**Математизация науки и ее возможности**

Реферат по дисциплине “философия”

Аспирант: Рыбалов А.Н.

Омский государственный университет

**Введение**

Предметом данной работы является проблема взаимоотношения математики и других наук, а конкретно методов и возможностей математики в приложении к остальным наукам.

Актуальность проблемы связана с многовековым развитием и проникновением математических методов в различные области человеческой деятельности, которое со временем только расширяется и углубляется. В настоящее время мы видим бурный рост числа математических приложений, связанный прежде всего с развитием компьютерных технологий, появлением глобальной сети Internet. Те математические идеи, которые раньше не покидали области академической науки, сейчас являются привычными в обиходе программистов, прикладников, экономистов.

Интерес автора к проблеме связан с профессиональной его деятельностью в области математики: хоть и не в прикладной математике, но в довольно близкой к ней – теории сложности вычислительных алгоритмов, а потому ему интересно узнать возможности математики в познании объективной реальности, приложении к другим наукам.

Реферат состоит из трех частей. В первой кратко описывается история многовекового проникновения математики в другие науки, и параллельно некоторые вехи в развитии самой математики. Во второй части описываются некоторые основные методы математизации, их сильные и слабые стороны. В третьей обсуждаются пределы математизации науки, проблемы, связанные с этим.

**История математизации науки**

Математика – царица наук.

К.Ф. Гаусс

Математика является одной из древнейших наук. Само слово “математика” имеет древнегреческие корни и означает “наука” или “знание”. Сейчас предмет изучения математики настолько огромен и разнообразен, что довольно трудно дать определение математики, как науки, занимающейся тем-то и тем-то. Хотя и узкое, но довольно простое определение дается в [1]: “Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира”. Известно также шутливое определение своей науки, которое дают математики: “Математика – это то, чем я занимаюсь”.

Почти с самого зарождения математики, она была неразрывно связана с практической деятельностью человека. Более того, именно из этой повседневной практики и появились первые математические абстракции – натуральные числа и простейшие действия с ними: сложение, вычитание и умножение. Это произошло еще в доисторические времена.

С появлением первых государств (Древнего Египта, Вавилона, Китая) возникает потребности в развитии и углублении математических знаний. Развитие земледелия, архитектуры дает толчок к возникновению геометрии. Математические знания еще являлись только эмпирическими фактами, о необходимости их доказательства речи не возникало. Многие формулы представлялись в виде неких рецептов, следуя которым можно получить результат. Доказательством выступала практика и опыт: если какой-либо факт подтверждался практически, хотя бы приблеженно, но достаточно точно для практических нужд, он считался верным. Поэтому некоторые факты, открытые египтянами, оказались правильными лишь приближенно. Например, они считали, что отношение длины окружности к диаметру равно 3,16.

Древнегреческие философы и математики очень много сделали для развития математики. Это и практика строгих доказательств, введенная Фалесом, и замечательные теоремы Пифагора, и методы Архимеда вычисления объемов различных тел, и аксиоматическая система геометрии Евклида, и система буквенных обозначений Диофанта.

Пифагор пытался применить математику для нужд своей философской системы, согласно которой в основе мироздания – числа. Познать мир – это значит познать управляющие им количественные соотношения. Ему приписывается модель солнечной системы, в которой планеты движутся по сферическим орбитам, подчиняющимся некоторым количественным отношениям – так называемая гармония сфер. Также Пифагором и его школой были выявлены интересные числовые закономерности в музыке (высота тона колебания струны зависит от ее длины). Его учение дает первый пример целенаправленного применения математики в объяснении явлений природы, общества и мироздания в целом. Известно выражение, приписываемое Пифагору: “Все есть число”. Местами его учение носит мистический характер, далекий от реального положения вещей. Например, обожествление некоторых чисел: 1 – мать богов, всеобщее первоначало (видимо аналогия с началом натурального ряда), 2 – принцип противоположности в природе (так как противоположности всегда встречаются парами), 3 – природа как триединство первоначала и его противоречивых сторон (3=1+2), и т.д. Интересны (хотя и абсолютно не соответствующие действительности) его рассуждения о связи некоторых арифметических свойств чисел и общественными явлениями. Например, пифагорейцы выделяют так называемые совершенные числа: 6, 28, и т.д. – числа, равные сумме своих собственных (т.е. кроме самого числа) делителей: 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14. Эти числа, по Пифагору, отражают совершенство. Пары чисел, сумма собственных делителей одного из котрых равна другому и наоборот, как например, 284 и 220, называются дружественными и отражают явление дружбы в обществе. Пифагорейцы про верную дружбу говорили: “Они дружны, как 220 и 284”. Несмотря на эти наивные представления, такие числа до сих пор представляют интерес для теории чисел – области математики, занимающейся арифметическими свойствами целых чисел. Например, до сих пор не известно, бесконечно ли множество совершенных чисел, или существуют ли нечетные совершенные числа?

Последующий период, вплоть до 16 в. характеризуется довольно медленным процессом проникновения математики в другие науки. Решаются задачи, вызванные торговой деятельностью, как в Западной Европе, астрономией и мореплаванием (тригонометрия), как на Арабском Востоке и в Индии.

