**Оператор сдвига**

**Введение**

Тема для написания дипломной работы была выбрана не случайно. Теория линейных операторов – это интересная и важная область, которая позволяет не только активно применять уже имеющиеся знания по анализу, но и узнать много нового.

В данной работе рассматриваются линейные операторы одностороннего и двустороннего сдвига. Вводятся основные понятия: спектр, резольвента, спектральный радиус оператора. Рассматриваются задачи, в ходе решения которых выясняются некоторые свойства спектров операторов сдвига. Определяется класс взвешенных сдвигов, выводится соотношение для нормы и спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига.

Известно, что если рассматривать поле действительных чисел при условии, что аксиома Архимеда не выполняется, то получим новое, расширенное поле, в котором существуют бесконечно большие и бесконечно малые элементы. На основании этого расширения можно построить весь математический анализ – нестандартный анализ.

Естественно, часть основных понятий и свойств линейных операторов было бы интересно определить и доказать и в нестандартном анализе, что и было сделано в работе.

В частности, был установлен следующий факт: хотя стандартный оператор сдвига не имеет собственных векторов, но его нестандартное расширение имеет «почти собственные» векторы, т. е. векторы, в определенном смысле бесконечно близкие к собственным.

**Часть 1. Оператор сдвига в гильбертовом пространстве**

**§1. Основные понятия и факты теории линейных операторов**

1. Определение и примеры линейных операторов

Пусть Е и Е1 – два линейных нормированных пространства над полем комплексных чисел. Линейным оператором, действующим из Е в Е1 называется отображение ( удовлетворяющее условию



для всех .



Совокупность DA всех тех , для которых отображение А определено, называется областью определения оператора А; вообще говоря, не предполагается, что DA=E , однако мы всегда будем считать, что DA есть линейное многообразие, то есть, если х,у DA , то и при любых .



Определение 1. Оператор называется непрерывным в точке х0 DA , если для любой окрестности V точки у0=Ах0 существует такая окрестность U точки х0 , что АхV , как только х. Оператор А называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке х DA.



Поскольку Е и Е1 – нормированные пространства, то это определение равносильно следующему: оператор А называется непрерывным, если выполняется следующее условие: ( .



Примеры линейных операторов

Пусть А – линейный оператор, отображающий n-мерное пространство Rn c базисом е1, …, еn в m-мерное пространство Rm с базисом f1, …,fm . Если х – произвольный вектор из Rn , то и, в силу линейности оператора А .



Таким образом, оператор А задан, если известно, в какие элементы он переводит базисные векторы е1,…, еn . Рассмотрим разложение вектора Аеi по базису f1, …, fm . Имеем . Следовательно, оператор А определяется матрицей коэффициентов аij . Образ пространства Rn и Rm представляет собой линейное пространство, размерность которого равна, очевидно, рангу матрицы , т.е. во всяком случае не превосходит n (свойство ранга матрицы). Отметим, что в конечномерном пространстве всякий линейный оператор автоматически непрерывен.



Рассмотрим гильбертово пространство Н и в нем некоторое подпространство Н1 . Разложив Н в прямую сумму подпространства Н1 и его ортогонального дополнения, т.е. представив каждый элемент в виде ( положим Рh=h1. Этот оператор Р естественно назвать оператором проектирования, проектирующим все пространство Н на Н1. Очевидно, что Р является линейным и непрерывным оператором.



Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке [a;b] с нормой оператор, определяемый формулой



, (1)



где k(s,t) – некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Функция непрерывна для любой непрерывной функции , так что оператор (1) действительно переводит пространство непрерывных функций в себя. Его линейность очевидна. Можно доказать также, что он непрерывен.



Тот же оператор можно рассмотреть на множестве непрерывных функций С2[a,b] с нормой , где он также непрерывен.



