**Решение текстовых задач**

Карпова Ирина Викторовна, старший преподаватель кафедры алгебры ХГПУ

Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, можно условно классифицировать по типам:

задачи на числовые зависимости;

задачи, связанные с понятием «процента»;

задачи на прогрессии;

задачи на движение;

задачи на совместную работу;

задачи на смеси и сплавы.

Стандартная схема решения текстовой задачи состоит из нескольких этапов:

Обозначение буквами x, y, z, ... неизвестных величин, о которых идет речь в задаче.

Составление с помощью введенных переменных и известных из условия задачи величин уравнения или системы уравнений (в некоторых случаях – систем неравенств).

Решение полученного уравнения или системы уравнений.

Отбор решений, подходящих по смыслу задачи.

Выбирая неизвестные и составляя уравнения, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Это означает, что все соотношения должны следовать из конкретных условий задачи, то есть каждое условие должно быть представлено в виде уравнения (или неравенства).

Рассмотрим примеры решения некоторых типов задач из приведенной выше классификации, предварительно выделив особенности задач каждого типа, которые надо учитывать при их решении.

Задачи на движение

Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, время, а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении этих задач принимают следующие допущения:

Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.

Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.

Если тело с собственной скоростью х движется по реке, скорость течения которой равна у, то скорость движения тела по течению считается равной (х+у), а против течения – (х-у).

При решении задач на движение рекомендуется сделать рисунок, отображающий все условия задачи. При этом решающий задачу должен выбрать схему решения: какого вида уравнения составлять, то есть что сравнивать: время, затраченное на движение на отдельных участках пути, или пройденный каждым объектом путь.

При решении задач такого типа часто необходимо узнать время встречи двух объектов, начинающих движение одновременно из двух точек с разными скоростями и движущихся навстречу друг другу либо в случае, когда один объект догоняет другой.

Пусть расстояние между точками А и В равно S. Два тела начинают движение одновременно, но имеют разные скорости v1 и v2. Пусть С – точка встречи, а t – время движения тел до встречи. В случае движения навстречу друг другу имеем АС=v1t, BC=v2t. Сложим эти два равенства:

*А*

*С*

*В*

v*1*

v*2*

АС+СВ=v1t+v2t=(v1+v2)t ⇒ AB=S=(v1+v2)t ⇒ .

Если одно тело догоняет другое, то теперь получаем АС=v1t, BC=v2t. Вычтем эти равенства:

АС–ВС=(v1–v2)t.

*А*

*С*

*В*

v*1*

v*2*

Так как АС–ВС=AB=S, то время, через которое первое тело догонит второе, определяется равенством

.

Задача 1. Пароход прошел 4 км против течения реки, а затем прошел еще 33 км по течению, затратив на весь путь один час. Найдите собственную скорость парохода, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.

Решение:

Пусть х км/ч – собственная скорость парохода.

Тогда (х+6,5) км/ч – скорость парохода по течению.

(х–6,5) км/ч – скорость парохода против течения.

Так как против течения пароход прошел 4 км со скоростью (х–6,5) км/ч, то

 ч. – время движения парохода против течения.

Так как по течению пароход прошел 33 км со скоростью (х+6,5) км/ч, то

 ч. – время движения парохода по течению.

По условию 

решим полученное уравнение





Откуда получаем квадратное уравнение

х2–37х+146,25=0 ⇒ х1=4,5 км/ч и х2=32,5 км/ч.

Осуществим отбор полученных решений.

Через х мы обозначили собственную скорость парохода, при этом скорость течения реки 6,5 км/ч, поэтому х1=4,5 км/ч не подходит по смыслу задачи (при такой скорости пароход не выплыл бы против течения).

Поэтому, собственная скорость парохода равна 32,5 км/ч.

Ответ: v=32,5 км/ч.

Задача 2. Расстояние между городами А и В равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из А в В, другой из В в А. Пройдя 20 км, поезд, идущий из А в В, останавливается на полчаса, затем, пройдя 4 минуты, встречает поезд, идущий из В. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Найдите скорости поездов.

Решение:

Отобразим все условия задачи на рисунке.