Бурное развитие как самой математики, так и ее приложений наблюдается в Новое время. Переход к новым капиталистическим отношениям, ослабление влияния церкви на философию и науку развязывают исследователям руки, делают их мысли смелее. Отныне “природа – не храм, а мастерская” и человек – не послушная марионетка в руках бога, а сам хозяин своей судьбы и исследователь окружающего мира.

Одним из первых, кто почувствовал веяние нового времени и начал по-новому подходить к науке, был Г.Галилей. Всем со школьной скамьи известны его опыты по изучению падения тел, которыми он опроверг тысячелетние заблуждения Аристотеля и его последователей. Для описания результатов, Галилей впервые применил математический аппарат: начала дифференциального исчисления. Известно выражение Галилея: “книга природы написана языком математики: буквы в ней – это треугольники, окружности, линии”.

И.Кеплер примерно в то же время, анализируя скурпулезные наблюдения Т.Браге за движением Марса, приходит к выводу, что планеты движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. При этом он использует теорию конических сечений, открытых более тысячи лет назад древнегреческим математиком Аполлонием Пергским. Это характерный пример того, как математическая теория, не получившая популярности при жизни автора и почти забытая, находит применение в важных вопросах науки спустя много лет.

Р.Декарт известен в математике благодаря методу координат – своеобразному мостику между алгеброй и геометрией. Эта плодотворная идея по сути стала основным толчком для последующего развития математики. В философии Декарт известен как основатель рационализма – попытки математизировать все научное знание того времени. Он использует методы математики и логики в физике, физиологии, этике, философии. Математика взята за эталон ввиду того, что он считал ее образцом стройности и истинности. Строго доказав то или иное утверждение, математик полностью убеждает остальных в его истинности и освобождает тем самым свою науку от споров и сомнений. Если имеется некая математическая задача, то ее решение полностью закрывает вопрос. Философия же, например, или мораль имеют много таких вопросов, которые на протяжении всей истории вызывали бурные споры и к окончательному мнению относительно них философы так и не пришли. А почему бы не попробывать их решить, используя математические методы, которые в своей области успешно срабатывают? Ведь в справедливости доказанных геометрических теорем никто не сомневается, а правильное решение какой-либо задачи не вызывает споров.Свои размышления Декарт изложил в работе “Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках”.

Примерно в то же время два других французских математика, Б. Паскаль и П. Ферма, закладывают основы теории вероятности – важной области для математических приложений.

Настоящей революцией в математике и ее приложениях стало открытие дифференциального и интегрального исчисления И.Ньютоном и Г.Лейбницем. Это стало началом широкого проникновения математических методов в физику, механику и астрономию. Основная идея этого метода – идея предела переменной величины – берет свое начало еще в трудах Архимеда, Демокрита и других древнегреческих ученых. Но всю его мощь оценили лишь после введения удобной системы обозначений и метода координат – чего у древних греков не было. Почему же этот метод стал таким плодотворным именно для физических приложений? Дело в том, что характерной особенностью почти всех физических процессов является наличие непрерывного движения, изменения во времени некоторых числовых параметров, а пределы (а с ними и интегралы и производные) как раз и есть важнейший инструмент для исследования непрерывных функций.

Другой заслугой Ньютона, по сути сделавшей физику самостоятельной наукой, стала идея аксиоматизации механики, предложенная в труде “Математические начала натуральной философии”. Там Ньютон, вдохновленный “Началами геометрии” Евклида, выдвигает несколько фундаментальных законов механического движения, известных сейчас как три закона Ньютона. Опираясь на эти “аксиомы”, он, используя математические методы и дедукцию, описывает качественно и количественно многочисленные физические явления.

Лейбницу мы также обязаны удобной системой обозначений для основных предельных операций. Развивая символьные обозначения дальше, Лейбниц мечтает о неком универсальном исчислении, используя которое можно находить истину, механически применяя некоторые правила. “Тогда философы перестанут спорить, а начнут вычислять”. Его мечта в некотором смысле осуществится в начале XX века, когда математики формализуют логику, создав исчисление предикатов.

XVIII век характеризуется окончательной математизацией физики. Крупнейшие математики того времени: Л.Эйлер, Ж.-Л.Лагранж, П.С. Лаплас развивают анализ бесконечно-малых, делая его основным орудием исследования в естествознании. Полный успех был достигнут с его помощью в небесной механике – описаны движения планет, Луны в рамках закона тяготения Ньютона. Лаплас в своем капитальном сочинении “Трактат о небесной механике” провозгласил тезис, известный как принцип детерминизма: “Зная положения всех частиц во вселенной и их скорости в данный момент, мы можем определить состояние вселенной в любой момент в будущем”. Математическое обоснование ему дается уже в следующем столетии в теореме Коши-Ковалевской о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения.

