Математическое моделирование в экономике

Важнейшим видом формализованного знакового моделирования является математического моделирование, осуществляемое средствами языка математики и логики. Для изучения какого-либо класса явлений внешнего мира строится его математическая модель, т.е. приближенное описание этого класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

Сам процесс математического моделирования можно подразделить на четыре основных этапа:

I этап: Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

II этап: Исследование математических задач, к которым приводят математические модели.

Основной вопрос - решение прямой задачи, т.е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

III этап: Корректировка принятой гипотетической модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Если модель была вполне определена - все параметры ее были даны, - то определение уклонений теоретических следствий от наблюдений дает решения прямой задачи с последующей оценкой уклонений.

Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются не определенными.

Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели.

IV этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели.

С появлением ЭВМ метод математического моделирования занял ведущее место среди других методов исследования. Особенно важную роль этот метод играет в современной экономической науке. Изучение и прогнозирование какого-либо экономического явления методом математического моделирования позволяет проектировать новые технические средства, прогнозировать воздействие на данное явление тех или иных факторов, планировать эти явления даже при существовании нестабильной экономической ситуации. Экономические модели, исходя из общего процесса математического моделирования, строятся следующим образом:



Математические методы, основанные на математическом моделировании, все шире применяются в промышленно-экономических исследованиях, в частности, в операционных исследованиях.

Операционные исследования являются методом выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию управленческих решений. Описание всякой задачи операционных исследований включает в себя задание факторов решения, которые являются численными переменными, налагаемых на них ограничений (отражающих ограниченность ресурсов) и системы целей.

Всякая система факторов решения, удовлетворяющих всем ограничениям, называется допустимым решением. Каждой из целей соответствует целевая функция, заданная на множестве допустимых решений, значения которых выражают меру осуществления цели.

Сущность задачи операционных исследований состоит в нахождении наиболее целесообразных, оптимальных решений. Поэтому задачи операционных исследований обычно называются оптимизационными.

Для разработки наиболее важных задач в операционных исследованиях широко используются математические модели, построенные на статистической или вероятностной (стохастической) основе. Они помогают учесть даже такие факторы, просчитать точное изменение которых практически невозможно.

Особенно часто применяются математические модели очередей и управления запасами.

Теория очередей опирается на разработанную учеными А.Н. Колмогоровым и А.Л. Ханчиным теорию массового обслуживания.

Теория массового обслуживания.

Данная теория позволяет изучать системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера. Случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание. Целью методов теории является отыскание разумной организации обслуживания, обеспечивающей заданное его качество, определение оптимальных (с точки зрения принятого критерия) норм дежурного обслуживания, надобность в котором возникает непланомерно, нерегулярно.

С использованием метода математического моделирования можно определить, например, оптимальное количество автоматически действующих машин, которое может обслуживаться одним рабочим или бригадой рабочих и т.п.

Типичным примером объектов теории массового обслуживания могут служить автоматические телефонные станции (АТС). На АТС случайным образом поступают “требования” - вызовы абонентов, а “обслуживание” состоит в соединении абонентов с другими абонентами, поддержание связи во время разговора и т.д. Задачи теории, сформулированные математически, обычно сводятся к изучению специального типа случайных процессов.

Исходя их данных вероятностных характеристик поступающего потока вызовов и продолжительности обслуживания и учитывая схему системы обслуживания, теория определяет соответствующие характеристики качества обслуживания (вероятность отказа, среднее время ожидания начала обслуживания т.п.).

Предположим, что автоматическая линия связи имеет  одинаково доступных для абонентов каналов. Вызовы поступают в случайные моменты времени. Если при поступлении очередного вызова все  каналов лини связи оказываются занятыми, то поступивший вызов получает отказ и теряется. В противном случае немедленно начинается разговор по одному из свободных каналов, длящийся случайное время.

Одной из характеристик эффективности работы такой линии связи является доля вызовов, получающих отказ, т.е. предел при (если он существует) отношения  числа вызовов, потерянных в течение времени , к общему числу вызовов, поступивших за это время. Этот предел можно назвать вероятностью отказа.

Другим показателем качества работы линии связи может служить отношение времени ее занятости, т.е. предел  при  (если он существует) отношения

** / **, где ** -** суммарное время, в течение которого за период **** все  каналов линии связи одновременно заняты. Этот предел можно назвать вероятностью занятости.