*4 мин.*

*A*

*B*

*C*

*D*

v*1*

v*2*

*60*км

Заметим, что если время в условии задачи выражено как в часах, так и в минутах, то минуты надо перевести в часы. В нашем случае 4 мин=4/10 часа=1/15 часа.

Так как в задаче надо определить две величины, введем две переменные и составим два уравнения.

Пусть х км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта А;

у км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта В.

Так как в задаче известно расстояние, выразим время через скорость и расстояние.

 – время, за которое поезд из А прошел 20 км.

 – время, затраченное поездом из А до встречи в пункте D.

 – расстояние, которое прошел поезд из А за 4 минуты после остановки.

Тогда поезд из А до встречи в пункте D прошел  км.

 км – расстояние, пройденное поездом из В до встречи.

 – время, пройденное поездом из В до встречи в пункте D.

Так как по условию в пункте D поезда встретились, они затратили на путь до встречи одинаковое время, поэтому получаем первое уравнение

.

С другой стороны, выразим время движения поездов после встречи в пункте D.

Так как , то  – время движения поезда из В после встречи.

Так как , то  – время движения поезда из А после встречи.

По условию .

Таким образом, мы составили систему двух уравнений с двумя переменными.



Решим систему, для чего из первого уравнения выразим у и подставим это выражение вместо у во второе уравнение.

;

;

.

Решим полученное уравнение

;

;

;

х1=60; х2=–600.

Так как х – скорость, то х2 не подходит по смыслу задачи. Подставим полученное значение х в выражение для у

.

Ответ: vA=60 км/ч, vB=40 км/ч.

Задачи на совместную работу

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и р – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением

.

Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.

Пусть х – время выполнения некоторой работы первым рабочим,

у – время выполнения этой же работы вторым рабочим.

Тогда  – производительность труда первого рабочего,

 – производительность труда второго рабочего.

 – совместная производительность труда.

 – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Задача 1. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 минут совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 часа 15 минут. За какое время мог бы выполнить работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму для этого понадобится на 1 час больше, чем первому.

Решение:

Пусть х – время работы первого по выполнению всей работы.

у – время работы второго рабочего.

По условию х=у–1, и первое уравнение составлено.

Пусть объем всей работы равен 1.

Тогда  – производительность труда первого рабочего,

 – производительность труда второго рабочего.

Так как они работали 45 мин.=3/4 часа совместно, то

 – объем работы, выполненной рабочими за 45 минут.

Так как второй рабочий работал один 2 часа 15 минут=2¼=9/4 часа, то

 – объем работы, выполненной вторым рабочим за 2 часа 15 минут.

По условию .

Таким образом, мы получили систему двух уравнений



Решим ее, для этого выражение для х из первого уравнения подставим во второе

 ⇒  ⇒ 4у2–19у+12=0

 ч. и у2=4 ч.

Из двух значений для у выберем то, которое подходит по смыслу задачи у1=45 мин., но 45 мин. рабочие работали вместе, а потом второй рабочий работал еще отдельно, поэтому  не подходит по смыслу задачи. Для полученного у2=4 ч. найдем из первого уравнения первоначальной системы значение х

х=4–1 ⇒ х=3 ч.

Ответ: первый рабочий выполнит работу за 3 часа, второй – за 4 часа.

Замечание: эту задачу можно было решить, не вводя вторую переменную у, а выразить время работы второго рабочего через х, тогда нужно было составить одно уравнение и решить его.

Задача 2. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала за 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

Решение:

Пусть х деталей в час изготовляет первая бригада (производительность первой бригады).

у – производительность второй бригады.

х+у – совместная производительность бригад.

Так как вместе они сделали 72 детали, то

 – время совместной работы бригад.

Так как бригады работали с 8 до 15 часов, всего 7 часов, то

 – время работы бригад раздельно, тогда

 – число деталей, которое изготовила первая бригада, работая отдельно

 – число деталей, которое изготовила вторая бригада, работая отдельно

По условию  или 

Составим второе уравнение. По условию:

х+1 – производительность труда первой бригады на другой день.

у–1 – производительность труда второй бригады на другой день.

х+1+у–1=х+у – совместная производительность (такая же, как и в первый день).