XIX век ознаменовался не только социальными революциями, но и революциями в точных науках. Новые идеи, родившиеся в абстрактных недрах математики, такие как понятие группы, неевклидовая геометрия нашли и до сих пор находят применение в физике, кристаллографии, химии. Новые явления в физике – электричество и магнетизм оказываются хорошо описываемыми “старыми” методами дифференциального и интегрального исчисления с некоторыми дополнениями из векторного анализа. Казалось бы все замечательно: математический дух витал над всеми областями знания, которые тогда считались науками, а сама математика была эталоном строгости и непротиворечивости, к которому должны стремиться остальные науки. Но в конце XIX века в трудах Г.Кантора появляется нарушитель спокойствия – теория множеств. Собственно по-началу ничего такого опасного в ней не было – Кантор попытался математически описать понятие множества – произвольного набора каких-либо математических: натуральных чисел, точек на прямой, вещественно-значных функций и т.д. Параллельно шли работы по так называемым основанием математики: ученые пытались на аксиоматической основе построить математический анализ, теорию действительных чисел, геометрию (список аксиом Евклида оказался неполным, полную аксиоматику геометрии дал Гильберт в 1899 г.). Объяснение этому процессу можно дать следующее: математический аппарат (в особенности метод бесконечно-малых) на протяжении нескольких веков использовался во многих приложениях и зарекомендовал себя как эффективное орудие естествознания; но объяснения почему все применяемые методы правильны с точки зрения логической строгости, не было – ну согласуются с наблюдениями и ладно; но это не значит, что мы застрахованы от “сбоев” в будущем. Для подведения фундамента под эти методы, математики решили использовать испытанный аксиоматический метод. В связи с этим было разработано исчисление предикатов – система логических аксиом и правил вывода из них новых утверждений. С его помощью, опираясь на аксиомы любой области математики, посредством буквально механического применения правил вывода можно получить любую теорему данной области. На этом пути удалось найти аксиомы многих областей математики и свести вопрос о непротиворечивости математического анализа к непротиворечивости арифметики. Теория множеств же является в некотором смысле фундаментом математики: все объекты, с которыми работают математики являются множествами. Но вот уже на первых этапах развития этой теории начали появляться противоречия, что грозило фундаменту всей математики. К счастью в начале XX века удалось придумать аксиоматизацию теорию множеств, свободную (на сегодняшний день) от противоречий.

Развитие математики и ее приложений в XX веке было настолько бурным, что его трудно описать достаточно подробно. Выделим лишь некоторые основные моменты. Физические приложения продолжали развиваться, не ограничиваясь уже одним дифференциальным и интегральным исчислениями: в ядерной физике, например, начали широко использовать многомерную геометрию и теорию групп; в теории относительности замечательные применения нашла неевклидова геометрия. Теория вероятностей возможно даже обогнала математический анализ по числу приложений: методы математической статистики используют в огромном числе наук, начиная с физики и заканчивая психологией и лингвистикой. Развитие математической логики, вызванное программой Гильберта обоснования математики, привело к появлению компьютеров, которые изменили мировоззрение современного человека. Практика ставит новые задачи, которые уже не решаются испытанными в физике методами анализа непрерывных функций. Эти дискретные задачи из экономики, генетики, криптографии и др. характеризуются трудоемким перебором огромного числа вариантов, который не под силу даже компьютерам.

**Основные методы математизации**

Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.

Р.Бэкон

В чем же заключается мощь и удивительная плодотворность применения математики в различных науках? Чтобы ответить на этот вопрос, проанализируем некоторые методы математизации.

Важнейший метод – это математическое моделирование. Он состоит в том, что исследователь строит математическую модель рассматриваемой области, то есть выделяет существенные для него свойства и количественные характеристики явления, выделяет существенные отношения между ними и пытается найти какой-либо похожий объект в математике.

Например, изучая численности популяций сардин и рыб-хищников в Средиземном море, В.Вольтерра выделил следующие количественные характеристики:

численность сардин (обозначив их за x)

численность хищников (соответственно y)

далее он выявил важные для него отношения между ними:

в среднем все особи одинаковы

популяция сардин увеличивается, если нет встреч с хищником

скорость роста ее численности пропорциональна самой численности (так как каждая особь может произвести потомство)

число сардин, гибнущих от хищников пропорционально числу встреч с ними, а это число в среднем пропорционально xy

популяция хищников уменьшается при отсутствии сардин (гибнут от голода)

скорость этой убыли пропорциональна численности хищников

скорость прироста числа хищников пропорциональна числу их встреч с кормом-сардинами, то есть величине xy.

Являясь крупным специалистом в теории дифференциальных уравнений, Вольтерра рассматривает x и y как фунции от времени и быстро находит необходимый объект в математике – систему обыкновенных дифференциальных уравнений



где A, B, C, D – некоторые положительные коэффициенты, зависящие от конкретных природных условий. Изучая затем эту систему методами, разработанными другими математиками задолго до него, Вольтерра получает описание и объяснение многих явлений, замеченных за долгую историю рыболовства в Италии, таких например, как странные колебания величины улова сардин (а значит и их общей численности).

Этот пример показывает еще одну идею моделирования – некоторое упрощение, отбрасывание лишней, не нужной информации. Здесь, это допущения одинаковости особей, равновероятности их встреч, равновозможности производить потомство. Мы как-будто бы абстрагируемся от конкретной сардины и выделяем только нужные для нас ее свойства. Конечно в итоге, мы получаем несколько упрощенную картину явления, но в данном случае нам это и требовалось. Важнейшим моментом является то, чтобы при упрощении не упустить нужные нам черты, не огрубить модель настолько, чтобы она перестала достаточно хорошо для нас описывать явление. С другой стороны, модель не должна получиться очень сложной, не поддающейся математическому анализу. Правда, с появлением мощных ЭВМ, возможности анализа заметно расширились, но некоторые задачи, например долгосрочное прогнозирование погоды, до сих пор являются недоступными.

