве комплексных чисел уравнение X2+1=0 имеет корень. Обозначим этот корень буквой ***i*** Таким образом, ***i*** – это комплексное число, такое, что ***i*** 2= –1.

Как и для действительных чисел, нужно ввести операции сложения и умножения комплексных чисел так, чтобы сумма и произведение их были бы комплексными числами. Тогда, в частности, для любых действительных чисел A и B выражение A+B***i*** можно считать записью комплексного числа в общем виде. Название “комплексное” происходит от слова “составное”: по виду выражения A+B***i*.**

***Комплексными числами*** называют выражения вида A+B***i***, где A и B –действительные числа, а ***i*** – некоторый символ, такой что ***i***2= –1, и обозначают буквой Z.

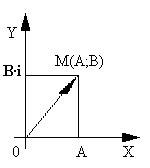
Число A называется действительной частью комплексного числа A+B***i*,** а число B – его мнимой частью. Число ***i*** называется мнимой единицей.

Например, действительная часть комплексного числа 2+3***i*** равна 2, а мнимая равна 3.

Для строгого определения комплексного числа нужно ввести для этих чисел понятие равенства.

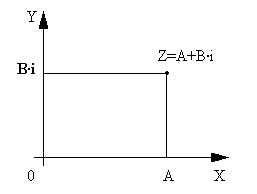
Два комплексных числа A+B***i*** и C+D***i*** называются *равными* тогда и только тогда, когда A=C и B=D, т.е. когда равны их действительные и мнимые части.

2.ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



Рисунок

Действительные числа геометрически изображаются точками числовой прямой. Комплексное число A+B***i*** можно рассматривать как пару действительных чисел(A;B). Поэтому естественно комплексное число изображать точками плоскости. В прямоугольной системе координат комплексное число Z=A+B***i*** изображается точкой плоскости с координатами (A;B), и эта точка обозначается той же буквой Z (рисунок 1). Очевидно, что получаемое при этом соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность интерпретировать комплексные числа как точки плоскости на которой выбрана система координат. Такая координатная плоскость называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, т.к. на ней расположены точки соответствующие действительным числам. Ось ординат называется ***мнимой осью*** – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам.



**Рисунок 2**

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа A+B***i*** как вектора, т.е. вектора с началом в точке

O(0;0) и с концом в точке М(A;B) (рисунок 2).

Соответствие установленное между множеством комплексных чисел, с одной стороны, и множествами точек или векторов плоскости, с другой, позволяет комплексные числа точками или векторами.

**3.МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА**

Пусть дано комплексное число Z=A+B***i***. ***Сопряженным***с**Z** называется комплексное число A – B***i***, которое обозначается , т.е.

==A – B***i***.

Отметим, что = A+B***i***, поэтому для любого комплексного числа Z имеет место равенство =Z.

***Модулем*** комплексного числа Z=A+B***i*** называется **число**  и обозначается , т.е.

== (1)

Из формулы (1) следует, что  для любого комплексного числа Z, причем =0 тогда и только тогда, когда Z=0, т.е. когда A=0 и B=0. Докажем, что для любого комплексного числа Z справедливы формулы:



**4.СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ**

***Суммой*** двух комплексных чисел A+B***i*** и C+D***i*** называется комплексное число (A+C**) + (**B+D)***i***, т.е. **(**A+B***i*) + (**C+D***i*)=(**A+C) + (B+D)***i***

***Произведением***двух комплексных чисел A+B***i*** и C+D***i*** называется комплексное число (AC – BD)+(AD+BC) ***i***, т.е.