Так как бригады работали с 8 до 13 часов – всего 5 часов, то

 – число деталей, которые изготовила первая бригада, работая отдельно, во второй день.

 – число деталей, которые изготовила вторая бригада, работая отдельно, во второй день.

По условию  или .

Таким образом, мы составили систему двух уравнений:



Решим эту систему методом замены переменных:

Пусть ...................()

Тогда имеем:

 ⇒ 

Выразим из первого уравнения  и подставим во второе уравнение

 ⇒ v2+2v–8=0 ⇒ v1=2, v2=–4.

Значение v2=–4 не подходит по смыслу задачи (из условия ясно, что производительность первой бригады выше, чем второй, а значит х–у=v>0). Найдем значение u, соответствующее v2=2, подставив значение v2 в выражение для u:

.

Так как нам нужно найти значения х и у, подставим полученные значения для u и v в ()

 ⇒  ⇒  ⇒  ⇒ 

Ответ: 13 деталей в час изготавливала первая бригада; 11 деталей в час изготавливала вторая бригада.

Задачи на смеси и сплавы

В задачах этого типа основным является понятие «концентрация». Что же это такое?

Рассмотрим, например, раствор кислоты в воде. Пусть в сосуде содержится 10 литров раствора, который состоит из 3 литров кислоты и 7 литров воды. Тогда относительное (по отношению ко всему объему) содержание кислоты в растворе равно . Это число и определяет концентрацию кислоты в растворе. Иногда говорят о процентном содержании кислоты в растворе. В приведенном примере процентное содержание будет таково: . Как видно, переход от концентрации к процентному содержанию и наоборот весьма прост.

Итак, пусть смесь массы М содержит некоторое вещество массой m. Тогда:

концентрацией данного вещества в смеси (сплаве) называется величина ;

процентным содержанием данного вещества называется величина с⋅100%;

Из последней формулы следует, что при известных величинах концентрации вещества и общей массы смеси (сплава) масса данного вещества определяется по формуле m=c⋅M.

Задачи на смеси (сплавы) можно разделить на два вида:

Задаются, например, две смеси (сплава) с массами m1 и m2 и с концентрациями в них некоторого вещества, равными соответственно с1 и с2. Смеси (сплавы) сливают (сплавляют). Требуется определить массу этого вещества в новой смеси (сплаве) и его новую концентрацию. Ясно, что в новой смеси (сплаве) масса данного вещества равна c1m1+c2m2, а концентрация .

Задается некоторый объем смеси (сплава) и от этого объема начинают отливать (убирать) определенное количество смеси (сплава), а затем доливать (добавлять) такое же или другое количество смеси (сплава) с такой же концентрацией данного вещества или с другой концентрацией. Эта операция проводится несколько раз.

При решении таких задач необходимо установить контроль за количеством данного вещества и его концентрацией при каждом отливе, а также при каждом доливе смеси. В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение. Рассмотрим конкретные задачи.

Задача 1. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение:

Пусть х кг олова надо добавить к сплаву. Так как процентное содержание меди в сплаве равно 45 %, то масса меди в первоначальном сплаве m=0,45⋅12=5,4 кг (где 0,45 – концентрация меди в сплаве).

Тогда 12+х – масса нового сплава

И так как масса меди в первоначальном сплаве равна 5,4 кг, то

 – концентрация меди в новом сплаве.

По условию , решая уравнение, получаем х=1,5 кг.

Ответ: нужно добавить 1,5 кг чистого олова.

Задача 2. Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35 % раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36 % раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

Решение:

Пусть х л кислоты содержится в первом растворе,

у л кислоты содержится во втором растворе.

Тогда  – концентрация кислоты в первом растворе,

 – концентрации кислоты во втором растворе.

Если слить два раствора, то получим раствор массой 4л+6л=10л, причем масса кислоты в нем будет х+у, тогда

 – концентрация кислоты, после сливания обоих растворов.

Так как по условию в полученном таким образом растворе содержится 35% кислоты, то ее концентрация там равна 0,35.

Таким образом, получаем:  или х+у=3,5.