4. Один из важнейших для анализа примеров линейных операторов – оператор дифференцирования. Его можно рассматривать в пространстве C[a,b] : Df(t) = .Этот оператор D определен не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Оператор D линеен, но не непрерывен. Это видно, например, из того, что последовательность сходится к 0 ( в метрике С[a,b]), а последовательность не сходится.



Оператор дифференцирования можно рассматривать как оператор, действующий из пространства D1 непрерывно дифференцируемых функций на [a,b] с нормой в пространство С[a,b]. В этом случае оператор D линеен и непрерывен и отображает все D1 на все С[a,b].



Рассмотрение оператора дифференцирования как оператора, действующего из D1 в С[a,b], не вполне удобно, так как, хотя при этом мы и получаем непрерывный оператор, определенный на всем пространстве, но не к любой функции из D1 можно применять этот оператор дважды. Удобнее рассматривать оператор дифференцирования в еще более узком пространстве, чем D1 , а именно в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на отрезке [a; b], в котором топология задается счетной системой норм . Оператор дифференцирования переводит все это пространство в себя, и, как можно проверить, он непрерывен на этом пространстве.



2. Ограниченность и норма линейного оператора

Определение 2. Линейный оператор, действующий из Е в Е1, называется ограниченным, если он определен на всем Е и каждое ограниченное множество переводит снова в ограниченное. Между непрерывностью и ограниченностью линейного оператора существует тесная связь, т.е. справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Для того, чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.



1. Пусть оператор А неограничен. Тогда существует МЕ – ограниченное множество, такое, что множество АМЕ1 не ограничено. Следовательно, в Е1 найдется такая окрестность нуля V, что ни одно из множеств АМ не содержится в V. Но тогда существует такая последовательность хnM , что ни один из элементов Ахn не принадлежит V и получаем, что в Е, но не сходится к 0 в Е; это противоречит непрерывности оператора А.



2. Если оператор А не непрерывен в точке 0, то в Е1 существует такая последовательность , что Ахn не стремится к 0. При этом последовательность ограничена, а последовательность не ограничена. Итак, если оператор А не непрерывен, то А и не ограничен. Утверждение доказано.



Если Е и Е1 – нормированные пространства, то условие ограниченности оператора А, действующего из Е в Е1, можно сформулировать так: оператор А называется ограниченным, если он переводит любой шар в ограниченное множество.

В силу линейности оператора А это условие можно сформулировать так: оператор А ограничен, если существует С=const , что для любого Е : .



Определение 3. Наименьшее из чисел С, удовлетворяющих этому неравенству, называется нормой оператора А и обозначается .



Теорема 2 [1]. Для любого ограниченного оператора А , действующего из нормированного пространства в нормированное .



3. Сумма и произведение линейных операторов. Пространство линейных непрерывных операторов

Определение 4. Пусть А и В – два линейных оператора, действующих из линейного топологического пространства Е в пространство Е1. Назовем их суммой А+В оператор С, ставящий в соответствие элементу элемент у=Ах+Вх, .



Можно проверить, что С=А+В – линейный оператор, непрерывный, если А и В непрерывны. Область определения DC оператора С есть пересечение областей определения операторов А и В.



Если Е и Е1 – нормированные пространства, а операторы А и В ограничены, то С тоже ограничен, причем

(2)



Действительно, для любых х , следовательно, выполняется неравенство (2).



Определение 5. Пусть А и В – линейные операторы, причем А действует из Е в Е1, а В действует из Е1 в Е2 . Произведением ВА операторов А и В называется оператор С, ставящий в соответствие элементу элемент из Е2.



Область определения DC оператора С=ВА состоит из тех хDA , для которых АхDB. Ясно , что оператор С линеен. Он непрерывен, если А и В непрерывны.



Если А и В – ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то и оператор С=ВА – ограничен, причем

(3)



Действительно, , следовательно, выполняется (3).



Сумма и произведение трех и более операторов определяются последовательно. Обе эти операции ассоциативны.

Произведение оператора А на число к (обозначается кА) определяется как оператор, который элементу х ставит в соответствие элемент кАх.

