**Великие задачи древности.**

**Реферат ученика 10 ф/м б класса Кожевникова Кирилла.**

**Февраль 2002 г.**

С глубокой древности известны три задачи на построение: об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга. Они сыграли особую роль в истории математики. В конце концов было доказано, что эти задачи невозможно решить, пользуясь только циркулем и линейкой. Но уже сама постановка задачи — «доказать неразрешимость» — была смелым шагом вперёд. Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре. Немало преуспели в нестандартных и различных приближённых решениях любители математики — среди них три знаменитые задачи древности особенно популярны. Задачи кажутся доступными любому: вводят в заблуждение их простые формулировки. До сих пор редакции математических журналов время от времени получают письма, авторы которых пытаются опровергнуть давно установленные истины и подробно излагают решение какой-либо из знаменитых задач с помощью циркуля и линейки.

**КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ**

Древнегреческие математики достигли чрезвычайно большого искусства в геометрических построениях с помощью циркуля и линейки. Однако три задачи не поддавались их усилиям. Прошли тысячелетия, и только в наше время, наконец, были получены их решения.

История нахождения квадратуры круга длилась четыре тысячелетия, а сам термин стал синонимом неразрешимых задач. Как следует из подобия кругов, отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная, не зависящая от радиуса круга, она обозначается буквой *п.* Таким образом, длина окружности круга радиуса *r* равна 2πr2, а так как площадь круга равна S = 2πr2*,* то задача о квадратуре круга сводится к задаче построения треугольника с основанием 2πr2 и высотой r. Для него потом уже без труда может быть построен равновеликий квадрат.

Итак, задача сводилась к построению отрезка, длина которого равна длине окружности данного круга. Это было показано еще Архимедом в сочинении «Измерение круга», где он доказывает, что число π меньше чем

 , но больше чем ,

т.е. 3,1408 < *π <* 3,1429.

В наши дни с помощью ЭВМ число π вычислено с точностью до миллиона знаков, что представляет скорее технический, чем научный интерес, потому что такая точность никому не нужна. Десяти знаков числа π (π =3,141592653...) вполне достаточно для всех практических целей. Долгое время в качестве приближенного значения я использовали число 22/7, хотя уже в V в. в Китае было найдено приближение 355/113 == 3,1415929..., которое было открыто вновь в Европе лишь в XVI в. В Древней Индии π считали равным  =3,1622.... Французский математик Ф. Виет вычислил в 1579 г. я с 9 знаками. Голландский математик Лудольф Ван Цейлен в 1596 г. публикует результат своего десятилетнего труда - число **π**,вычисленное с 32 знаками.

Но все эти уточнения значения числа л производились методами, указанными еще Архимедом: окружность заменялась многоугольником со все большим числом сторон (рис. 1,а). Периметр вписанного многоугольника при этом был меньше длины окружности, а периметр описанного многоугольника— больше. Но при этом оставалось неясным, является ли число π рациональным, т.е. отношением двух целых чисел, или иррациональным. Лишь в 1767 г. немецкий математик И. Г. Ламберт доказал, что число л иррационально, а еще через сто с лишним лет в 1882 г. другой немецкий математик— Ф. Линдеман доказал его трансцендентность*,* что означало и невозможность построения при помощи циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу.

Конечно, способов приближенного решения квадратуры круга с помощью циркуля и линейки было придумано великое множество. Так, в Древнем Египте было распространено правило: площадь круга равна площади квадрата со стороной, равной 8/9; *π* =256/81 = =3,1604....

Были найдены и другие пути определения квадратуры круга: кроме циркуля и линейки использовали другие инструменты или специально построенные кривые. Так, в V в. до н.э. греческий математик Гиппий из Элиды изобрел кривую, впоследствии получившую название квадратрисы Динострата (ее назвали по имени другого древнегреческого математика, жившего несколько позже и указавшего способ построения квадратуры круга при помощи этой кривой).