(A + B***i***)(C + D***i***)=(AC – BD) + (AD + BC)***i***

Из формул вытекает, что сложение и умножение можно выполнять по правилам действий с многочленами, считая ***i***2= –1. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами действительных чисел. Основные свойства:

***Переместительное свойство:***

Z1+Z2=Z2+Z1, Z1Z2=Z2Z1

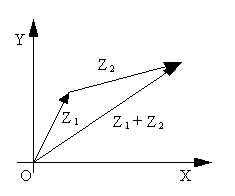
***Сочетательное свойство:***

(Z1+Z2)+Z3=Z1+(Z2+Z3), (Z1Z2)Z3=Z1(Z2Z3)

***Распределительное свойство:***

Z1(Z2+Z3)=Z1Z2+Z1Z3

Геометрическое изображение суммы комплексных чисел



**Рисунок 3**

Согласно определению сложения двух комплексных чисел, действительная часть суммы равна сумме действительных частей слагаемых, мнимая часть суммы равна сумме мнимых частей слагаемых. Точно также определяются координаты суммы векторов:

Сумма двух векторов с координатами (A1;B1) и (A2;B2) есть вектор с координатами (A1+A2;B1+B2). Поэтому, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел Z1 и Z2 нужно сложить векторы, соответствующие комплексным числам Z1 и Z2.

***Пример 1:*** Найти сумму и произведение комплексных чисел Z1=2 – 3⋅***i*** и

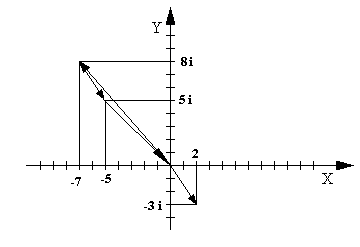
1 Способ:

Z2= –7 + 8***⋅i***.

Z1 + Z2 = 2 – 7 + (–3 + 8)***⋅i = –***5 + 5***⋅i***

Z1⋅Z2 = (2 – 3***⋅i***)⋅(–7 + 8***⋅i***) = –14 + 16***⋅i*** + 21***⋅i*** + 24 = 10 + 37***⋅i***

2 Способ:



**5.ВЫЧИТАНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ**

Вычитание комплексных чисел – это операция, обратная сложению: для любых комплексных чиселZ1 и Z2 существует, и притом только одно, число Z, такое, что:

Z + Z2=Z1

Если к обеим частям равенства прибавить (–Z2) противоположное числу Z2:

Z+Z2+(–Z2)=Z1+(–Z2), откуда

Z = Z1 – Z2

Число Z=Z1+Z2 называют ***разностью чисел*** Z1 и Z2.

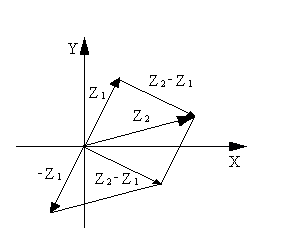
Деление вводится как операция, обратная умножению:

Z⋅Z2=Z1

Разделив обе части на Z2 получим:

Z=

Из этого уравнения видно, что Z20



**Геометрическое изображение разности комплексных чисел**

Рисунок 4

Разности Z2 – Z1 комплексных чисел Z1 и Z2, соответствует разность векторов, соответствующих числам Z1 и Z2. Модуль  разности двух комплексных чиселZ2 и Z1 по определению модуля есть длина вектора Z2 – Z1. Построим этот вектор, как сумму векторов Z2 и (–Z1) (рисунок 4). Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

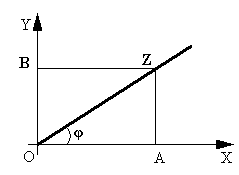
Это важное геометрическое истолкование модуля разности двух комплексных чисел позволяет с успехом использовать простые геометрические факты.

***Пример 2:*** Даны комплексные числа Z1= 4 + 5***i*** и Z2= 3 + 4***i***. Найти разность Z2 – Z1 и частное 

Z2 – Z1 = (3 + 4*i*) – (4 + 5*i*) = –1 – *i*

==

**6.ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА**



Рисунок

Запись комплексного числа Z в виде A+B***i*** называется ***алгебраической формой***комплексного числа. Помимо алгебраической формы используются и другие формы записи комплексных чисел.