Совокупность Z(E,E1) всех непрерывных линейных операторов, определенных на всем Е и отображающих Е в Е1 ( где Е и Е1– фиксированные линейные нормированные пространства), образует, по отношению к введенным операциям сложения и умножения на число, линейное пространство. При этом Z(E, E1) – нормированное пространстово (с тем определением нормы оператора, которое было дано выше).



4. Обратный оператор

Пусть А – линейный оператор, действующий из Е в Е1 , и DA область определения, а RA – область значений этого оператора.

Определение 6. Оператор А называется обратимым, если для любого уRA уравнение Ах=у имеет единственное решение.



Если А обратим, то любому элементу уRA можно поставить в соответствие единственный элемент хDA , являющийся решением уравнения Ах=у. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется обратным к А и обозначается А-1.



Теорема 3 [1]. Оператор А-1, обратный линейному оператору А, также линеен.

Доказательство.

Достаточно проверить выполнение равенства

.



Положим Ах1=у1 и Ах2=у2, в силу линейности А имеем

(\*)



По определению обратного оператора А-1у1=х1 и А-1у2=х2, умножим оба равенства соответственно на и :



.



С другой стороны из равенства (\*) следует , следовательно, .



Теорема доказана.

Теорема 4 [3]. (Теорема Банаха об обратном операторе)

Пусть А – линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство Е на банахово пространство Е1. Тогда обратный оператор А-1 ограничен.

Теорема 5 [3]. Пусть Е – банахово пространство, I – тождественный оператор в Е, а А – такой ограниченный линейный оператор, отображающий Е в себя, что . Тогда оператор (I-A)-1 существует, ограничен и представляется в виде .



Доказательство.

Так как , то ряд сходится. А так как для всех , то ряд также сходится. Пространство Е полно, значит, из сходимости ряда вытекает, что сумма ряда представляет собой ограниченный линейный оператор. Для любого n имеем: , переходя к пределу и учитывая, что , получаем , следовательно .



Теорема доказана.

5. Спектр оператора. Резольвента.

Всюду, где речь идет о спектре оператора, считаем, что оператор действует в комплексном пространстве.

В теории операторов и ее применениях первостепенную роль играет понятие спектра оператора. Рассмотрим это понятие сначала применительно к операторам в конечномерном пространстве.

Пусть А – линейный оператор в n-мерном пространстве Еn . Число называется собственным значением оператора А , если уравнение имеет ненулевые решения. Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора А, а все остальные значения – регулярными.



Иначе говоря, есть регулярная точка, если оператор обратим. При этом оператор -1 , как и любой оператор в конечномерном пространстве, ограничен, поэтому в конечномерном пространстве существует две возможности:



уравнение имеет ненулевое решение, т. е. есть собственное значение для А , оператор -1 при этом не существует;



существует ограниченный оператор -1, т.е. есть регулярная точка.



В бесконечномерном пространстве существует третья возможность:

оператор -1 существует, т.е. уравнение имеет лишь нулевое решение, но этот оператор не ограничен.



Введем следующую терминологию. Число мы назовем регулярным для оператора А, действующего в (комплексном) линейном нормированном пространстве Е, если оператор -1 , называемый резольвентой оператора А , определен на всем Е и непрерывен. Совокупность всех остальных значений называется спектром оператора А . Спектру принадлежат все собственные значения оператора А, так как если х=0 при некотором , то -1 не существует. Их совокупность называется точечным спектром. Остальная часть спектра, т.е. совокупность тех , для которых -1 существует, но не непрерывен, называется непрерывным спектром. Итак, любое значение является для оператора А или регулярным, или собственным значением, или точкой непрерывного спектра. Возможность наличия у оператора непрерывного спектра – существенное отличие теории операторов в бесконечномерном пространстве от конечномерного случая.



Теорема 6 [3]. Если А –ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве и , то – регулярная точка.



Доказательство.