Удивительным образом оказывается, что одна и та же математическая модель может описывать много разнообразных явлений в различных областях. Например, одно дифференциальное уравнение может описывать и рост численности популяции, и химический распад, и цепную ядерную реакцию, и распростронение информации в социальной группе. В чем причина такой всеприминимости математических моделей? Ответа на этот вопрос математика не дает. Вот что говорит академик В.И.Арнольд в лекции [2]:

Почему модель сечения конуса описывает движение планет? Мистика. Загадка. Ответа на этот вопрос нет. Мы верим в силу рациональной науки. Ньютон видел в этом доказательство существования Бога:”Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа…Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель Вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель”.

Но можно дать и следующее некоторое “обоснование” этому факту. Когда исследователь изучает какое-то явление и строит скажем количественную модель, он стремится к простоте модели и выделяет только небольшое число параметров и отношений между ними. В итоге, по огромному количеству явлений получаем модели, связанные скажем с определенными дифференциальными уравнениями. Но в теории дифференциальных уравнений эти уравнения классифицированы в достоточно небольшое число типов, которые различаются по свойствам и методам их решения. В итоге и получается, что дифференциальные уравнения (а значит и модели) для большого числа явлений попадают в один класс, в котором они практически неразличимы.

Помимо моделей, связанных с дифференциальными уравнениями, есть еще огромное число других моделей, в том числе и не количественных (то есть не связанных с какими-либо числовыми параметрами). Например, в математической логике и теории алгоритмов существует модель, описывающая работу человека, решающего какую-нибудь проблему по строго описанной программе (рецепту). Эта модель называется машиной Тьюринга и придумана в 1936 году английским математиком Аланом Тьюрингом в связи с проблемой формализации понятия алгоритма. Она оказалась очень полезной для разработки первых ЭВМ, и с тех пор является общепринятой математической моделью современных компьютеров.

Тьюринг исходил из следующих упрощений:

в процессе работы, человек (компьютер) имеет дело с наборами символов (словами) из конечного множества (алфавита)

в начале работы на некотором носителе информации, например в тетради (ленте) записан вход

в конце работы, на ленте пишется выход

лента разделена на ячейки, каждая либо пуста, либо там есть один символ алфавита

лента потенциально бесконечна и одномерна (то есть каждая ячейка имеет двух соседей: правого и левого)

в процессе работы человек может за один шаг записывать символ в текущую ячейку (если она занята, то предварительно стереть содержимое) и читать его, а также сдвигаться вправо или влево

все вышеописанные действия он выполняет в строгом соответствии с программой, которая по текущему обозреваемому символу и текущему состоянию человека (их конечное число) говорит, какой символ записать в ячейку, куда сдвинуться (вправо или влево) и как сменить состояние

человек останавливает вычисления, когда попадает в некоторое выделенное состояние (заключительное)

Откуда такая модель могла возникнуть? Например из анализа работы математика, который что-то решает в тетради: на первых страницах записано условие задачи – слово в достаточно большом (но конечном!) алфавите; далее он согласно некоторым правилам своей науки (программе!) и своему внутреннему состоянию (этих состояний много, но конечно), листая тетрадь то вперед, то назад, записывая и стирая символы, постепенно решает задачу. Попав в заключительное состояние (поняв, что ответ найден), он останавливается. Есть и возможность того, что он никогда не остановится – модель это не запрещает.

Удивительно то, что эта простая модель, прекрасно описывающая работу современных компьютеров, родилась раньше, чем появились первые ЭВМ.

Из каких этапов состоит построение математической модели? Это зависит, вообще говоря, от области, в которой разрабатывается эта модель. Например, в экономике этапы можно выделить такие [3]:

Определение цели, то есть чего хотят добиться, решая поставленную задачу.

Определение параметров модели, то есть заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.

Формирование управляющих переменных, изменяя значение которых можно приближаться к поставленной цели. Значения управляющих переменных являются решениями задачи.

Определение области допустимых решений, то есть тех ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.

Выявление неизвестных факторов, то есть величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.

Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, то есть формирование целевой функции, называемой также критерием оптимальности задачи.

Это связано со спецификой области: в экономике важны именно такие числовые модели, так как предметная область там в основном состоит из понятий, которые имеют количественный характер. Такие примеры, как машина Тьюринга под эту схему не подходят.

Итак, основные черты метода математического моделирования заключатся в следующем:

абстракция, некоторое упрощение предметной области, выделение только существенных для исследователя черт рассматриваемого явления

выявление нужных параметров или характеристик процесса, которые и составляют предмет дальнейшего исследования

выявление существенных взаимоотношений между этими параметрами

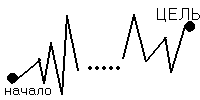
поиск нужного математического объекта, который будет описывать все исследуемые параметры и отношения между ними

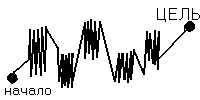
применение математического аппарата к этому объекту для описания исходного явления

Выражаясь математическим языком, можно сказать, что происходит отображение предметной области, реального явления в математические множества (понятия, структуры). Причем это отображение обладает свойством сохранять некоторые отношения между реальными объектами, в том смысле, что при изменении в реальности происходит похожее изменение и в математическом ее образе.