Рассмотрим ***тригонометрическую форму*** записи комплексного числа. Действительная и мнимая части комплексного числа Z=A+B***i*** выражаются через его модуль = rи аргумент ϕ следующим образом:

A= rcosϕ ; B= rsinϕ.

Число Z можно записать так:

Z= rcosϕ+ ***i***sinϕ = r(cosϕ + ***i***sinϕ)

Z = r(cosϕ + ***i***sinϕ) (2)

Эта запись называется ***тригонометрической формой комплексного числа****.*

r =– модуль комплексного числа.

Число ϕ называют ***аргументом комплексного числа.***

Аргументом комплексного числа Z0 называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором Z, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если производится по часовой стрелке.

Для числа Z=0 аргумент не определяется, и только в этом случае число задается только своим модулем.

Как уже говорилось выше = r =, равенство (2) можно записать в виде

A+B***i***=**cosϕ + *i*****sinϕ,** откуда приравнивая действительные и мнимые части, получим:

**cosϕ** =, **sinϕ** = (3)

Если **sinϕ** поделить на **cosϕ** получим:

**tgϕ**=**** (4)

Эту формулу удобней использовать для нахождения аргумента **ϕ**, чем формулы (3). Однако не все значения ϕ, удовлетворяющие равенству (4), являются аргументами числа A+B***i* .** Поэтому при нахождении аргумента нужно учесть, в какой четверти расположена точка A+B***i*.**

**7.СВОЙСТВА МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА**

С помощью тригонометрической формы удобно находить произведение и частное комплексных чисел.

Пусть Z1= r1(**cosϕ1 + *i*sinϕ1),** Z2 = r2(**cosϕ2 + *i*sinϕ2).** Тогда:

Z1Z2= r1r2**[cosϕ1cosϕ2 – sinϕ1sinϕ2 + *i*( sinϕ1cosϕ2 + cosϕ1sinϕ2)]=**

**=** r1r2**[cos(ϕ1 + ϕ2) + *i*sin(ϕ1 + ϕ2)]**.

Таким образом, произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно находить по формуле:

Z1Z2= r1r2**[cos(ϕ1 + ϕ2) + *i*sin(ϕ1 + ϕ2)]** (5)

Из формулы (5) следует, что ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Если Z1=Z2 то получим:

Z2=[r**(cosϕ + *i*sinϕ)]2=** r2**(cos2ϕ + *i*sin2ϕ)**

Z3=Z2Z= r2(**cos2ϕ + *i*sin2ϕ)r(cosϕ + *i*sinϕ)=**

**=** r3(**cos3ϕ + *i*sin3ϕ)**

Вообще для любого комплексного числа **Z**= **r( cosϕ + *i*sinϕ)0** и любого натурального числа n справедлива формула:

**Zn =[ r(cosϕ + *i*sinϕ)]n= rn( cosnϕ+ *i*sinnϕ),** (6)

которую называют формулой Муавра.

Частное двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно находить по формуле:

**[ cos(ϕ1 – ϕ2) + *i*sin(ϕ1 – ϕ2)].** (7)

**= = cos(–ϕ2) + *i*sin(–ϕ2)**

Используя формулу 5

**(cosϕ1 + *i*sinϕ1)⋅( cos(–ϕ2) + *i*sin(–ϕ2)) =**

**cos(ϕ1 – ϕ2) + *i*sin(ϕ1 – ϕ2).**

***Пример 3:***

Z3 = –8

Число –8 запишем в тригонометрической форме

8 = 8( cos(π + 2πκ) + *i*·sin(π + 2πκ)), κ∈Ζ

Пусть Z = r⋅(cosϕ + *i*⋅sinϕ), тогда данное уравнение запишется в виде:

r3⋅(cos3ϕ + *i*⋅sin3ϕ) = 8( cos(π + 2πκ) + *i*·sin(π + 2πκ)), κ∈Ζ

Тогда 3ϕ =π + 2πκ, κ∈Ζ

**ϕ** = **,** κ∈Ζ

r3 = 8

r = 2

Следовательно:

Z = 2( cos() + *i*·sin()), κ∈Ζ

κ = 0,1,2...