Так как, очевидно , то . При этот ряд сходится (теорема 4), т.е. оператор имеет ограниченный обратный. Иначе говоря, спектр оператора А содержится в круге радиуса с центром в нуле.



Теорема доказана.

Пример. В пространстве функций, непрерывных на отрезке , рассмотрим оператор А, определяемый формулой Аx(t)=M(t)x(t) , где M(t)– фиксированная непрерывная функция. Возьмем произвольное число , тогда , а .



Спектр рассматриваемого оператора состоит из всех , для которых Если функция M(t)- обращается в нуль при некотором t, заключенном между 0 и 1, то оператор не определен на всем пространстве , так как функция уже не обязана быть непрерывной. Если же функция M(t)- не обращается в нуль на отрезке , то функция непрерывна на этом отрезке, а, следовательно, ограничена: для некоторого при всех . Следовательно, оператор ограничен, а число – регулярное для оператора А. Таким образом, спектр оператора А есть совокупность всех значений функции M(t) на отрезке [0;1], причем собственные значения отсутствуют, т.е. оператор умножения на t представляет собой пример оператора с чисто непрерывным спектром.



Замечания

Любой ограниченный линейный оператор, определенный в комплексном банаховом пространстве, имеющем хоты бы один отличный от нуля элемент, имеет непустой спектр. Существуют операторы, у которых спектр состоит из единственной точки (оператор умножения на число).

Теорема 5 может быть уточнена следующим образом. Пусть (можно доказать, что этот предел существует для любого ограниченного оператора А), тогда спектр оператора А целиком лежит внутри круга радиуса r с центром в нуле. Величина r называется спектральным радиусом оператора А.



Резольвентные операторы и , отвечающие точкам и , перестановочны между собой и удовлетворяют соотношению , которое легко проверить, умножив обе части этого равенства на . Отсюда вытекает, что если – регулярная точка для А, то производная от по при =, т.е. , существует (в смысле сходимости по операторной норме) и равна .



§2. Унитарные операторы. Оператор сдвига

В этом разделе будем рассматривать пространство Н со скалярным произведением, которое является частным случаем нормированного пространства.

6. Оператор сдвига. Спектр оператора сдвига

Определение 7. Ограниченный линейный оператор U в пространстве Н называется изометрическим, если он не изменяет величины скалярного произведения: для любых .



В этом случае, если х=у, то , или . Значит, изометрический оператор сохраняет норму элемента, а норма самого такого оператора, как следует из определения нормы, равна 1 ().



Понятие изометрического оператора можно ввести также для операторов, действующих в нормированном пространстве.

Определение 8. Ограниченный линейный оператор U в нормированном пространстве Е называется изометрическим, если он не изменяет величины нормы: для любых .



Лемма 1. Для того, чтобы линейный оператор U в пространстве Н был изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любых .



Доказательство. Нужно доказать только достаточность. Для этого используем тождество . Его легко проверить, если представить левую часть в виде скалярных произведений: . Так как левая часть не изменится при замене векторов на векторы , то правая тоже не изменится, т. е. .



Определение 9. Оператор U называется унитарным, если он изометрический и имеет обратный оператор, определенный на всем пространстве Н.

Теорема 7. Спектр унитарного оператора – это множество, лежащее на единичной окружности.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа:

Докажем, что спектр унитарного оператора U содержится в единичном круге.

Рассмотрим обратный оператор и покажем, что он тоже унитарный. Докажем, что, если принадлежит спектру оператора U, то принадлежит спектру обратного оператора и наоборот.



Для доказательства I этапа применим теорему 4: если А – ограниченный линейный оператор в нормированном пространстве и , то – регулярная точка. Иначе говоря, спектр оператора А содержится в круге радиуса с центром в нуле. А норма унитарного оператора U, как было показано, равна 1 (). Следовательно, спектр унитарного оператора содержится в единичном круге.



Перейдем ко II этапу. Докажем, что оператор, обратный к унитарному оператору, также унитарный оператор. Покажем, что он удовлетворяет условию изометрии: для всех . Положим Ux=y, тогда , и , т. е. для всех .