Обозначим  число каналов, занятых в момент . Тогда можно показать, что: если , во-первых, моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток однородных событий, во-вторых, длительности разговоров последовательных абонентов суть независимые (между собой и от моментов поступления вызовов) одинаково распределенные случайные величины, то случайный процесс  , обладает эргодичным распределением, т.е. существуют [независящие от начального распределения  ] пределы



причем

 (\*)

где  - произведение интенсивности потока поступлений вызовов на среднюю длительность разговора отдельного абонента.

Кроме того, в этом случае , и их общее значение равно .

Формулы (\*), называемые формулами Эрланга, используются для расчета минимального количества каналов линии связи, обеспечивающей заданную вероятность отказа. При отказе от условия, что моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток однородных событий, равенство не может выполняться.

Математическими моделями многочисленных задач технико-экономического содержания являются также задачи линейного программирования. Линейное программирование - это дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных равенств и неравенств.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача планирования работы предприятия.

Для производства однородных изделий необходимо затратить различные производственные факторы - сырье , рабочую силу, станочный парк, топливо, транспорт и т.д. Обычно имеется несколько отработанных технологических способов производства, причем в этих способах затраты производственных факторов в единицу времени для выпуска изделий различны.

Количество израсходованных производственных факторов и количество изготовляемых изделий зависит от того, сколько времени предприятие будет работать по тому или иному технологическому способу.

Ставиться задача рационального распределения времени работы предприятия по различным технологическим способам, т.е. такого, при котором будет произведено максимальное количество изделий при заданных ограниченных затратах каждого производственного фактора.

Формализуем задачу: Пусть имеется  количество технологических способов производства изделий и  производственных факторов.

Введем обозначения:

- количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по j - му технологическому способу;

 - расход i - го производственного фактора в единицу времени при работе по j - му технологическому способу;

 - имеющиеся ресурсы i - го производственного фактора;

 - планируемое время работы по j - му технологическому способу.

Величина



обозначает общий расход i - го производственного фактора при плане

.

Поскольку ресурсы ограничены величинами , то возникают естественные условия:

 (1)

 (2)

Ставится задача отыскания такого распределения времени (оптимального плана)  работы по каждому технологическому способу при котором общий объем продукции был бы максимальным, т.е. определяется максимум линейной функции



В операционных исследованиях эту функцию принято называть целевой функцией или критерием эффективности, вектор  - планом, вектор  - оптимальным планом , а множество, определенное условиями (1) - (2) - допустимым или множеством планов.

Еще одним ярким примером применения линейного программирования в экономике является так называемая транспортная задача.

Транспортная задача.

Это задача о наиболее рациональном плане перевозок однородного продукта из пунктов производства в пункты потребления.

Пусть имеется  пунктов производства некоего однородного продукта  и  пунктов его потребления . В пункте   производится  единиц, а в пункте   потребляется  единиц продукта.

Предполагается, что

.

Транспортные издержки, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта  в пункт  равны  .

Суть задачи состоит в составлении оптимального плана перевозок, минимизирующего суммарные транспортные издержки, при реализации которого запросы всех пунктов потребления ,  , были бы удовлетворены за счет производство продукта в пунктах  ,  .

Пусть  - количество продукта, перевозимого из пункта  в пункт  . Тогда транспортная задача формулируется так: определить значения переменных ,  ; , минимизирующих транспортные издержки.



при условиях,

 (1)

 (2)

. (3)

Множество , удовлетворяющее этим условиям, называется планом перевозок, а его элементы - перевозками.

На основе метода математического моделирования в операционных исследованиях решаются также многие важные задачи, требующие специфических методов решения. К их числу относятся:

1. Задача надежности изделий.
2. Задача замены оборудования.
3. Теория расписаний (так называемая теория календарного планирования).
4. Задача распределения ресурсов.
5. Задача ценообразования.
6. Теория сетевого планирования.

Задача надежности изделий.

Надежность изделий определяется совокупностью показателей. Для каждого из типов изделий существуют рекомендации по выбору показателей надежности.

Для оценки изделий , которые могут находиться в двух возможных состояниях - работоспособном и отказовом, применяются следующие показатели:

 - среднее время работы до возникновения отказа (наработка до первого отказа);

 - наработка на отказ;

 - интенсивность отказов;

 - параметр потока отказов;

 - среднее время восстановления работоспособного состояния;

- вероятность безотказной работы за время t ;

 - коэффициент готовности.

Существуют следующие соотношения между показателями надежности:

;

;

.

Для восстановленных изделий вероятность появления  отказов за время

 в случае простейшего потока отказов определяется законом Пуассона:

.