Чрезвычайно любопытно, что квадратриса Динострата решает и вторую из знаменитых задач древности- задачу о трисекции угла. Для этого нужно отложить данный угол так, чтобы его вершина находилась в точкеО, а одна из сторон совпала с лучом *ОА*. Из точки *N* пересечения квадратрисы со вторым лучом угла опускаем перпендикуляр *NК* на *ОА,* а затем делим отрезок K*А* на три равные части. Если восставить , в точках деления перпендикуляры к прямой ;

*ОА* до пересечения с квадратрисой , а затем соединить полученные точки пересечения *l* с точкой О, то полученные углы окажутся равными. Это следует из метода построения квадратрисы. Аналогичным образом можно делить любой угол на произвольное количество равных частей.

Напомним, что в классической постановке задачи о трисекции угла такое построение требовалось произвести лишь с помощью циркуля и линейки! В 1837 г. французский математик П. Ванцель доказал, что в общем виде задача не имеет решения, а возможно такое деление лишь в нескольких исключительных случаях, в частности для угла а = π/2 и всех углов вида π/2n.

Решение задачи сводится к уравнению х3 - *Зх - а* = 0. Оказалось, что трисекция угла возможна для тех углов *α,* для которых корни этого уравнения выражаются через параметр *а* и целые числа лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

К кубическому уравнению сводится и знаменитая «делосская задача» удвоения куба. Свое название она получила от острова Делос в Эгейском море, где, по легенде, чтобы избавить жителей от эпидемии, оракул повелел удвоить алтарь, имевший форму куба. Но в действительности она, наверное, возникла в умах математиков как обобщение задачи об удвоении квадрата. Для того чтобы построить квадрат вдвое большей площади, чем данный, достаточно провести у данного квадрата диагональ (рис. 1д) и принять ее за сторону нового квадрата.

Задача об удвоении куба оказалась существенно более трудной. Если обозначить через а длину стороны исходного куба, а через х-длину стороны вдвое большего куба, то получим соотношение х3 = 2а3 -снова кубическое уравнение. В 1837 г. тот же П. Ванцель доказал, что невозможно построить с по мощью только циркуля и линейки отрезок, в 1/2 раз больший данного, т.е. подтвердил неразрешимость задачи удвоения куба.

Естественно, что существовали способы приближенного решения этой задачи и решения ее с помощью других инструментов и кривых. Так, уже в IV в. до н.э. древнегреческие математики умели находить корень уравнения x3 = 2a3 как абсциссу точки пересечения двух парабол *х2 = aу* и *у2 = 2ах,* а также других *конических сечений.*

На протяжении многих веков три знаменитые задачи древности привлекали внимание выдающихся математиков. В процессе их решения рождались и совершенствовались многие математические методы.

**УДВОЕНИЕ КУБА**

В этой задаче требуется построить циркулем и линейкой куб вдвое большего объёма, чем заданный. Ребро искомого куба равно *а*,где *а* - ребро исходного куба. Если принять, что *а* = 1, то искомое ребро *х* есть корень уравнения x3 - 2 = 0. У данного уравнения нет рациональных, а значит, и квадратично-ирациональных корней. Следовательно, удвоение куба нельзя осуществить циркулем и линейкой. Примерно такое расуждение было применено в начале XIX в., когда был подготовлен необходимый для этого алгебраический аппарат.

Считают, что задача об удвоении куба появилась во времена пифагорейцев, около 540 г. до н. э. Возможно, она возникла из задачи об удвоении квадрата, которую легко решить, опираясь на теорему Пифагора, — надо построить квадрат на диагонали данного квадрата. Согласно легенде, жители Афин, на которых боги ниспослали эпидемию чумы, отправили делегацию к оракулу на остров Делос за советом, как задобрить богов и избавиться от морового поветрия. Ответ был таков:

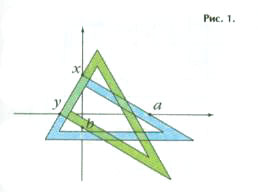
«Удвойте жертвенник храма Аполлона, и чума прекратится». Жертвенник имел кубическую форму. Афиняне решили, что задание простое, и построили новый жертвенник, с вдвое большим ребром. Однако чума только усилилась. Вторично обратились к оракулу и получили ответ: «Получше изучайте геометрию». История умалчивает о том, как удалось умилостивить богов, но чума в конце концов покинула город. А задачу об удвоении куба стали называть делосской задачей.