κ = 0

Z1 = 2( cos + *i*·sin) = 2(*i*) = 1+⋅*i*

κ = 1

Z2 = 2( cos( + ) + *i*·sin( + )) = 2( cosπ + *i*·sinπ) = –2

κ = 2

Z3 = 2( cos( + ) + *i*·sin( + )) = 2( cos + *i*·sin) = 1–⋅*i*

Ответ: Z13 = ; Z2 = –2

***Пример 4:***

Z4 = 1

Число 1 запишем в тригонометрической форме

1 = 1( cos(2πκ) + *i*·sin(2πκ)), κ∈Ζ

Пусть Z = r⋅(cosϕ + *i*⋅sinϕ), тогда данное уравнение запишется в виде:

r4⋅(cos4ϕ + *i*⋅sin4ϕ) = cos(2πκ) + *i*·sin(2πκ)), κ∈Ζ

4ϕ = 2πκ, κ∈Ζ

**ϕ = ,** κ∈Ζ

r4 = 1

r = 1

Z = cos + ***i***⋅sin

κ = 0,1,2,3...

κ = 0

Z1 = cos0+ ***i***⋅sin0 = 1 + 0 = 1

κ = 1

Z2 = cos + ***i***⋅sin = 0 + *i* = *i*

κ = 2

Z3 = cosπ + *i*·sinπ = –1 + 0 = –1

κ = 3

Z4 = cos + ***i***⋅sin

Ответ: Z13 = 1

Z24 = ***i***

**8.ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ**

Из формулы 6 видно, что возведение комплексного числа r( cosϕ +***i***sinϕ) в целую положительную степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

[ r(cosϕ +***i***sinϕ)]n= rn( cos nϕ +***i***sin nϕ)

Число **Z** называется ***корнем степени*****n** из числа ω ( обозначается ), если Zn =ω.

Из данного определения вытекает, что каждое решение уравнения **Zn = ω** является корнем степени **n** из числа ω. Другими словами, для того, чтобы извлечь корень степени **n** из числа ω, достаточно решить уравнение **Zn = ω.** Если ω=0, то при любом n уравнение **Zn = ω** имеет только одно решение **Z**= **0.** Если ω0, то и **Z****0**, а, следовательно, и Zи ω можно представить в тригонометрической форме

Z = r(cosϕ +***i***sinϕ), ω = p(cosψ +***i***sinψ)

Уравнение Zn = ω примет вид:

rn( cos nϕ +***i***sin nϕ) = p( cosψ + ***i***sinψ)

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемыми, кратными 2π. Следовательно, rn = p и nϕ = ψ + 2πk**,** гдеk∈Ζ или r = иϕ = , где k∈Ζ.

Итак, все решения могут быть записаны следующим образом:

ZK=[cos() + ***i***sin()], k∈Ζ (8)

Формулу 8 называют ***второй формулой Муавра*.**

Таким образом, если ω0, то существует ровно n корней степени n из числа ω: все они содержатся в формуле 8. Все корни степени **n** из числа ω имеют один и тот же модуль , но разные аргументы, отличающиеся слагаемым, кратным числу . Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа ω, соответствует точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n– угольника, вписанного в окружность радиуса  с центром в точке **Z = 0.**

Символ  не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись , следует подумать о том, чтобы было ясно, понимается под этим символом пара комплексных чисел ***i*** и ***–i***, или одно, то какое именно.

***Уравнения высших степеней***

Формула 8 определяет все корни двучленного уравнения степени n. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени n:

**an⋅Zn + an–1⋅Zn–1 +...+ a1⋅Z1 + a0 = 0** (9)

Где an,..., a0 – заданные комплексные числа.

В курсе высшей математики доказывается теорема Гаусса: каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень. Эта теорема была доказана немецким математиком Карлом Гауссом в 1779 году.