Не следует думать, что математика всегда располагает необходимым аппаратом для исследования математической модели. Зачастую приходилось открывать новые понятия и методы в математике или разрабатывать старые, чтобы делать это. Например, Ньютон открыл основные понятия дифференциального исчисления, чтобы как раз использовать их в механике. И вообще большинство областей современной математики имеют такое практическое происхождение.

Очень интересен также следующий вопрос: почему же математические модели, сам математический язык настолько полезен для изучения многих явлений в различных науках? Я считаю, что это отчасти связано с непревзойденной строгостью и точностью математического языка, отчасти с его эффективностью и сжатостью. Профессор А.К.Гуц в [4] иллюстрировал эту эффективность следующим отличием гуманитарного мышления от математического. Когда гуманитарий решает какую-нибудь проблему, на пути к ее решению он должен пройти очень большое число промежуточных этапов, на каждом из которых делаются, анализируются и проверяются какие-то логические выводы. Это можно изобразить на диаграмме:



Так как таких промежуточных шагов может быть много, путь к решению может занять очень много времени. Теперь рассмотрим решение задачи математиком. Движение его к цели по сути тоже заключается в серии промежуточных шагов, но он может применять теоремы, формулы, факты установленные и проверенные другими математиками, которые заключают в себе сотни, тысячи элементарных логических шагов, которые уже нет необходимости проделывать. Его путь можно изобразить такой диаграммой:

здесь “сгустки” – это факты, проверенные другими. Поэтому за тот же промежуток времени математик может сделать гораздо больше.

Адекватность математики при отражении реальности в своих моделях связана с тем, что сама математика, ее понятия и структуры являются не чем иным, как абстракцией самой объективной реальности. Когда мы создаем какое-то множество математических понятий, абстрагируясь от реальных объектов, мы неявно переносим в понятия и связи между этими объектами, которые затем возникают при построении математических моделей. Например, при выделении понятия “натуральное число” как абстракции свойств реальных объектов быть элементом некоторого набора однородных предметов, которые можно переложить один за другим из одной кучки в другую, мы переносим в абстракцию и некоторые свойства натуральных чисел, такие как упорядоченность чисел. При “моделировании” затем скажем коллектива людей, исследуем численность коллектива x (натуральное число) и обнаруживаем, что при добавлении одного индивида, коллектив увеличивается, но увеличивается при этом на 1 и x – мы неявно перенесли упорядоченность реального объекта “коллектив” на его математическую модель “натуральнозначная переменная”. Выдающийся физик, лауреат Нобелевской премии, Поль Дирак говорил: “При построении физической теории следует не доверять всем физическим концепциям. … Следует доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой”.

Можно отдельно выделить метод математизации, который неявно является частью математического моделирования: формализация. Он состоит в том, что все изучаемые объекты реальности и отношения между ними заменяются наборами символов и отношений между ними в некотором искусственном языке. Так, в модели машины Тьюринга все объекты – слова в каком-то алфавите, и рассматриваются правила работы с этими словами. Да и вообще, система удобных обозначений – важная часть любой области математики. Этот искусственный язык должен быть по возможности компактным, недвусмысленным и простым. Это отличает его от естественных человеческих языков, для которых характерна некоторая неоднозначность и неопределенность семантики и синтаксиса. Недаром до сих пор не создано удовлетворительных автоматических систем перевода с одного языка на другой. Поэтому важнейшей частью формализации является правильный перевод предметной области на формальный язык. Как пишет Герман Вейль в [6]: “Мощь науки, как свидетельствует развитие современной техники, опирается на комбинацию априорных знаковых конструкций и систематического опыта в форме планируемых и воспроизводимых экспериментов и соответствующих измерений.” В самой математике процесс формализации начался еще с древнегреческого математика Диофанта, который предложил некоторую еще несовершенную систему алгебраических обозначений. Привычные нам обозначения основных математических объектов вводились постепенно, начиная с Виета, Декарта, Лейбница и заканчивая Эйлером, Лагранжем, Коши. Этот процесс продолжается до сих пор, так как каждый день возникают новые и новые математические понятия и объекты.

В конце XIX – начале XX века процесс формализации математики достиг своей кульминации в трудах Фреге, Рассела, Гильберта и др. Это связано с так называемой программой Гильберта обоснования математики. В чем она состоит? Хотя математику и математические рассуждения принято считать логически строгими и безупречными, работающие математики никогда не проводят доказательства своих теорем на формальном уровне, сравнимом например с алгоритмическими языками программирования типа C или PASCAL, то есть так, чтобы правильность доказательства мог бы проверить компьютер. Поэтому Гильберт и его коллеги решили построить такой формальный язык с соответствующими правилами, в котором можно было выразить и доказать все математические теоремы. В основу этого языка была положена логика, основными объектами стали множества, которые обозначались символами в конечном алфавите. Отталкиваясь от некоторых простейших утверждений – аксиом, примменяя некоторые строго очерченные правила вывода, можно было бы получить все утверждения математики. Если бы эта программа удалась, то всех математиков можно было бы заменить компьютерами, которые бы чисто механически шаг за шагом получали бы математические теоремы.