Если будем сливать равные объемы растворов по m литров, то

 – масса кислоты в полученном растворе,

2m – масса полученного раствора,

тогда

 – концентрация кислоты в полученном растворе.

По условию

 или .

Таким образом, получили систему двух уравнений

 ⇒  ⇒  ⇒

⇒  ⇒ 

Ответ: в первом растворе содержится 1,64 л кислоты, во втором – 1,86 л.

Задачи на проценты

Решение задач этого типа тесно связано с тремя алгоритмами: нахождения части от целого, восстановление целого по его известной части, нахождение процентного прироста. Рассмотрим эти алгоритмы.

Пусть известна некоторая величина А, надо найти а % этой величины.

Если считать, что А есть 100%, а неизвестная часть х это а %, то из пропорции

 имеем .

Пусть известно, что некоторое число b составляет а % от неизвестной величины А. Требуется найти А.

Рассуждая аналогично, из пропорции получаем .

Пусть некоторая переменная величина А, зависящая от времени t, в начальный момент t0 имеет значение А0, а в момент t1 – значение А1.

Тогда абсолютный прирост величины А за время t1–t0 будет равен А1–А0; относительный прирост этой величины вычисляется по формуле , а процентный прирост по формуле .

Задача 1. Для офиса решили купить 4 телефона и 3 факса на сумму 1470 долларов. Удалось снизить цену на телефон на 20%, и в результате за эту же покупку уплатили 1326 долларов. Найти цену факса.

Решение:

Пусть х – стоимость факса,

у – стоимость телефона.

По условию 4у+3х=1470.

Так как цену на телефон снизили на 20%, то телефон стал стоить 80% от первоначальной цены, то есть

0,8у – стоимость телефона после снижения.

По условию 3х+4⋅0,8у=1326.

Решим полученную систему двух уравнений методом алгебраического сложения.



Так как нам нужно найти только х, исключим у из системы, для чего первое уравнение умножим на (–0,8) и сложим со вторым: 0,6х=150 ⇒ х=250.

Ответ: факс стоит 250 долларов.

Задачи для самостоятельного решения

Уважаемые ребята, ниже приводятся задания для самостоятельного решения, которые следует выполнить, оформить отдельно от заданий по другим предметам и выслать в адрес Хабаровской краевой заочной физико-математической школы.

Наш адрес: 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 48, ХКЦТТ ( ХКЗФМШ).

М9.9.1. Расстояние 450 км один из поездов проходит на 1,5 ч. быстрее другого. Найдите скорость каждого из поездов, если известно, что первый проходит 240 км за то же время, что второй проходит 200 км.

М9.9.2. Расстояние между городами А и В равно 50 км. Из города А в город В выехал велосипедист, а через 1 ч. 30 мин. вслед за ним выехал мотоциклист. Обогнав велосипедиста, он прибыл в город В на 1 ч. раньше него. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 2,5 раза больше скорости велосипедиста.

М9.9.3. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта А, находящегося на притоке, идет по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте В, а затем идет вверх по реке до пункта С. На путь от А до С он затратил 18 ч., на обратный – от А до С – 15 ч. Найдите расстояние от пункта А до С, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч, а собственная скорость катера 18 км/ч.

М9.9.4. Бассейн может наполниться водой из двух кранов. Если первый кран открыть на 10 мин., а второй – на 20 мин., то бассейн будет наполнен. Если первый кран открыть на 5 мин., а второй – на 15 мин., то заполнится 3/5 бассейна. За какое время из каждого крана в отдельности может заполниться весь бассейн?

М9.9.5. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 ч. после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончанию работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить свою работу?

М9.9.6. Двое рабочих вытачивают вместе 136 деталей за 8 часов. Если бы первый делал на две детали в час меньше, а второй на 1 деталь больше, то на изготовление одной детали второй рабочий затратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливается первый рабочий?

М9.9.7. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять залили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25% раствор кислоты?

М9.9.8. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 тонн стал и с содержанием никеля 30%?

М9.9.9. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов. Содержащих 12% воды. Какой процент воды в свежих грибах?

М9.9.10. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй – на 110%, вместе заводы выполнили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод в отдельности?