Известна и другая легенда. Греческий комментатор VI в. до н. э. сообщает о письме, предположительно написанном царю Птолемею I. В нём говорится, что царь Минос построил на могиле сына надгробие кубической формы, но остался недоволен размерами памятника и приказал удвоить его, увеличив вдвое ребро куба. Комментатор указывает на ошибку царя Миноса (площадь поверхности памятника в результате увеличилась в четыре, а объём — в восемь раз) и рассказывает, что тогда геометры попытались решить эту задачу.

Но так и не сумев с ней справиться с помощью циркуля и линейки, греки попробовали применить другие инструменты, механизмы и даже специальные кривые. Гиппократ Хиосский, знаменитый геометр V в. до н. э., свёл удвоение куба к построению «двух средних пропорциональных» *х* и *у* для данных отрезков *а* и *b,* т. е. к решению уравнений

a : x =x : y = y : b

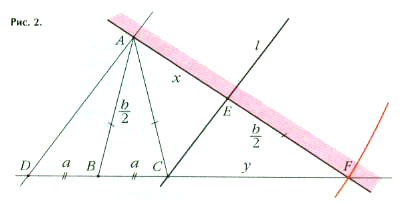
(при b=2a получаем x=a). Эту идею удалось реализовать Платону около 340 г. до н. э. с помощью нетрадиционных чертёжных инструментов — двух прямых углов (рис. 1).



Менехм примерно в .350 г. до н. э. решал задачу об удвоении куба, используя конические сечения — кривые, по которым плоскости пересекают конус. Свои решения дали также крупнейшие древнегреческие математики Евдокс, Эратосфен, Аполлоний, Герон, Папп и др.

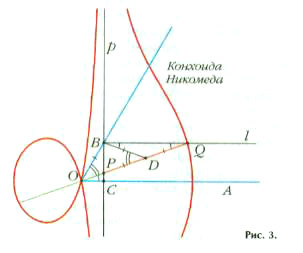
Одно из решений задачи об удвоении куба показано на рис. 2. Здесъ BC=BD, AB=AC=EF, а прямая *l=CE* параллельна АD. Полагая *ВС = a, АВ = b/2, АЕ = x* и *СF =у,* можно найти, что *x* и *y —* два средних пропорциональных *а* и *b* или что

, а 



в частности, x=aпри *b = 2а.* Все точки и линии на этой фигуре, кроме прямой *АЕF,* строятся циркулем и линейкой; а прямую можно провести, если разрешить метки на линейке. Хватит двух меток *Е* и *F;* их нужно сделать на расстоянии *b/2* друг от друга. Тогда прямую *АЕF* строят, поместив линейку так, чтобы её край проходил через A, одна метка попала на *l*, а другая на прямую *ВС.*

Никомед из Александрии (II в. до н. э.) использовал для решения этой задачи особую кривую — *конхоиду* (слово «конхоидес» в переводе с греческого означает «подобная раковине мидии»; рис. 3). На рис. 2 её опишет точка *F,* если меченую линейку перемещать так, чтобы её край всё время проходил через точку *А* (её называют *полюсом* конхоиды), в то время как точка *Е* пробегает всю прямую / *(основание* конхоиды). Постоянная длина *ЕF* называется *интервалом.* Точнее, это будет одна ветвь конхоиды; вторую её ветвь описывает точка, симметричная *Р* относительно *Е.* Никомед находил точку *Р* на рис. 2, чертя конхоиду с полюсом *А* и основанием /. Он даже изобрёл специальный прибор для вычерчивания этих кривых.



ТРИСЕКЦИЯ УГЛА

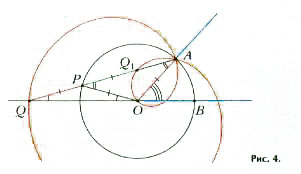
Несложно разделить любой угол с помощью циркуля и линейки на две, а некоторые углы — и на три равные части. Последняя операция называется *трисекцией угла.* Например, мы можем построить треть прямого угла, поделив пополам угол правильного треугольника, а проведя биссектрису в образовавшемся угле в 30°, получим угол величиной 15° — треть угла в 45°. Есть и другие углы, для которых трисекция выполнима. Наверное, подобные построения и вселили надежду открыть способ трисекции любого угла посредством циркуля и линейки. Эту задачу пытались решить ещё в V в. до н. э. в Греции.