Прежде чем описать причины краха программы Гильберта, выделим еще один метод математизации, который тесно связан с этой программой. Речь идет об аксиоматизации. Она состоит в том, что в некоторой области знания из всех истинных утверждений выделяется набор некоторых простейших утверждений или аксиом, из которых посредством логического вывода можно в принципе получить любое утверждение этой области. Конечно, желательно чтобы этот набор был достаточно компактным (хотя бы конечным) и простым. Классическим примером аксиоматически построенной теории является геометрия Евклида (хотя у него список аксиом был неполный). Конституция государства и всевозможные кодексы в некотором смысле являются списками аксиом в юриспруденции. Правила дорожного движения есть ни что иное, как аксиомы теории правильного уличного движения. Со времен Евклида аксиоматический метод построения теории стал эталоном. Аксиоматизировать пытались и такие неточные науки, как этика (Спиноза). Пожалуй наиболее удачным примером аксиоматизации является построение механики Ньютоном на основе выделенных им 3 законов. Конечно, не следует считать, что этих 3 аксиом достаточно для построения механики – к этому списку необходимо добавить все аксиомы трехмерной геометрии, теории действительных чисел и, если уж быть окончательно строгим, то и в самой логике можно выделить тоже некоторые аксиомы. Дальнейшее развитие физики добавляло еще аксиомы: законы термодинамики, электромагнетизма, постулаты Эйнштейна в теории относительности и законы квантовой механики. Но принцип оставался тот же – добавляются по возможности простейшие и независимые от предыдущих факты, из которых можно объяснить как можно больше новых явлений. Продолжалась и продолжается аксиоматизация в самой математике: с помощью аксиомам в алгебре определяются важнейшие понятия группы, поля, кольца; аксиоматика Колмогорова сделала теорию вероятностей математической наукой.

Вернемся теперь к программе Гильберта. Она, кроме формализации и выделения основных понятий, включала в себя аксиоматизацию всей математики на основе аксиом арифметики и теории множеств. В трудах многих математиков был найден подходящий список аксиом и правил вывода (одно из которых - правило modus ponens, описанное еще Аристотелем), из которого выводились все известные факты математики. Оставались неясными два вопроса:

Будет ли этот список аксиом непротиворечивым? То есть не существует ли такого утверждения, что из аксиом можно вывести его само и его отрицание? Известно, что в этом случае можно будет вывести любое утверждение – это разрушит авторитет математики как эталона строгости, сделает бессмысленной и ненужной данную систему аксиом.

Будет ли этот система аксиом полной? То есть любая ли математическая истина может быть получена из данных аксиом с помощью последовательных логических выводов? Это означает, что любое утверждение мы можем либо доказать, либо опровергнуть (доказать его отрицание).

Математики и логики, воодушевленные первыми успехами программы Гильберта, принялись искать доказательство полноты и непротиворечивости арифметики – промежуточного шага на пути ко всей математике. Было достигнуто несколько обнадеживающих результатов. Казалось, цель была близка. Но в 1931 году грянул гром, который обратил программу Гильберта в руины: австрийский логик Курт Гёдель доказал так называемую теорему о неполноте, которая утверждала, что если система аксиом арифметики непротиворечива, то существует такое утверждение, что ни оно само, ни его отрицание не доказуемы. Это означает, что условия непротиворечивости и полноты арифметики и математики в целом несовместны. Более того, она остается неполной, если к списку добавить дополнительные аксиомы (любое конечное число), то есть не существует конечного набора аксиом для арифметики. Это был шок. Один математик в связи с этим сказал: “Бог существует, потому что математика непротиворечива. Дьявол существует, потому что мы это не можем доказать”. Теорема Гёделя показала пределы возможностей аксиоматического метода в самой математике.

Нужно все-таки сказать, что это был крах некоторого идеала, который на самом деле не оказал большого влияния на практические приложения математики. Системы аксиом арифметики и теории множеств до сих пор являются основанием математического знания. Аксиомы в различных областях знания не потеряли своей ценности.

Пределы и проблемы математизации

Это был математик.

Но почему, Холмс?

Это элементарно, Ватсон.

Во-первых, он ответил

абсолютно правильно.

Во-вторых, то, что он сказал, абсолютно

бесполезно для нас.

Из извесного анекдота.

Проблемы, с которыми сталкиваются исследователи, применяющие математические методы в других науках, можно разделить на два типа. Первые – связанные с проблемами в самой математике, то есть когда, например, математическая модель явления построена, а ее исследование затруднено из-за того, что подходящие методы еще не разработаны, либо их разработка – нерешенная пока проблема (в математике очень много своих “внутренних” проблем). Второй тип связан с самими областями знания, которые подвергаются математизации: либо сложно построить математическую модель, либо построенная и изученная модель неправильно описывает изучаемое явление.

