**Как начиналась геометрия**

Доктор физико-математических наук В. П. Смилга

Истинное начало этой истории теряется во мгле времён.

Где, как и когда начиналась геометрия?.. Где, как и когда обрела она законченную форму и заслужила право называться наукой?.. Кто был тот неведомый, первый, предложивший аксиоматическое её построение? Не знаем и, вероятно, не узнаем.

Принято думать, что это сделали греки. Быть может, прославленные египетские жрецы или не менее прославленные халдейские маги суть истинные отцы этой науки. Но они не озаботились тем, чтобы оставить для потомков труды, подтверждающие их приоритет.

Как бы то ни было, в седьмом веке до нашей эры геометрия приходит в Грецию. И здесь греки, поклонники холодной логики и филигранного изящества чистого интеллекта, любовно оттачивают (или, быть может, создают?) одно из самых красивых и долговечных творений человеческой мысли — науку геометрию.

Тогда-то и начинается азартная и драматическая игра в чистую логику, затянувшаяся вот уже на два с половиной тысячелетия...

**Фалес**

Предполагают, что геометрию начинала Ионийская школа, а точнее, сам её основатель — Фалес Милетский, проживший что-то около сотни лет (640–540 или 546 годы до нашей эры).

Толком мы мало что знаем о нём.

Точно известно, что имел он титул одного из семи мудрецов Греции, что по официальному счёту идёт как первый философ, первый математик, первый астроном и вообще первый по всем наукам в Греции. По-видимому, он был тем же для Греции, что Ломоносов для России. В молодости Фалес попал в Египет, куда фараон Псамметих только-только начал допускать иностранцев. Вероятно, он оказался там по торговым делам — известно, что свою карьеру Фалес начинал купцом.

В Египте Фалес застрял на много лет, изучая науки в Фивах и Мемфисе. Потом он вернулся домой и основал философскую школу, выступая, очевидно, не столько как самостоятельный мыслитель, сколько как популяризатор египетской мудрости.

Считается, что геометрию и астрономию привёз именно он.

Что именно сделал он в геометрии, мы можем только гадать, хотя греческие авторы приписывали ему довольно много.

Например, Прокл Диддох утверждает, что Фалес доказал теоремы о равенстве вертикальных углов, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о том, что диаметр делит круг пополам и ещё ряд других.

Допустив даже, что все историки писали сущую истину, мы не можем сказать, самостоятельно ли Фалес пришёл к этим теоремам или просто пересказал идеи египтян.

По-видимому, единственный бесспорный факт из его научной деятельности — предсказание солнечного затмения 585 года до нашей эры. Но легенд о Фалесе ходило множество, и это само по себе доказывает, что учёный он был крупный.

Во всяком случае, одному у него могут поучиться все философы: краткости. Полное собрание его сочинений (разумеется, до нас не дошедшее) по преданию составляло всего 200 стихов.

**Пифагор**

Ученики и последователи Фалеса уделяли немало внимания геометрии в своих учёных занятиях. Однако центральной математической школой в VI–V веках до нашей эры была, несомненно, Пифагорейская.

Биографические сведения о Пифагоре в основном сводятся к нескольким анекдотам. В этом он очень походит на Фалеса Милетского. Неясности начинаются уже с вопроса о его происхождении. Бертран Рассел, суммируя имеющиеся данные, заключает: «Некоторые говорят, что он был сыном состоятельного гражданина по имени Мнесар, другие же считают, что он был сыном бога Аполлона. Я предоставляю читателю выбирать между двумя этими противоположными версиями».

Полагают, что жил Пифагор столь же основательно, что и Фалес, — около ста лет (предположительно 560–470 или 580–500 годы до нашей эры, что для нас почти одно и то же). Опять же, как и Фалес, он лет двадцать набирался мудрости в Египте; затем (и в этом он Фалеса превзошёл) ещё лет десять жил в Вавилоне, где тоже поднакопил знаний. Утверждают также, что он путешествовал по Индии, но этому никто не верит.