На рис. 3 *А0В —* заданный угол, из точки *В* проведены прямая *p = ВС,* перпендикулярная *ОА,* и прямая *l*, параллельная *ОА.* Если теперь начертить прямую *а = ОРQ* так, чтобы её отрезок *РQ,* заключённый между *р* и *l*, равнялся *20В,* то угол *РОС* составит треть данного угла. (Это можно доказать, пользуясь тем, что треугольники *ОBD* и *ВDQ,* где *О —* середина *РQ,* равнобедренные, и теоремой о внешнем угле треугольника.) Построить прямую *а* можно с помощью меченой линейки, т. е. линейки, на которой нанесены две метки на расстоянии *20В* друг от друга.

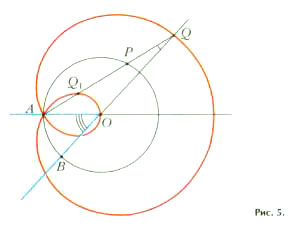
Никомед с той же целью чертил свою конхоиду с полюсом О, основанием *p* и интервалом *20В;* она пересекает *l* в искомой точке *О.*

В 1593 г. Франсуа Виет доказал, что любое кубическое уравнение можно свести либо к удвоению куба, либо к трисекции угла. Поскольку обе задачи решаются с помощью конхоиды, Ньютон предлагал включить эту кривую в число «стандартных».

Архимед придумал свой способ трисекции. На данный угол — это угол *AОВ* между радиусами окружности. С помощью меченой линейки проведём прямую через точку *А* так, чтобы её отрезок *РQ* между окружностью и продолжением прямой *ВО* равнялся радиусу окружности. Как и на рис. 3, здесь образуются равнобедренные треугольники *ОАР* и *ОРQ,* и легко доказать, что угол *ОQA* втрое меньше данного.



Конечно, и в этом случае, чтобы найти точку *Р,* можно использовать конхоиду Никомеда с полюсом *А* и основанием *0В,* а точнее, её вторую, «внутреннюю» ветвь, возникающую при откладывании постоянного отрезка от основания к полюсу. Для каждого данного угла *АОВ* здесь приходится чертить новую конхоиду. Но можно обойтись и одной кривой для всех углов. Рассмотрим конхоиду с тем же полюсом *А,* но за её основание возьмём нашу окружность (рис. 5); иначе говоря, эту конхоиду опишут точки *Q* и *Q1*, прямой АР, удалённые от *Р* на расстояние, равное радиусу, когда *Р* пробегает окружность. Получающаяся кривая известна как улитка Паскаля, названная так в честь Этьена Паскаля, отца философа и математика Блеза Паскаля. Сравнивая рис. 4 и 5, видим, что если на рис. 5 прямая *ОB* проведена под заданным углом к *ОА,* оси симметрии улитки, то угол *OQA* равен его трети.



Гиппий Элидский (около 420 г. до н. э.) для трисекции угла использовал кривую, впоследствии названную квадратрисой Динострата, который позже использовал её для решения квадратуры круга.

Квадратриса получается следующим образом. Пусть дана окружность радиуса *а*. Начнем вращать радиус *ОА* с угловой скоростью *π*/2 вокруг точки О - центра окружностии одновременно равномерно перемещать влево со скоростью *а* вертикальную прямую от точки *А* к точке С. Точка *М* их пересечения и будет описывать квадратрису. Если взять за оси координат прямую *ОА* и прямую *0В,* то в момент времени t точка *М* будет иметь координаты

a(1-t) и a(1-t) tg 

При стремлении *t* к 1 точка *М* стремится, к точке *Р,* при этом абсцисса точки *М* стремится к нулю, а у ординаты один множитель стремится к нулю, а другой - к бесконечности. Их произведение будет стремиться к числу 2а/*π*, поэтому длина отрезка *ОР* равна 2a/π. Следовательно, имеет место соотношение *АС/ОР=π.*