Докажем, что, если точка является регулярной для оператора U, то точка является регулярной для обратного оператора U-1. Точка , является регулярной для оператора U, если выполняется условие:



(\*).



Оператор U-1 является обратным для оператора U, значит, для них верно U-1U=I=UU-1 . Используя это, равенство (\*) можно переписать:

, или



.



Используем свойство обратных операторов: оператор, обратный произведению операторов, равен произведению обратных операторов к данным, взятых в противоположном порядке, т.е. для двух операторов А и В имеем . Тогда равенство можно переписать в виде:



.



Вычислим отдельно произведение:

.



В итоге , т.е. является регулярной для обратного оператора U-1.



Возьмем множество точек . Тогда точки вида лежат вне единичного круга и все являются для оператора регулярными, так как он унитарный и его норма равна 1. Но поскольку оператор - обратный к оператору , то точки, входящие в , по предыдущему рассуждению являются для него регулярными. Следовательно, спектр оператора U – это множество, лежащее на единичной окружности.



Важным примером изометрического оператора является оператор сдвига.

Определение 10. Оператор , заданный в пространстве последовательностей, называется оператором сдвига, если он каждую последовательность вида (х1,х2,…, хn…) переводит в последовательность вида (0, х1, х2, …, хn…), т.е. выполняется равенство: (х1,х2,…, хn…)=(0, х1, х2, …, хn…).



Можно также рассматривать оператор сдвига, который действует в пространстве последовательностей, бесконечных в обе стороны. Элемент этого пространства можно представить в таком виде: (…х-2, х-1, х0, х1, х2, …).

Определение 11. Оператор называется оператором двухстороннего сдвига, если он каждую последовательность, бесконечную в обе стороны, сдвигает вправо, т.е. выполняется равенство: .



Уточним, о каких пространствах последовательностей будет идти речь:

1) l2 – пространство односторонних последовательностей комплексных чисел с натуральной нумерацией, для которых ряд - сходящийся. Скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой .



2) l2(-∞;∞) – пространство двусторонних последовательностей комплексных чисел с нумерацией целыми числами, для которых соответственно ряд – сходящийся. Скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой .



Рассмотрим оператор одностороннего сдвига U(x1, x2, …, xn, …)=(0, x1, x2, …). Покажем, что этот оператор является изометрическим. Действительно, для любых . А, значит, этот оператор по лемме 1 является изометрическим. Указанный оператор U не является унитарным, так как его образ – это не все пространство l2; векторы, имеющие ненулевую первую координату (например векторы вида (1, х1, х2, …)) не имеют прообраза. Значит, обратного оператора он не имеет.



Теорема 8. Оператор двухстороннего сдвига является унитарным оператором

Доказательство. Рассмотрим оператор двустороннего сдвига

U(…, x-1, x00, x1, …)=(…, x-2, x-10, x0, x1, …).

Очевидно, что этот оператор сохраняет норму, т.е. является изометрическим: . Покажем, что он имеет обратный оператор – это оператор, который любую последовательность сдвигает влево.



В пространстве последовательностей, как и в любом метрическом пространстве, любой вектор представляется как линейная комбинация элементов базиса. В этом пространстве имеется канонический базис – это последовательности вида

………………………

l-1=(.., 0, 1-1, 0, …)

l0=(…, 0, 10, 0, …)

l1=(…, 0, 11, 0, …)

………………………

Подействуем оператором U на произвольный элемент базиса:

Ulk=U(…, 0, 1k, 0,…)=(…, 0, 1k+1, 0)=lk+1.

Т.е. каждый элемент базиса оператор U переводит в последующий элемент. Чтобы осуществлялось обратное действие, мы должны каждый элемент базиса перевести в предыдущий элемент, т.е. U-1lk=lk-1.