В каждой второй брошюре о боксе можно прочитать, что Пифагор был олимпийским чемпионом по кулачному бою, хотя первоисточник столь любопытных данных никогда не указывается (по крайней мере мне он не известен). Приятно, впрочем, сознавать, что философ и математик может оказаться боксёром экстра-класса.

Но если насчёт боксёрских данных Пифагора и есть некоторые сомнения, то о его активном, хотя и не очень удачном, вмешательстве в политику мы знаем наверняка. Известно, например, что граждане сицилийского города Кротона, где он основал по возвращении из дальних стран свою школу и попутно втравил весь город в тяжёлую междоусобную войну, в итоге попросили его убраться вместе со школой. Это он и сделал, и довольно поспешно, что было разумно и своевременно.

Особых восторгов как личность Пифагор не вызывает, хотя, несомненно, учёным он был очень сильным. Его Пифагорейский орден философов и математиков слишком уж напоминает казарму, а сам основатель и глава подозрительно смахивает на какого-то фюрера, хотя и несравненно более культурного, чем те, что имели успех в двадцатом столетии.

Это нам Пифагор представляется в основном математиком. Сам же он, как и его современники, полагал, что истинная его профессия — пророк. А как известно, каждый пророк обязан отчасти быть фокусником, отчасти демагогом, отчасти шарлатаном. Всем этим Пифагор, видимо, владел в полном ассортименте. А ученики, стараясь по мере сил, распространяли в массах доказательства богоизбранности учителя. Рассказывали, что у него было золотое бедро; рассказывали, что достойные люди видели его одновременно в двух разных местах; рассказывали также, что когда однажды он переходил вброд реку, последняя от восторга вышла из берегов, радостно восклицая: «Да здравствует Пифагор!». (На мой взгляд, речной бог выбрал не лучший способ прославления, ибо в первую очередь Пифагор должен был изрядно вымокнуть. Но так передавали эту историю ученики.)

Говорят также, что он читал проповеди скотам, поскольку мало различал их и людей.

Именно сам Пифагор — очевидно, для пущего авторитета — распространял, популяризировал, холил и лелеял идею, что его родитель не кто иной, как светоносный и лучезарный Аполлон (задав тем самым немало лишней работы своим биографам).

Кроме того, Пифагор оказался истинным отцом популярного и ныне обычая — присваивать научные результаты своих учеников. Причём дело было поставлено вполне официально: существовал декрет, по которому авторство всех математических работ школы приписывалось Пифагору. Хотя подобные вещи не такая уж редкость и в наши дни, всё же двадцать пять столетий несколько смягчили и облагородили нравы. Великий же Пифагор вообще вне конкуренции на этой стезе. Он исхитрился устроить так, что верные ученики объявляли его автором работ, выполненых намного позже его кончины.

Понятно, что при таких порядках наиболее безусловным и безоговорочным научным доводом в Пифагорейской школе считалась ссылка на «самого». Так и говорили на хорошем древнегреческом языке: «Сам сказал». После чего дискуссия была неуместна и даже несколько опасна.

Далее, решения математических задач тщательно засекречивались. Были и другие «табу», сведённые в подробный список, слегка напоминающий творчество сумасшедшего руководителя детского сада. Опасаясь показаться голословным, я процитирую часть правил хорошего тона для джентльменов из Пифагорейского клуба. Вот они:

Воздерживайся от употребления в пищу бобов.

Не поднимай то, что упало.

Не прикасайся к белому петуху.

Не откусывай от целой булки.

Не ходи по большой дороге.

Вынимая горшок из, огня, не оставляй следа его на золе, но помешай золу.

И так далее, все в том же духе.

И эта компания время от времени захватывала власть то в одном, то в другом греческом городе, устанавливая там культ Пифагора и, соответственно, требуя выполнения своего устава. Правда, как меланхолически замечает Бертран Рассел, «те, которые не были возрождены новой верой, жаждали бобов и рано или поздно восставали».

Как уже было сказано, накопленные знания пифагорейцы тщательно скрывали. И, кто знает, может быть, геометрия осталась бы неизвестной всему человечеству до самых наших дней, если бы не оплошность одного из рядовых членов Пифагорейской школы. Вот как пифагорейцы объясняли, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги общины. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги, преподавая геометрию, — и геометрия получила название «Предание Пифагора».