Опираясь на теорему Гаусса, можно доказать, что левая часть уравнения 9 всегда может быть представлена в виде произведения:

**,**

Где Z1,Z2,...,ZK – некоторые различные комплексные числа,

а a1,a2,...,ak– натуральные числа, причем:

a1 + a2 + ... + ak = n

Отсюда следует, что числа Z1,Z2,...,ZK являются корнями уравнения 9. При этом говорят, что Z1является корнем кратности a1, Z2 – корнем кратности a2 и так далее.

Если условиться считать корень уравнения столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: каждое алгебраическое уравнение степени nимеет в множестве комплексных чисел ровноn корней.

Теорема Гаусса и только что сформулированная теорема дают решения о существовании корней, но ничего не говорят о том, как найти эти корни. Если корни первой и второй степени могут быть легко найдены, то для уравнений третей и четвертой степеней формулы громоздки, а для уравнений степени выше четвертой таких формул вообще не существует. Отсутствие общего метода не мешает отыскивать все корни уравнения. Для решения уравнения с целыми коэффициентами часто оказывается полезной следующая теорема: целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Докажем эту теорему:

Пусть Z = k – целый корень уравнения

an⋅Zn + an–1⋅Zn–1 +...+ a1⋅Z1 + a0 = 0

с целыми коэффициентами. Тогда

an⋅kn + an–1⋅kn–1 +...+ a1⋅k1 + a0 = 0

a0 = – k(an⋅kn–1 + an–1⋅kn–2 +...+ a1)

Число в скобках, при сделанных предположениях, очевидно, целое, значит k – делитель числа a0.

9.КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОМПЛЕКСНЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Рассмотрим уравнение Z2 = a, где a – заданное действительное число, Z – неизвестное.

Это уравнение:

1. имеет один корень, если a = 0.
2. имеет два действительных корня Z1,2**=,** если a > 0.
3. не имеет действительных корней, если a < 0. Но имеет два комплексных корня.

Запишем число a в виде a = (– 1)⋅(– a) = ***i***2⋅=***i***2⋅()2. Тогда уравнение Z2 = a запишется в виде:Z2 – ***i***2⋅()2 = 0

т.е. (Z – ***i***⋅)(Z + ***i***⋅) = 0

Следовательно, уравнение имеет два корня: Z1,2 **=  *i*⋅**

Введенное понятие корня из отрицательного числа позволяет записать корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами

a⋅Z2 + b⋅Z + c = 0

По известной общей формуле

Z1,2= (10)

Итак, при любых действительных a(a0), b, c корни уравнения можно находить по формуле 10. При это если дискриминант, т.е. подкоренное выражение в формуле 10

D = b2 – 4⋅a⋅c

положителен , то уравнение a⋅Z2 + b⋅Z + c = 0 два действительных различных корня. Если D = 0, то уравнение a⋅Z2 + b⋅Z + c = 0 имеет один корень. Если D < 0, то уравнение a⋅Z2 + b⋅Z + c = 0 имеет два различных комплексных корня.

Комплексные корни квадратного уравнения обладают такими же свойствами, как и известные нам свойства действительных корней.

Сформулируем основные из них:

Пусть Z1,Z2 – корни квадратного уравнения a⋅Z2 + b⋅Z + c = 0, a0. Тогда справедливы свойства:

1. Теорема Виета: Z1 + Z2 = –

Z1⋅Z2 = 

1. При всех комплексных Z справедлива формула

a⋅Z2 + b⋅Z + c = a⋅(Z – Z1)⋅(Z – Z2)

***Пример 5:***

Z2 – 6·Z + 10 = 0

Д = b2 – 4·a·c

Д = 62 – 4·10 = – 4

– 4 = ***i****2*·4

Z1,2 = 

Z1,2 =

Ответ: Z1 = Z2 = 3 + ***i***

***Пример 6:***

3·Z2 +2·Z + 1 = 0

Д = b2 – 4·a·c

Д = 4 – 12 = – 8

Д = –1·8 = 8·***i****2*

Z1,2 =  = 

Z1,2 =

Z1 = – ()