Каждый вектор пространства l2 х=(…, х-1, х0, х1, …) может быть представлен в виде: . А так как оператор U-1 элементы базиса переводит в предыдущие, то, действуя на последовательность , сдвинет ее влево.



Итак, мы получили, что оператор двухстороннего сдвига U имеет обратный оператор и является изометрическим, следовательно, он является унитарным. Спектр этого оператора лежит на единичной окружности.

7.Взвешенные сдвиги

Определение 12. Оператором взвешенного сдвига называется произведение оператора сдвига (одностороннего или двустороннего) на диагональный (в этом же базисе) оператор.

Более подробно: пусть – ортонормированный базис (n = 0, 1, 2, … или n = 0, 1, 2, …) и пусть – ограниченная последовательность комплексных чисел (n пробегает те же значения, что и выше). Оператором взвешенного сдвига называется оператор вида SP, где S– оператор сдвига (Sln= ln+1) ,а Р – диагональный оператор с диагональю (Pln = ln ).



Найдем выражение для нормы и спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига через его веса.

Вспомним, что сдвиг S1 – изометрический оператор, значит, не изменяет нормы элемента: для любого .Поэтому норма оператора А равна норме соответствующего диагонального оператора: для любого и . Найдем норму диагонального оператора Pln = , где – некоторая ограниченная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим произвольную последовательность с единичной нормой: . При этом в базисе элемент имеет разложение . Подействуем на элемент х оператором Р: . При этом . Отсюда следует, что . Покажем, что выполняется также и обратное неравенство. Если для последовательности достигается, т.е. при некотором , то возьмем элемент : , . Если же не достигается, то можно взять подпоследовательность , тогда . Это говорит о том, что не может быть . Итак, и . Мы получили, что норма оператора взвешенного сдвига равна точной верхней грани модулей его весов.



Чтобы найти спектральный радиус оператора взвешенного сдвига, найдем нормы его степеней. Вычислим степени оператора А: Aln = , A2ln = ,A3ln = , и так далее. Следовательно, Ак можно представить в виде произведения изометрии (к-й степени оператора сдвига) и диагонального оператора, у которого n-й диагональный член равен произведению к последовательных чисел , начиная с . Значит, , отсюда, .



8. Операторы сдвига в пространстве функции на единичной окружности

Рассмотрим единичную окружность на комплексной плоскости, т. е. всевозможные комплексные числа , по модулю равные 1. Рассмотрим комплексную последовательность и составим ряд . Если он сходится для всех , таких, что , то – функция от переменной , определенная на единичной окружности. Заметим, что для последовательностей из пространства , таких, что ряд сходящийся, ряд сходится для всех , таких, что . Итак, существует взаимно однозначное соответствие между пространством и множеством A функций на единичной окружности, представимых в виде суммы обобщенного степенного ряда с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов. Рассмотрим, в какой оператор переходит при этом оператор сдвига U. Обозначим этот оператор . Пусть и – соответствующая функция. Тогда . Итак, в пространстве А оператору сдвига соответствует оператор умножения на функцию .



Рассмотрим теперь оператор взвешенного сдвига с весами . Его область определения – не все пространство , а только те последовательности , для которых сходится ряд . При этом



. Таким образом, в пространстве А оператору сдвига соответствует оператор дифференцирования.



Часть 2. Нестандартное расширение оператора сдвига

1. Нестандартное расширение поля действительных чисел

Поле R действительных чисел является расширением поля рациональных чисел с помощью определенной конструкции. Например, можно рассматривать действительные числа как классы фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Существует некоторая конструкция и для расширения поля R. При этом получается новое поле с линейным порядком, но без выполнения аксиомы Архимеда: . В новом поле существуют положительные элементы, меньшие любой дроби , где . Такие элементы называются бесконечно малыми. Также существуют положительные элементы, большие любого , они называются бесконечно большими. Это поле называется нестандартным расширением поля действительных чисел и обозначается \*R.