Любопытно, что, судя по всему, существовал учебник геометрии с таким названием.

Что же касается истории с деньгами, если в ней есть зерно истины, я, хотя не считаю себя злорадным человеком, был бы счастлив узнать, что наш пифагореец отнюдь не потерял деньги, а прокутил их в ближайшем портовом кабачке, потягивая вино, наслаждаясь похлёбкой из белого петуха с бобовой приправой, с удовольствием кусая от целой булки и распевая затем негармоничные песни на большой дороге. [Всё-таки встряну со своим комментарием. Сегодня, через две с половиной тысячи лет Пифагор со своими «правилами хорошего тона» может показаться странным и даже неумным. Но, во-первых, ещё Литлвуд призывал не относиться к античным классикам снисходительно: «Греки — это не способные школьники или хорошие студенты, но, скорее, "коллеги из другого колледжа"». А во-вторых, в книге Пифагора «Золотой канон. Фигуры эзотерики» (М., Эксмо, 2004), где комментарии гораздо более уважительны, пятое правило приводится в следующем виде:

Не следует ходить торными дорогами. Избегая торных дорог (по которым идёт большинство), ходи тропинками.

Так что этот совет больше на эппловское «Think different» смахивает, чем на бред сумасшедшего. — E.G.A.]

На этом мы и расстанемся с Пифагором. Нам предстоит отметить великие заслуги перед геометрией ещё одного малоприятного, на мой вкус, человека.

**Платон**

Платон, живший в 428–348 годах до нашей эры, считается, и, должно быть, справедливо — я не специалист — одним из величайших философов Греции.

Геометрия ко времени Платона уже была очень развита. Было решено много весьма и весьма сложных задач, доказаны сложнейшие теоремы. Но ясной позиции во взглядах на общую схему построения науки ещё не было. Развитие геометрии, как нередко бывает в науке, стимулировалось задачами, решения которых никак не удавалось отыскать. Требовалось при помощи циркуля и линейки, не привлекая никаких других геометрических инструментов:

разделить данный угол на три равных части (трисекция угла);

построить квадрат с площадью, равной площади данного круга (квадратура круга);

построить куб с объёмом, в два раза большим объёма данного куба (делосская задача).

Только в конце прошлого века было доказано, что в такой постановке ни одна из этих задач не может быть решена, хотя, если использовать другие геометрические инструменты или (что то же) использовать при построении геометрические места точек, отличные от прямой либо дуги окружности, то все три задачи легко решаются.

Однако принятые у греков правила игры не позволяли пользоваться при решении задач ничем, кроме циркуля и линейки. Платон даже обосновал это ссылкой на авторитет богов.

Так что ни одна из проблем решена не была, но по ходу дела геометрия была основательно разработана.

Я с великим сожалением опускаю все анекдоты, связанные с этими задачами. Историй много, и все они прелестны, но нельзя слишком отвлекаться. Вспомню лишь одно из преданий, связанное именно с Платоном и показывающее его с лучшей стороны.

Однажды, рассказывает Эратосфен, на острове Делосе вспыхнула эпидемия чумы. Жители острова, естественно, обратились к Дельфийскому оракулу, который повелел удвоить объём золотого кубического жертвенника Аполлону, не изменяя его формы. За советом обратились к Платону. Платон задачи не решил, но зато истолковал оракула в том смысле, что боги гневаются на греков за нескончаемые междоусобные войны и желают, чтобы они, греки, вместо кровавых побоищ занимались бы науками и особенно геометрией. Тогда чума исчезнет.

Платон очень много сделал для развития математики и весьма ценил её. На входе в его академию был даже высечен весьма категорический лозунг: «Да не войдёт сюда тот, кто не знает геометрии». Дело в том, что Платон полагал: «Изучение геометрии приближает к бессмертным богам» — и воспитывал в этом духе своих учеников, приплетая математику к месту и не к месту.

По-видимому, Платон первый чётко потребовал: математика вообще и геометрия в частности должны быть построены дедуктивным образом. Иначе говоря, все утверждения (теоремы) должны строго логически выводиться из небольшого числа основных положений — аксиом. Такая постановка — крупнейший шаг вперёд.