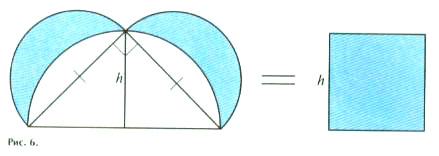
Пусть теперь дана окружность радиуса г. Тогда имеем соотношение 2*πr*/2r = *АС/ОР,* в котором известны *АС, ОР* и 2r-диаметр данной окружности. По ним мы можем построить отрезок, равный 2r- длине окружности, это будет четвертый пропорциональный отрезок к известным трем.

Французский математик П. Ванцель в 1837 г. первым строго доказал, что невозможно осуществить трисекцию циркулем и линейкой. Пусть β = α/3. По известной формуле, соs α = *=* 4 соs3 β - 3 соs β. Тогда для величины *х* = 2 сов β получается уравнение *x*3 – *3x - а = 0,* где *а =* 2 соs α . Геометрическая задача трисекции данного угла а циркулем и линейкой разрешима тогда и только тогда, когда полученное алгебраическое уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Возьмём, например, *α =* 60°. Тогда уравнение примет вид *х3* – *3x -* 1 = 0. Оно неразрешимо в квадратных радикалах, а потому и трисекция с помощью циркуля и линейки в данном случае невозможна. Тем более она невозможна в общем случае. Интересно, что вообще для углов вида Зб0°/*n* с целым *п* трисекцию удаётся осуществить тогда и только тогда, когда *n* не делится на 3.

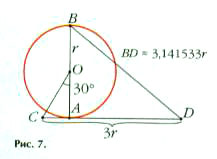
**КВАДРАТУРА КРУГА**

В задаче о квадратуре круга требуется построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу. Вероятно, задача была известна уже за две тысячи лет до н. э. в Древнем Египте и Вавилоне. Но первая прямая ссылка на неё относится к V в. до н. э. По свидетельству древнегреческого историка Плутарха, философ Анаксагор, коротая время в тюрьме, пытался квадрировать круг, т. е. превратить его в равновеликий квадрат. Если считать радиус данного круга равным 1, то сторона искомого квадрата должна составить .

Надежды «квадратурщиков» подогревались существованием криволинейных фигур, квадрируемых циркулем и линейкой. Гиппократ Хиосский нашёл одну из таких фигур, известную как «луночки Гиппократа» (рис. 6). Он нашёл и другие луночки, допускающие квадратуру, что, конечно, не помогло ему решить саму исходную задачу. Заметим, что вопрос о том, какие луночки квадрируемы, оказался сложным и был полностью решён только в XX в., советским математиком Н. Г. Чеботарёвым.



Было предложено множество построений. В лучшем случае они давали приближённое значение π с достаточно хорошей точностью (см., например, рис. 7). Однако, в отличие от приведённых выше решений двух других знаменитых задач, эти построения были принципиально приближёнными. Впрочем, авторы таких построений часто не сомневались в их абсолютной точности и горячо отстаивали свои заблуждения. Один из самых громких споров на эту тему произошёл в Англии между двумя выдающимися учёными XVII в. — философом Томасом Гоббсом и математиком Джоном Валлисом. В весьма почтенном возрасте Гоббс опубликовал около десяти «решений» задачи о квадратуре круга.



Итак, задача о квадратуре круга оказалась наиболее сложной из трёх. Метод, использованный в двух других задачах, здесь не подошёл, так как число π имеет совершенно другую природу, чем  или корни уравнений, к которым сводится трисекция. Только в 1882 г. Фердинанд Линдеман доказал, что число π трансцендентно, т. е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Значит, оно и не квадратично-иррационально, поскольку в противном случае было бы корнем какого-либо многочлена. Так Линдеман наконец поставил точку в проблеме разрешимости посредством циркуля и линейки последней из трёх классических задач древности.

**Список литературы**

Энциклопедия по математике «Аванта+» (М. Аксенова, Г. Храмов).

Энциклопедический словарь юного математика (А. Симоненко).

Прикладная алгебра ( М. Поздняк, Ф. Груздь).