Та же конструкция (которую мы не будем здесь описывать), дает расширение любого множества, построенного на основании поля действительных чисел, например, булеана , или прямого произведения . Поскольку отображение можно рассматривать как подмножество , то получаем также расширения всех числовых отображений. Всю полученную совокупность множеств называют нестандартным универсумом. На основании нестандартного универсума можно построить теорию, аналогичную математическому анализу, или нестандартный математический анализ.



Мы перечислим без доказательства некоторые необходимые в дальнейшем утверждения нестандартного анализа.

Принцип переноса

Если в стандартной теории верно некоторое утверждение, записанное логической формулой с конечным числом логических символов, то аналогичное утверждение верно и в нестандартном универсуме и наоборот.

Пусть дано бинарное отношение . Отношение называется направленным, если для любого конечного набора элементов существует элемент , который находится в отношении со всеми элементами данного набора.



Принцип направленности. Пусть дано направленное отношение . Тогда во множестве \*В существует элемент , находящийся в отношении со всеми элементами множества А:



Пример. Выведем из принципа направленности существование бесконечно большого числа в \*R. Возьмем прямое произведение и на нем обычное отношение порядка: элементы x и y находятся в отношении , если . По принципу направленности: , что и означает, что в расширении существует элемент, который больше любого стандартного действительного числа, т. е. бесконечно большое число.



Теорема 10 [2]. Пусть - стандартная последовательность. Тогда . То есть число является пределом стандартной последовательности тогда и только тогда, когда для расширенной последовательности все члены с гипернатуральными номерами бесконечно близки к b.



(Соотношение , , означает, что – бесконечно малое число).



Доказательство.

1) Пусть , тогда по определению предела стандартной последовательности выполняется условие . Применим принцип переноса: . Но все бесконечно большие номера будут больше n0 , поэтому при любом стандартном положительном для любого бесконечного номера выполняется неравенство , что и означает .



Пусть . Возьмем стандартное ε>0 , тогда верно утверждение: . По принципу переноса такое же утверждение верно и в стандартном универсуме, следовательно, , что и требовалось доказать.



Множества, входящие в нестандартный универсум, называются внутренними. Это множества, которые являются элементами расширения булеана какого-то стандартного множества. Рассмотрим множества, являющиеся элементами , где – булеан . Для всех множеств из выполняется утверждение: если множество ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань (аксиома непрерывности). И определение ограниченности сверху, и определение точной нижней грани можно записать формулой с конечным числом символов, поэтому к данному утверждению применим принцип переноса. Значит, если множество ограничено сверху некоторым гипердействительным числом, то оно имеет точную верхнюю грань в , которую также будем обозначать .



Теорема 11. Пусть имеется внутреннее множество А\*R, причем . Тогда .



Доказательство. Очевидно, данное множество ограничено сверху, например, числом . Пусть М=sup А. Предположим от противного: пусть условие не выполняется, значит, положительное число не бесконечно малое. Значит, существует такое стандартное положительное число , что . Отсюда следует, что . А так как для любого число бесконечно малое, то , следовательно, М не является точной верхней гранью множества А, и предположение не верно.



2. Расширение пространств и



Рассмотрим следующие пространства:

1) l2 – пространство односторонних последовательностей комплексных чисел с натуральной нумерацией, для которых ряд - сходящийся.



2) l2(-∞;∞) – пространство двусторонних последовательностей комплексных чисел с нумерацией целыми числами, для которых соответственно ряд - сходящийся.



Соответственно, обозначим через \*l2 нестандартное расширение пространства l2, которое также является линейным пространством над полем , наделенным скалярным произведением.



Определим, какие последовательности гиперкомплексных чисел будет содержать пространство \*l2.

Так как по определению l2 ={{xi}/ CR, nN: ≤ C}, то по принципу переноса



\*l2={{xi}i\*N / С\*R, ν\*N: ≤С} (\*)



Т.е. в l2 входят гиперкомплексные последовательности с гипернатуральной нумерацией, удовлетворяющие условию (\*). Аналогично, в \*l2(-,) будут последовательности с гиперцелой нумерацией, члены которых также \*С, удовлетворяющие аналогичному (\*) условию



\*-,)={{xi }/ С\*R, ν: ≤С}.