Некоторые из учеников Платона выросли в блестящих геометров. Но надо сказать, что и по своим взглядам, и по методам организации школы, и по любви к саморекламе Платон очень напоминает Пифагора.

На мой взгляд, как философ и как человек, Платон довольно несимпатичен. Во всяком случае, созданная им теория идеального государства, образцом которого послужила реальная и вполне фашистская страна — Спарта — восторга, мягко говоря, не вызывает. Основные положения его утопии в общем удовлетворяют требованиям нацистов. Всю свою жизнь он яростно боролся против демократии в политической жизни и против материализма в духовной. Философов-материалистов Платон не только абстрактно поносил в своих философских сочинениях, но, демонстрируя неплохую практическую хватку, нередко дискутировал, как сказали бы теперь, «в жанре политического доноса».

Приведу пример. Был в те времена в Греции замечательный философ, один из первых материалистов — Анаксагор. (Мы почти ничего не знаем о его геометрических работах; известно, однако, что в темнице, где ему пришлось сидеть за свои взгляды, он исследовал проблему квадратуры круга.)

И вот Платон в одном из сочинений — в диалоге жителя Афин (рупор самого Платона) и спартанца — так расправляется с Анаксагором.

Афинянин: «Когда мы, стремясь получить доказательства существования богов, ссылаемся на Солнце, Луну, Звёзды и Землю как на божественные существа, то ученики этих новых мудрецов возражают нам, что всё это ведь только земля и камни, и они (т.е. камни) совершенно не в состоянии заботиться о людских делах».

Спартанец молниеносно чует ересь и возмущённо восклицает: «Какой же вред для семьи и государства проистекает от таких настроений у молодёжи!».

Так дискутировал Платон.

**Евклид**

К IV–III векам до нашей эры геометрия вполне оформилась как наука. Были устоявшиеся традиции, детально разработанные методы решения задач, крупные достижения, было уже несколько учебников и различные научные школы.

Рассказать обо всех геометрах доевклидового периода — а список математиков того времени включает несколько десятков славных имён — и об их работах, естественно, невозможно. И поскольку у нас не многотомный исторический труд, а небольшая статья, оставим предтеч и перейдём непосредственно к Евклиду.

Жил и работал он во время весьма любопытное.

В 323 году до нашей эры то ли вследствие острой лихорадки, то ли в результате неумеренного пьянства или просто от доброй порции яда отправился на свидание к отцу своему Зевсу царь царей земных, изрядно уже потрёпанный жизнью, хотя сравнительно молодой, тридцатитрёхлетний мужчина — Александр Македонский.

Полубога подобающим образом проводили и перешли к текущим делам. А дел хватало: надо было делить империю. Размеры её были невероятны. Всего лишь за десять лет оказались завоёванными страны, в сотни раз превосходившие маленькую полунищую Македонию.

Границы известного мира расширились во много раз, и теперь предстояло переварить проглоченное. Было ясно, что для одного такое наследство непомерно, и отдавать всё малолетнему брату Александра или же второму наследнику — сыну, появившемуся на свет через несколько месяцев после смерти отца, было просто смешно. Посему империю полюбовно растащили те полководцы, которых Александр не успел казнить. Они поклялись в вечной дружбе, заключили вечный мир, порядком выпили на радостях, обменялись суровыми мужскими пожатиями на прощанье — и, естественно, началась междоусобная резня.

Более других в этой сваре повезло осмотрительному Птолемею, который при делёжке отхватил себе Египет. Наследники его постепенно ассимилировались, а династия оказалась не только самой прочной и долговечной, но и прославилась тем, что дала истории Клеопатру.

И самый первый Птолемей, и все последующие Птолемеи славны тем, что были покровителями наук. Какие у них на то были мотивы, трудно сейчас разобраться, но факты таковы: в III–II веках до нашей эры Александрия превратилась в основной научный центр эллинистического мира. И наиглавнейшим научным институтом был знаменитый Александрийский музей с Александрийской библиотекой. Сюда-то и пригласил Птолемей Евклида, и именно здесь Евклид написал «Начала» — книгу, в истории человечества бесспорно уникальную.