Рассмотрим подробнее проблемы первого типа. Не стоит считать, что сами математики так уж всесильны в своей науке. Да и сама математика разрослась до таких огромных размеров, что давно уже нет таких универсальных гениев, подобных Ньютону, Эйлеру, Гильберту или Пуанкаре, которые работали почти во всех областях математики своего времени. Сегодняшняя картина математических исследований напоминает больше огромный муравейник, где каждый математик разрабатывает свою узкую область, и, порой не знает, что происходит в соседней. Но, несмотря на такую разобщенность, остаются нерешенные проблемы, важные для многих областей математики, и, потому известные всем математикам. Возможно, что для их решения необходимы знания этих многих областей, поэтому они так трудны для современных исследователей. Но, может быть, они подобно известной теореме Ферма, представляют чисто внутриматематический интерес, и их нерешаемость никак не сказывается на приложениях? К сожалению, это не так. Например, известная открытая проблема P=NP теснейшим образом связана с криптографией, генетикой, теорией управления, а решение дифференциальных уравнений Навье-Стокса осуществило бы прорыв в аэродинамике, гидродинамике. Многие современные математические модели (например, метеорологического прогноза) очень сложны и не поддаются анализу даже при помощи компьютеров: хоть и теория изучения таких уравнений разработана давно, но из-за их громоздкости применять алгоритмы теории человеку не под силу. Поэтому здесь применяют компьютеры. Но порой и компьютерам необходимо огромное время для проверки теоретических условий. Отсюда потребность в разработке быстрых алгоритмов. А как правило, разработка таких алгоритмов связана с решением некоторых трудных, порой чисто математических проблем.

В связи с этим интересно наблюдать, каким образом математики все-таки решают сложные проблемы. Анри Пуанкаре в [5] пишет: “Изучая труды великих и даже рядовых математиков, невозможно не заметить и не различить две противоположные тенденции …. Одни прежде всего заняты логикой; читая их работы, хочется думать, что они шли вперед лишь шаг за шагом …. Другие вверяют себя интуиции и подобно смелым кавалеристам авангарда сразу делают быстрые завоевания, впрочем, иногда не совсем надежные.” Таким образом, зачастую успех в решении крупной проблемы достигается не путём последовательных логических шагов, а некоторым интуитивно-наглядным, до конца не обоснованным рассмотрением, оставляя на будущее строгое логическое его обоснование. Интересны также мысли многих математиков относительно эстетических соображений в своей работе. Герман Вейль говорил, что в своих исследованиях, “если надо было выбирать между истиной и красотой, я выбирал красоту”. Возможно, эстетические ощущения, как ощущения скрытой истины или гармонии, помогают математикам при решении сложных задач. Это, можно сказать – одно из средств борьбы со всё усложняющейся математической действительностью.

Проблемы второго типа, связанные с трудностью построения нужных математических моделей можно проиллюстрировать на примере задачи компьютерного перевода с одного естественного языка на другой. В начале 1950-х, с появлением первых ЭВМ и с преувеличением их реальных возможностей, исследователи были уверены, что создание достаточно хороших программ-переводчиков возможно, надо лишь запрограммировать основные правила языка и соответстующий словарь. Но, время шло, а осуществить этот проект не удавалось. Например, на тестировании одной из таких программ, машине предлагалось сначала перевести предложение с русского на английский, а затем обратно. Было введено предложение: “Дух силен, а плоть немощна”, на выходе получили: “Вино хорошее, но мясо протухло”. Оказалось, что человеческие языки очень сложны для формализации: смысл некоторых слов зависит от контекста, правила зачастую неоднозначны, этих правил очень много и они сложны. До сих пор нет удовлетворительных программ-переводчиков.

Трудность применения математических методов в данном случае, как мне кажется, связана с природой самой исследуемой области. А именно тем, что основные математические абстракции произошли от таких объектов реальности, как пространство, время, природные объекты, а не от каких-то явлений социальной действительности (к которым относится и язык). Поэтому они полезны и достаточно просто описывают физические, химические и биологические процессы, но соответствующие модели, например, языка получаются очень сложными. Можно еще добавить следующее замечание: правила языка, в отличие от законов природы довольно часто (непрерывно) меняются, поэтому математика, “отделившаяся” от природы при помощи абстракции 1000 лет назад, продолжает сохранять некоторые законы природы в себе, а если бы это “отделение” произошло от языка, который с тех пор изменился значительно, многие полезные связи разрушились бы, или усложнились.

Другие проблемы второго типа связаны с тем, что построенная в соответствии с обычной методологией математическая модель может неправильно описывать процесс или вообще не иметь смысла в исследуемой области. Согласно [7] такие модели содержат неконструктивные элементы, что может привести к противоречиям в теории и рассогласованию с опытом даже перспективных математических аппаратов. В современной физике теория создается не так, как это было в классической физике, когда исходя из некоторой картины мира (например, независимость материальных объектов от пространства и времени у Ньютона), строилась соответствующая математическая гипотеза. Сейчас же, согласно [7], сначала формируется математический аппарат, а затем уже адекватная теоретическая схема, интерпретирующая этот аппарат. В отличие от онтологических принципов классической физики, которые помогали создавать или выбирать математические модели исследования, квантово-релятивистская физика сместила акценты для такого выбора в сторону гносеологических принципов (принцип соответствия, простоты, неопределенности и др.). То что сначала вводится некоторая математическая модель, а затем интерпретируется, создает проблему с экспериментальным подтверждением теории: чтобы обосновать математическую гипотезу опытом, недостаточно просто сравнивать следствия из уравнений с опытными данными, необходимо каждый раз эксплицировать гипотетические модели, которые были введены на стадии математической экстраполяции, отделяя их от уравнений, обосновывать эти модели конструктивно, вновь сверять с созданным математическим формализмом и только после этого проверять следствия из уравнений опытом. Длинная серия математических гипотез порождает опасность накопления в теории неконструктивных элементов и утраты эмпирического смысла величин, фигурирующих в уравнениях. Поэтому в современной физике на определенном этапе развития теории становятся необходимыми промежуточные интерпретации, обеспечивающие операциональный контроль за создаваемой теоретической конструкцией. В системе таких промежуточных интерпретаций как раз и создается конструктивнообоснованная теоретическая схема, обеспечивающая адекватную семантику аппарата и его связь с опытом.