Z2 = –

Ответ: Z1 = Z2 = –

***Пример 7:***

Z4 – 8·Z2 – 9 = 0

Z2 = t

t2 – 8·t – 9 = 0

Д = b2 – 4·a·c = 64 + 36 = 100

t1,2 = = = 4

t1 = 9 t2 = – 1

Z2 = 9 Z2 = – 1

Z1,2 =3 Z = 

Z3,4 =***i***

Ответ: Z1,2 =3, Z3,4 =***i***

***Пример 8:***

Z4 + 2·Z2 – 15 = 0

Z2 = t

t2 + 2·t – 15 = 0

Д = b2 – 4·a·c = 4 + 60 = 64

t1,2 = = = –14

t1 = – 5 t2 = 3

Z2 = – 5 Z2 = 3

Z2 = – 1·5 Z3,4 =

Z2 = ***i****2*·5

Z1,2 =***i*****

Ответ: Z1,2 =***i*****, Z3,4 =

***Пример 9:***

Z2 = 24 10***i***

Пусть Z = X + Y***i***

(X + Y***i***)2 = X2 + 2XY***i*** Y2

X2 + 2XY***i***  Y2 = 24 10***i***

(X2  Y2) + 2XY***i*** = 24 10***i***

{

X2 – Y2 = 24

2·X·Y = – 10

Y = 

X2  = 24

 умножим на X2 0

X4 – 24X2 – 25 = 0

X2 = t

t2 – 24t – 25 = 0

t1t2 = – 25

t1 + t2 = 24

t1 = 25 t2 = – 1

X2 = 25 X2 = – 1 — нет решений

X1,2 = 5

X1 = 5 X2 = – 5

Y1 = –  Y2 = 

Y1 = – 1 Y2 = 1

Тогда:

Z1,2 =(5 – ***i***)

Ответ: Z1,2 =(5 – ***i***)

**ЗАДАЧИ:**

**1)**

{

X2 + 3·X·Y + Y2 = 6

X + Y = 2

{

X2 + 3·X·Y + Y2 = 6

X = 2 – Y

( 2 – Y)2 + 3·( 2 – Y)·Y + Y2 = 6

4 – 4·Y + Y2 + 6·Y – 3·Y2 + Y2 = 6

–Y2 + 2Y – 2 = 0 /–1

Y2 – 2Y + 2 = 0

Д = b2 – 4·a·c = 4 – 8 = – 4

– 4 = – 1·4 = 4· ***i****2*

Y1,2 =  =  = 1 ***i***

Y1 = 1– ***i*** Y2 = 1 + ***i***

X1 = 1 + ***i*** X2 = 1– ***i***

{

Ответ: {1 + ***i***; 1– ***i***}

{1– ***i*** ; 1 + ***i***}

**2)**

{

Z3 + ω5 = 0

Z2⋅4 = 1 **114 = 1**

{

Z3 = –ω5

Z2⋅12 = 1

— Возведем в квадрат

— Возведем в куб

Z6 = ω10

Z6⋅12 = 1

{

ω10⋅12 = 1

ω10⋅10 ⋅2 = 1

(ω⋅)10⋅2 = 1

()10⋅2 = 1

т.к. ω = A + B⋅*i*

 = A – B⋅*i*

ω⋅ = (A + B⋅*i*)·( A – B⋅*i*) = A2 – (B⋅*i*)2 = A2 + B2 = 2 = ω⋅

т.е. 20·2 = 1

Возьмем модуль от обоих частей последнего уравнения:

20·2 = 1

22 = 1

т.е.

 = 1

Тогда из уравнения получим

2 = 1

т.е.