Естественным образом в \*l2 можно ввести норму: , но в отличие от нормы в l2, в \*l2 норма может принимать также и бесконечные значения.



Докажем, что для расширений стандартных последовательностей .



Возьмем стандартную последовательность {xi}=x в пространстве l2 с нормой и любое стандартное . Воспользуемся теоремой 1: . Из этого утверждения следует, что верно следующее утверждение: , т.е. для любого стандартного число является верхней границей для множества всех сумм вида (1).



Обозначим М= (2)



Из предыдущего следует, что . С другой стороны, так как М , то ]. Но , значит, для любого стандартного , следовательно, М , или , что и требовалось доказать.



3. Операторы сдвига в нестандартном расширении пространства последовательностей

В дальнейшем Н – гильбертово пространство, – пространство всех линейных ограниченных операторов в Н.



Для линейных операторов в нестандартных пространствах можно ввести аналоги основных понятий теории операторов: ограниченности, нормы, спектра. При этом можно рассматривать различные пространства операторов: например, – множество всех расширений операторов из пространства ; – множество всех линейных операторов , имеющих конечную норму, т. е. удовлетворяющих условию ; \*(L(H)) – расширение пространства всех линейных ограниченных операторов в Н.



Мы будем рассматривать операторы из пространства \*(L(H)). Для операторов из этого пространства можно ввести норму как расширение нормы на пространстве \*(L(H)). Но в отличие от стандартной нормы она может быть также и бесконечна. Назовем оператор из \*(L(H)) ограниченным, если его норма конечна

Определение 13. Спектром оператора А\*(L(H)) называется множество точек λ, для которых оператор А– λI не имеет ограниченного обратного в \*(L(H)).



Теорема 12. Если существует элемент с не бесконечно малой нормой, такой, что для некоторого λ, то число принадлежит спектру оператора А.



Доказательство. Предположим, что обратный оператор существует. Обозначим . Тогда , а . Норма элемента равна 1, а норма элемента бесконечно большая. Отсюда следует, что оператор не ограничен.



Определение 14. Элемент с не бесконечно малой нормой, такой, что для некоторого λ, называется почти собственным вектором оператора А, а число – точкой почти собственного спектра оператора А.



Рассмотрим оператор сдвига U в пространстве , т. е. оператор, каждую последовательность вида переводящий в последовательность вида



Также будем рассматривать оператор двустороннего сдвига , он каждую последовательность вида сдвигает вправо, т.е. переводит в последовательность .



Рассмотрим следующую задачу. В пространстве \* возьмем следующую последовательность: , где – бесконечно большой номер. Найдем норму этого элемента: . Если же качестве возьмем , то получим . Покажем, что данный элемент является почти собственным вектором оператора сдвига с почти собственным числом , т. е. . Действительно, =, следовательно, .



Можно доказать также более общий факт.

Теорема 13. Любая точка единичной окружности является почти собственным числом оператора двухстороннего сдвига, соответствующим некоторому почти собственному вектору.

Доказательство. В пространстве \*l2(-,) рассмотрим следующую последовательность: =, где = и – некоторый бесконечно большой номер. Найдем норму этого элемента: . Возьмем и рассмотрим разность . Так как



Ux=, ,



то . Найдем норму этой разности: , т. е. .



Заключение

В работе показано, что нестандартное расширение оператора сдвига сохраняет многие свойства стандартного сдвига, в частности, свойство ограниченности и норму. Но также имеются и отличия, например, существование у нестандартного оператора сдвига почти собственных векторов.

**Список литературы**

Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.–М.: Мир, 1964.

Девис Д. Прикладной нестандартный анализ.

Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст]./ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Просвещение, 1968.

Халмош П. Гильбертово пространство в задачах [Текст]. – М.: Просвещение, 1972.