**Билеты по геометрии**.

*Билет №1*

1. Аксиомы стереометрии. Теорема о существовании и единственности плоскости, проходящей через данную прямую и точку вне ее.

2. Параллелепипед, его элементы. Теорема о точке пересечения диагоналей параллелепипеда.

*Билет №2*

1. Параллельные прямые (определение). Теорема о существовании и единственности прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не лежащую на этой прямой.

2. Вывод формулы площади сферы.

*Билет №3*

1. Прямая, параллельная плоскости (определение). Признак параллельности прамой и плоскости.

2. Конус. Вывод формулы объема конуса.

*Билет №4*

1.Параллельные плоскости (определение). Признак параллельности двух плоскостей.

2. Вывод формулы объема пирамиды.

*Билет №5*

1. Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

2. Касательная плоскость (определение). Теорема о касательной плоскости шара (сферы).

*Билет №6*

1. Прямая, перпендикулярная плоскости (определение). Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Площадь боковой поверхности пирамиды. Теорема о боковой поверхности правильной пирамиды.

*Билет №7*

1. Теорема о трех перпендикулярах.

2. Вывод формулы объема шара.

Билет №8

1. Перпендикулярные плоскости (определение). Признак перпендикулярности двух плоскостей.

2. Прямая призма (определение). Теорема о боковой поверхности прямой призмы. Задача о боковой поверхности наклонной призмы.

*Билет №9*

1.Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.

2. Прямоугольный параллелепипед (определение). Теорема о квадрате диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

*Билет №10*

1. Теорема о плоскости, перпендикулярной одной из двух параллельных прямых (или обратная ей теорема).

2. Теорема о противолежащих гранях параллелепипеда.

Билет №1

**аксиомы планиметрии:**

1. какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой и точки не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую и только одну.

2. из трех точек на прямой одна о только одна лежит между двумя другими.

3. каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

4. прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

5. каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

6. на любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

7. от любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180, и только один.

8. каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

9. через точку не лежащую на данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

**Аксиомы стереометрии.**

**Стереометрия** - раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

**С1**: какова бы ни была плоскость, существует точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

**С2:** если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Этой аксиомой утверждается, что если две различные плоскости α и β имеют общую точку, то существует прямая *с* , принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если точка С принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой *с*.

**С3:** если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну. Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку С, то существует плоскость α, содержащая прямые a и b. Плоскость, обладающая этим свойством, единственна.

**Теорема 15.1:** через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

**Доказательство**: пусть АВ - данная прямая и С - не лежащая на ней точка. Проведем через точки А и С прямую (аксиома 1). Прямые АВ и АС различны, так как точка С не лежит на прямой АВ. Проведем через прямые АВ и АС плоскость α (аксиома С3). Она проходит через прямую АВ и точку С. Докажем, что плоскость α, проходящая через прямую АВ и точку С, единственна. Допустим, существует другая плоскость α1, проходящая через прямую АВ и точку С. По аксиоме С2 плоскости α и α1 пересекаются по прямой. Эта прямая должна содержать точки А, В и С. Но они не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

**Параллелепипед, его элементы.**

Если основание призмы - параллелограмм, то она называется параллелепипедом. У параллелепипеда все грани - параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими.

Бывает прямой и наклонный.

Прямой параллелепипед: основание - прямоугольник. У него все грани - прямоугольники. Прямоуг параллеп, у которого все ребра равны, называется кубом. Длины непараллельных ребер прямоуг параллеп называются его линейными размерами (измерениями). У прямоуг параллеп три измерения.

**Теорема 19.3**: диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

**Дано**: параллелепипед АВСДА1В1С1Д1., О - точка пересечения диагоналей С1А и ВД1.

**Доказательство**: рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например АС1 и ВД1. Так как четырехугольники АВСД и ДД1С1С - параллелограммы с общей стороной СД, то их стороны АВ и Д1С1 параллельны друг другу, а значит, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскости противолежащих граней параллелепипеда по параллельным прямым АД1 и ВС1. Следовательно, четырехугольник ВАД1С1 - параллелограмм. Диагонали параллелепипеда АС1 и ВД1 являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения О делятся пополам. Аналогично доказываются другие диагонали. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

**Билет №2.**

**Параллельные прямые.**

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися.

**Теорема 16.1:** через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной и только одну.

**Замечание**: утверждение единственности в теореме 16.1 не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости. Поэтому она требует доказательства.

**Доказательство**: пусть **а** - данная прямая и **А** - точка, не лежащая на этой прямой. Проведем через прямую и точку плоскость **α.** Проведем через точку **А** в плоскости **α** прямую **а1**, параллельную **а**. Докажем, что прямая **а1**, параллельная **а**, единственна. Допустим, что существует другая прямая **а2**, проходящая через точку **А** и параллельная прямой **а**. Через прямые **а** и **а2** можно провести плоскость **α2**. Плоскость **α2** проходит через прямую **а** и точку **А**, следовательно по теореме 15.1 она совпадает с **α**. Теперь по аксиоме параллельных прямые **а1** и **а2** совпадают. Теорема доказана.

**Площадь сферы. (вывод формулы).**

Площадь поверхности сферы - предел отношения объема слоя, покрывающего поверхность, к толщине этого слоя, если толщина этого стремиться к нулю.

**Билет №3.**

**Прямая, параллельная плоскости.**

Пряма и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

**Теорема 16.3**: если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

**Доказательство**: пусть α - плоскость и а - не лежащая в ней прямая и а1 - прямая в плоскости α, параллельная прямой а. Проведем плоскость β через прямые а и а1. Плоскости α и β пересекаются по прямой а1. Если бы прямая а пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой а1. Но это невозможно, так как прямые а и а1 параллельны. Итак, прямая а не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α. ЧТД.