 = 1

ω1 = 1 ω2 = –1

Подставим эти значения в первое уравнение данной системы и найдем численное значение Z

1) ω1 = 1

Z6 = 1

1 = 1( cos(2πκ) + ***i***·sin(2πκ)), κ∈Ζ

Z = r⋅(cosϕ + ***i***⋅sinϕ)

r6⋅(cos6ϕ + ***i***⋅sin6ϕ) = cos(2πκ) + ***i***·sin(2πκ), κ∈Ζ

r6 = 1 6ϕ = 2πκ

r = 1 ϕ = , κ∈Ζ

Z = cos+ ***i***·sin, κ∈Ζ

κ = 0,1,2...

κ = 0

Z1 = cos0+ ***i***⋅sin0 = 1 + 0 = 1

Z1 = 1

κ = 1

Z2 = cos + ***i***·sin = ***i*** = ***i***

Z2 =***i***

κ = 2

Z3 = cos+ ***i***·sin = –***i***

Z3 = –***i***

κ = 3

Z4 = cosπ + ***i***·sinπ = –1 + 0 = –1

Z4 = –1

κ = 4

Z5 = cos + ***i***·sin = –***i***

Z5 = –***i***

κ = 5

Z6 = cos + ***i***·sin = ***i***

Z6 = ***i***

Ответ: Z1 = 1, Z2 =***i***, Z3 = –***i***, Z4 = –1, Z5 = –***i***, Z6 = ***i***

**2)** ω2 = –1

Z6 = –1

–1 = 1( cos(π + 2πκ) + ***i***·sin(π + 2πκ)), κ∈Ζ

Пусть Z = r⋅(cosϕ + ***i***⋅sinϕ), тогда данное уравнение запишется в виде:

r6⋅(cos6ϕ + ***i***⋅sin6ϕ) = cos(π + 2πκ) + ***i***·sin(π + 2πκ), κ∈Ζ

r6 = 1 6ϕ = π + 2πκ

r = 1 ϕ = , κ∈Ζ

Z = cos() + ***i***·sin(), κ∈Ζ

κ = 0,1,2...

κ = 0

Z1 = cos + ***i***·sin = ***i***

Z1 **=*i***

κ = 1

Z2 = cos() + ***i***·sin() = 0 + ***i*** = ***i***

Z2 =***i***

κ = 2

Z3 = cos() + ***i***·sin() = –***i***

Z3 = –***i***

κ = 3

Z4 = cos() + ***i***·sin() = –***i***

Z4 = –***i***

κ = 4

Z5 = cos() + ***i***·sin() = 0 – ***i*** = – ***i***

Z5 = – ***i***

κ = 5

Z6 = cos() + ***i***·sin() = ***i***

Z6 =***i***

Ответ: Z1 =***i*** , Z2 = ***i***, Z3 = –***i*** , Z4 = –***i***, Z5 = – ***i***,Z6 =***i***

**3)**

Доказать, что сумма двух комплексных чисел не превосходит сумму модулей этих чисел.

1 СПОСОБ:

Пусть Z1=X+Y⋅***i***  и Z2=U+V⋅***i***

Доказать что:





Предположим противоположное:

 / т.к. корень существует только из неотрицательного числа, то можно возвести в квадрат обе части неравенства.

X2+2XU+U2+Y2+2YV+V2  X2+Y2+U2+V2+2

2(XU+YV) 2

Если мы предположили верно, то XU+YV 0, а поэтому возведем в квадрат:

X2U2+2XUYV+Y2V2  X2U2 + X2V2+Y2U2+Y2V2

2XYVU X2V2+Y2U2

X2V2+Y2U2 – 2XYVU < 0

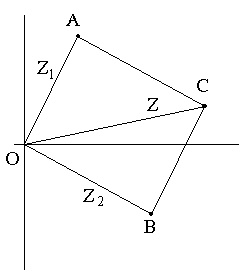
(XV + YU)2 < 0

Это невозможно, т.к. A2  0, значит полученное нами неравенство неверно.



что и требовалось доказать

2 СПОСОБ:



Пусть Z1 и Z2 – два произвольных комплексных числа. Z1­– соответствует точке A, Z2 – соответствует точке B.

В силу неравенства треугольника

 т.е.



Что и требовалось доказать.