В [7] приводится пример такого накопления. Квантовая электродинамика началась с построения формализма, позволяющего описать "микроструктуру" электромагнитных взаимодействий. Создание указанного формализма довольно отчетливо расчленяется на четыре этапа. Вначале был введен аппарат квантованного электромагнитного поля излучения (поле, не взаимодействующее с источником). Затем на втором этапе, была построена математическая теория квантованного электронно-позитронного поля (было осуществлено квантование источников поля). На третьем этапе было описано взаимодействие указанных полей в рамках теории возмущений в первом приближении. Наконец, на заключительном, четвертом этапе был создан аппарат, характеризующий взаимодействие квантованных электромагнитного и электронно-позитронного полей с учетом последующих приближений теории возмущений (этот аппарат был связан с методом перенормировок, позволяющим осуществить описание взаимодействующих полей в высших порядках теории возмущений).

В период, когда уже был пройден первый и второй этапы построения математического формализма теории и начал успешно создаваться аппарат, описывающий взаимодействие свободных квантованных полей методами теории возмущений, в самом фундаменте квантовой электродинамики были обнаружены парадоксы, которые поставили под сомнение ценность построенного математического аппарата. Это были так называемые парадоксы измеримости полей. В работах П. Иордана, В. А. Фока и особенно в совместном исследовании Л. Д. Ландау и Р. Пайерлса было показано, что основные величины, которые фигурировали в аппарате новой теории, в частности, компоненты электрической и магнитной напряженности в точке, не имеют физического смысла. Поля в точке перестают быть эмпирически оправданными объектами, как только исследователь начинает учитывать квантовые эффекты.

Источником парадоксов измеримости была неадекватная интерпретация построенного формализма. Такая интерпретация была неявно введена в самом процессе построения аппарата методом математической гипотезы.

Математические гипотезы весьма часто формируют вначале неадекватную интерпретацию математического аппарата. Они "тянут за собой" старые физические образы, которые "подкладываются" под новые уравнения, что может привести к рассогласованию теории с опытом. Поэтому уже на промежуточных этапах математического синтеза вводимые уравнения должны быть подкреплены анализом теоретических моделей и их конструктивным обоснованием.

Заключение

Сформулируем основные идеи, к которым мы пришли в результате проделанной работы. Итак, в процессе математизации наук в основном используются три метода: математическое моделирование, формализация и аксиоматизация.

Моделирование представляет собой некоторое отображение явления объективной реальности в структуры и множества математических объектов. При этом должны сохраняться необходимые для исследователя отношения между объектами предметной области. А также должно происходить некоторое упрощение (абстракция): исчезают ненужные, отвлекающие внимание детали. Но, при этом, модель не должна слишком упрощать картину. Удивительная продуктивность математического моделирования в естествознании связана с тем, что родившись при помощи абстаркции от объектов реальной действительности, математические понятия сохранили (возможно неявно) те отношения между этими объектами, которые потом и проявляются при их моделировании.

Формализация – процесс “кодирования” объектов изучаемой реальности некоторым искусственным языком, и формулировка основных законов исследуемого явления на этом языке. Полезность этого подхода состоит в том, что изначально неясная и смутная картина заменяется строгими и точными манипуляциями с языком.

Аксиоматизация предполагает выявление простейших понятий и аксиом области исследования, из которых посредством логических правил получаются все теоремы (истинные утверждения) данной теории. Этот метод позволяет охватывать всю изучаемую область с помощью относительно небольшого списка аксиом.

Проблемы применения математических методов в различных науках связаны с самой математикой (математическое изучение моделей), с областью моделирования (сложно построить модель из-за размытости границ явления) и c интерпретацией модели (построенная модель неправильно описывает явление).

Возможности математизации ограничиваются скорее всего сложностью исследуемых явлений. Поэтому, как я думаю, если формулировка проблемы разумна (то есть если не пытаться математизировать эстетику, например), то рано или поздно можно будет применить математику для ее решения.

**Список литературы**

[1] Математический энциклопедический словарь. Москва, 1988г.

[2] Арнольд В.И. Для чего мы изучаем математику? Что об этом думают сами математики? // Квант №1, 1993

[3] Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. М. Изд-во “Бек”, 2002

[4] Гуц А.К. Лекции по семинару “Основные идеи в математике” , 2 семестр, 2000 г.

[5] Пуанкаре А. Интуиция и логика в математике. ( Пуанкаре А. О науке (под ред. Л.С. Понтрягина). — М., Наука, 1989, стр. 205-218 )

[6] Вейль Г. Математический способ мышления (под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина; пер. с англ. Ю.А. Данилова). М.: Наука, 1989. стр. 6-24

[7] Горохов В.Г. Розов М.А. Степин В.С. Философия науки и техники.