**Вывод формулы объема конуса.**

Конусом (а точнее круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга - основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Прямой конус - прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

**Билет №4.**

**Параллельные плоскости.**

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

**Теорема 16.4:** если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

**Доказательство**: пусть **α** и **β** - данные плоскости, **а1** и **а2** - прямые в плоскости **α,** пересекающиеся в точке **А**, **в1** и **в2** - соответственно параллельные им прямые в плоскости **β.** Допустим, что плоскости **α** и **β** не параллельны, т.е. пересекаются по некоторой прямой **с**. По теореме 16.3 прямые **а1** и **а2** , как параллельные прямым **в1** и **в2**, параллельны плоскости **β**, и поэтому они не пересекают лежащую в этой плоскости прямую **с**. Таким образом, в плоскости **α** через точку **А** проходят две прямые (**а1** и **а2**), параллельные прямой **с**. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию ЧТД.

**Вывод формулы объема пирамиды.**

**Билет №5.**

**Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.**

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. Действительно, согласно определению параллельные прямые - это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Наши прямые лежат в одной плоскости - секущей плоскости. Они не пересекаются, так как не пересекаются содержащие их параллельные плоскости. Значит, прямые параллельны. ЧТД.

**Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны**. Действительно, пусть α и β - параллельные плоскости, а и в - пересекающие их параллельные прямые, А1, А2,и В1, В2 - точки пересечения прямых с плоскостями (см рисунок). Проведем через прямые а и в плоскость. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым А1В1 и А2В2. Четырехугольник А1В1В2А2 - параллелограмм, т.к. у него противолежащие стороны параллельны. А у параллелограмма противолежащие стороны равны. Значит А1А2=В1В2. ЧТД.

**Касательная плоскость** - плоскость, проходящая через точку А шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку А.

**Теорема 20.5:** касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку - точку касания.

Доказательство: пусть α - плоскость, касательная к шару, и А - точка касания. Возьмем произвольную точку Х плоскости α, отличную от А. Так как ОА - перпендикуляр, а ОХ - наклонная, то ОХ>ОА=R. Следовательно точка Х не принадлежит шару. Теорема доказана.

Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется касательной к шару в этой точке. Так как касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку, то касательная прямая тоже имеет с шаром только одну общую точку - точку касания.

**Билет №6.**

**Прямая, перпендикулярная плоскости.**

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 900. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

**Теорема 17.2:** если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

**Доказательство**:

**Площадь боковой поверхности пирамиды.**

**Теорема 19.6:** боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

**Билет №7.**

**Теорема о трех перпендикулярах.**

**Теорема 17.5:** если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

**Доказательство**: пусть АВ - перпендикуляр к плоскости α, АС - наклонная и с - прямая в плоскости α, проходящая через основание С наклонной. Проведем прямую СА1, параллельную прямой АВ. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые АВ и А1С плоскость β. Прямая с перпендикулярна прямой СА1. Если она перпендикулярна прямой СВ, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой АС. Аналогично если прямая с перпендикулярна наклонной СА, то она, будучи перпендикулярна и прямой СА1, перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной ВС. ЧТД.

**Вывод формулы объема шара.**

**Билет №8.**

**Перпендикулярные плоскости.**

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

**Теорема 17.6:** если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

**Доказательство**: пусть α - плоскость, в - перпендикулярная ей прямая, β - плоскость, проходящая через прямую в, с- прямая, по которой пересекаются плоскости α и β. Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой в с плоскостью α прямую а, перпендикулярную прямой с. Проведем через прямые а и в плоскость γ. Она перпендикулярна прямой с, т.к. прямая с перпендикулярна прямым а и в. Т.к. прямые а и в перпендикулярны, то плоскости α и β перпендикулярны. ЧТД.

**Призма** - многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

**Прямая призма** - боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям.

**Боковая поверхность призмы** (площадь боковой поверхности) - сумма площадей боковых граней.

**Теорема 19.1:** боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т.е. на длину бокового ребра.

**Доказательство**: боковые грани прямой призмы - прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

**задача о боковой поверхности наклонной призмы:** боковая поверхность наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения и бокового ребра.

**Билет №9.**

**Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.**

**Теорема 17.4:** две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

**Доказательство**: пусть а и в - две прямые, перпендикулярные плоскости α. Допустим, что прямые а и в не параллельны. Тогда существует некая прямая в1 параллельная а. Выберем на прямой в точку С, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку С прямую в1, параллельную а. Прямая в1 перпендикулярна плоскости α (теорема 17.3). пусть В и В1 - точки пересечения прямых в и в1 с плоскостью α. Тогда прямая ВВ1 перпендикулярна пересекающимся прямым в и в1. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. ЧТД.

**Прямоугольный параллелепипед** - параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями**).**

**Теорема 19.4:** в прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

**Доказательство**:

**Билет № 10.**

**Теорема 17.3**: если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

**Доказательство**: пусть а1 и а2 - две параллельные прямые и α - плоскость, перпендикулярная прямой а1. Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой а2. Проведем через точку А2 пересечения прямой а2 с плоскостью α произвольную прямую х2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку А1 пересечения прямой а1 с α прямую х1, параллельную прямой х2. Так как прямая а1 перпендикулярна плоскости α, то прямые а1 и х1 перпендикулярны. По теореме 17.1(если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны) параллельные им пересекающиеся прямые а2 и х2 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая а2 перпендикулярна любой прямой х2 в плоскости α. А это значит, что прямая а2 перпендикулярна плоскости α.

**Теорема о противолежащих гранях параллелепипеда.**