Из него следует, что вероятность отсутствия отказов за время  равна

 -

Данная зависимость называется экспоненциальным законом надежности.

Задача распределения ресурсов.

Вопрос распределения ресурсов является одним из основных в процессе управления производством. Для решения этого вопроса в операционных исследованиях пользуются построением линейной статистической модели.

Предположим, что предприятие располагает  видов ресурсов и  видов продукции, производимой с использованием этих ресурсов. Необходимо так распределить ресурсы, чтобы обеспечить максимальный объем продукции, и , следовательно, увеличение прибыли от ее реализации.

Введем следующие обозначения:

- количество ресурсов i-го вида ;

- максимальный объем выпуска продукции j-го вида ;

- количество единиц i-го ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-го вида;

- прибыль от реализации единицы продукции j-го вида;

- количество единиц продукции j-го вида.

Совокупная прибыль стремится к максимуму, т.е.

.

Следовательно,



Задача ценообразования.

Для предприятия вопрос образования цены на продукцию играет немаловажную роль. От того, как проводится ценообразование на предприятии, зависит его прибыль. Кроме того, в существующих сейчас условиях рыночной экономики цена стала существенным фактором в конкурентной борьбе.

Допустим, что на предприятии производится  видов продукции. Обозначим за  объем продукции i-го типа, который надо производить ,

Введем следующие обозначения:

 - объем продукции i-го типа, который надо производить ;



- цена продукции i-го типа, которую нужно определить;

 - себестоимость i-го вида продукции.

На рынке цены меняются, но на основе его изучения можно определить существование усредненной цены .



Любое предприятие стремится к получению максимальной прибыли, т.е.



Следовательно, можно считать, что .

Надо также учесть , что при образовании цены кадого вида продукции необходимо учитывать его качество, т.е. учесть зависимость цены от качества ().



Так как  выражает только часть себестоимости i-го вида продукции, без учета доли общих производственных издержек, ложащихся на продукцию, то определяем полную себестоимость i-го вида продукции



******

Так как величины  и  являются постоянными, то данная задача решается с помощью метода линейного программирования.

Теория сетевого планирования.

Сетевое планирование и управление (СПУ), является системой планирования управления разработкой крупных хозяйственных комплексов, конструкторской и технологической подготовкой производства новых видов товаров, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков.

Сущность СПУ состоит в составлении математической модели управляемого объекта в виде сетевого графика или модели находящейся в памяти ЭВМ, в которых отражается взаимосвязь и длительность определенного комплекса работ. Сетевой график после его оптимизации средствами прикладной математики и вычислительной техники используется для оперативного управления работами.

Пример сетевого графика:

 Кружочками на сетевом графике обозначается событие, т.е. начало иди конец работы, а линией со стрелкой - действия, которые надо совершить, чтобы перейти от предшествующего события к последующему.

Важным элементом разработки сетевого графика является определение продолжительности путей. Пути представлены линиями, образуемыми стрелками взаимосвязанных работ, концы которых указывают на начальное и конечное события. Различают полный и критический пути:

1. Полный путь (Lп) - путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец - с ее завершающим событием.
2. Критический путь (Lкп) - путь, имеющий наибольшую продолжительность и характеризующий время выполнения всего комплекса работ, всего проекта в целом, т.е. время достижения конечной цели.

Исходя из этих элементов, при планировании длительности работ с использованием сетевого графика рассчитываются несколько показателей, выражающих достоверную оценку времени работы :

1. Оптимальная оценка времени (минимальная продолжительность работ), т.е. наиболее ранний срок совершения событий при наиболее благоприятных условиях. Он рассчитывается как сумма всех работ, находящихся на предшествующем завершающему событию максимальном пути (Тр) 
2. Пессимистическая оценка времени (директивный срок) - максимальная продолжительность времени, необходимого для выполнения необходимого для выполнения работы при наиболее неблагоприятных условиях - (Тп)  ; где  - критический путь.
3. Наиболее вероятная продолжительность времени -Тв, показывает время выполнения работы в нормальных условиях. Определяется по следующей формуле: 
4. Резерв времени:  . Ïðè 

Решение экономических задач с помощью метода математического моделирования позволяет осуществлять эффективное управление как отдельными производственными процессами на уровне прогнозирования и планирования экономических ситуаций и принятия на основе этого управленческих решений, так и всей экономикой в целом. Следовательно, математическое моделирование как метод тесно соприкасается с теорией принятия решений в менеджменте.