Снова я должен сделать традиционное уже признание: о самом Евклиде практически ничего не известно.

Легенды, конечно же, имеются. Рассказывают, например, что Птолемей поначалу сам захотел одолеть премудрости геометрии, но довольно скоро обнаружил, что изучение математики требует некоторых усилий. Тогда он призвал Евклида и вопросил его, полагаю, как джентльмен джентльмена, нельзя ли постигнуть все тайны науки как-нибудь попроще? На что Евклид ответил: «В геометрии нет царского пути». Остаётся неведомым, продолжал ли после этого царь занятия математикой (вероятнее всего, он утешился в занятиях, более приличествующих царям, — таких, как приёмы, охота, пиры, услады гарема, наконец).

Рассказывают также, что однажды к Евклиду явился изучать геометрию некий молодой прагматик. Первый вопрос, который он задал будущему учителю, был следующий: какая практическая польза будет от штудирования «Начал»? Тогда Евклид, весьма и весьма задетый, призвал раба и сказал: «Дай ему обол (грош), он ищет выгоды, а не знаний».

Надо, впрочем, сознаться, что обе истории столь традиционны, учитывая представление древних греков о мудрецах и о математике, что особо доверять им не приходится. «Точные» же биографические данные основываются на заметках неизвестного арабского математика XII века: «Евклид, сын Наукрата, сына Зенарха, известный под именем Геометра, учёный старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира...»

Всё.

Человек бесследно растворился в веках. Осталась его работа.

«Начала»

Повторюсь — эта книга уникальна. Более двух тысяч лет она была главным и практически единственным руководством по геометрии для учёных как западного, так и восточного мира. Ещё в конце XIX столетия во многих английских школах геометрию изучали по адаптированному изданию «Начал», и вряд ли можно найти более выразительное свидетельство популярности. В этом смысле конкурировать с «Началами» могут разве что Библия и Евангелие.

Но, в отличие от них, основа «Начал» — строгая и жёсткая логика, точнее, Евклид всё время стремится к таковой. Можно полагать, что он был последователем Платона и Аристотеля. А Платон, как вы помните, требовал строго дедуктивного построения математики.

В фундаменте — аксиомы, основные положения, принимаемые без доказательства, а далее всё должно быть строго логично выведено из аксиом. Этот идеал и пытается осуществить Евклид.

С современных позиций буквально вся его аксиоматика неудовлетворительна. Но это легко заявлять сейчас, после 25 веков исследований. А в своё время логика Евклида оставляла совершенно подавляющее впечатление. Во всяком случае, не следует забывать, что сама логическая схема её стала с тех пор канонической для построения любого раздела математики.

Попытки изложить геометрию на основе аксиоматического метода были и до Евклида. Но можно уверенно заключить, что работа Евклида была наиболее удачной. Свидетельство тому — необычайная известность его книги уже в древнем мире, благодаря которой она и дошла до нас.

«Начала» блестяще написаны, в них чувствуется мастер своего дела, тонкий учёный и великолепный педагог. Поэтому поголовное поклонение математиков Евклиду и его «Началам» понятно и оправданно. Добавим ещё, что эта книга обратила в математическую веру несколько десятков молодых людей, ставших впоследствии крупнейшими математиками мира.

Влияние Евклида было поразительно во все века во всех краях света. Вот, например, в каких восхищённых тонах говорил о «Началах» один из виднейших математиков эпохи Возрождения Кардано: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

А вот слова неизвестного английского геометра (это уже середина XIX века): «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида; и до тех пор, пока я не увижу этого собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать».

Приведу одно яркое свидетельство влияния «Начал» буквально на все области мышления. Один из крупнейших в истории Западного мира философов, замечательный не только как философ, но и как человек — Спиноза — весь план своего основного сочинения «Этика» целиком заимствовал у Евклида.

И, наконец, для тех, кого не убеждает пример Спинозы, я приберёг Ньютона. Его основополагающий труд «Математические начала натуральной философии» копирует не только заглавие книги Евклида, но и её построение: великий Ньютон тоже выводит все свои результаты из набора аксиом!