**Тезис Гьоделя. Теорема Черча**

Реферат з дисципліни «Теория алгоритмів та представлення знань»

Виконав студент 3-го курсу 36 групи Левицький Е.Г.

Європейський Університет

Уманська філія

Кафедра математики та інформатики

Умань – 2005

**Вступ**

Введение понятия машины Тьюринга уточняет понятие алгоритма и указывает путь решения какой-то массовой проблемы. Однако машина Тьюринга бывает неприменима к начальной информации (исходному слову алфавита). Та же ситуация повторяется относительно некоторых задач, для решения которых не удается создать машины Тьюринга. Один из первых результатов такого типа получен Черчем в 1936 году. Он касается проблемы распознавания выводимости в математической логике.

1). Аксиоматический метод в математике заключается в том, что все теоремы данной теории получаются посредством формально-логического вывода из нескольких аксиом, принимаемых в данной теории без доказательств. Например, в математической логике описывается специальный язык формул, позволяющий любое предложение математической теории записать в виде вполне определенной формулы, а процесс логического вывода из посылки следствия может быть описан в виде процесса формальных преобразований исходной формулы. Это достигается путем использования логического исчисления, в котором указана система допустимых преобразований, изображающих элементарные акты логического умозаключения, из которых складывается любой , сколь угодно сложный формально-логический вывод.



Вопрос о логической выводимости следствия из посылки является вопросом о существовании дедуктивной цепочки, ведущей от формулы к формуле . В связи с этим возникает проблема распознавания выводимости: существует ли для двух формул и дедуктивная цепочка, ведущая от к или нет. Решение этой проблемы понимается в смысле вопроса о существовании алгоритма, дающего ответ при любых и . Черчем эта проблема была решена отрицательно.



**Теорема Черча. Проблема распознавания выводимости алгоритмически неразрешима.**

Проблема распознавания самоприменимости. Это вторая проблема, положительное решение которой не найдено до сих пор. Ее суть заключается в следующем. Программу машины Тьюринга можно закодировать каким-либо определенным шифром. На ленте машины можно изобразить ее же собственный шифр, записанный в алфавите машины. Здесь как и в случае обычной программы возможны два случая:

1. машина применима к своему шифру, то есть она перерабатывает этот шифр и после конечного числа тактов останавливается;

2. машина неприменима к своему шифру, то есть машина никогда не переходит в стоп - состояние.

Таким образом, сами машины (или их шифры) разбиваются на два класса: класс самоприменимых и класс несамоприменимых тьюринговых машин. Проблема заключается в следующем как по любому заданному шрифту установить к какому классу относится машина, зашифрованная им: к классу самоприменимых или несамоприменимых.

Теорема 2. Проблема распознавания самоприменимости алгоритмически неразрешима.

3). Проблема эквивалентности слов для ассоциативных исчислений.

Рассмотрим некоторый алфавит и множество слов в этом алфавите. Будем рассматривать преобразования одних слов в другие с помощью некоторых допустимых подстановок , где и два слова в том же алфавите Если слово содержит как подслово, например , то возможны следующие подстановк , , .



Ассоциативным исчислением называется совокупность всех слов в некотором алфавите вместе с какой-нибудь конечной системой допустимых подстановок. Для задания ассоциативного исчисления достаточно задать соответствующий алфавит и систему подстановок.

Если слово может быть преобразовано в слово путем однократного применения определенной подстановки, то и называются смежными словами. Последовательность слов таких, что каждая пара слов являются смежными, называется дедуктивной цепочкой, ведущей от слова к слову . Если существует цепочка, ведущая от слова к слову , то и называются эквивалентными: ~.



Для каждого ассоциативного исчисления возникает своя специальная проблема эквивалентности слов: для любых двух слов в данном исчислении требуется узнать эквивалентны они или нет.

Теорема 3. Проблема эквивалентности слов в любом ассоциативном исчислении алгоритмически неразрешима.

Эта проблема решена лишь в некоторых ассоциативных исчислениях специального вида.

**Математические теории.**

Аксиоматические теории делятся на формальные и неформальные. Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико – множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и в значительной степени опирается на здравый смысл.

Формальная аксиоматическая теория считается определенной, если выполнены следующие условия:

задан язык теории;

определено понятие формулы в этой теории;

выделено множество аксиом теории;

определены правила вывода в этой теории.

Среди математических теорий выделяются теории первого порядка. Эти теории не допускают в своем изложении предикаты, которые имеют в качестве аргументов другие предикаты и функции. Кроме того, не допускаются кванторные операции по предикатам и функциям. Теории первого порядка называются еще элементарными теориями.

1). Язык теории первого порядка. Рассмотрим некоторый алфавит теории Множество слов этого алфавита называется множеством выражений теории Пару , состоящую из алфавита и множества выражений, называют языком теории.



В алфавит всякой теории первого порядка входят:



символы логических операций



символы кванторных операций



вспомогательные символы – скобки и запятые;

конечное или счетное множество - местных предикатных букв;



конечное или счетное множество функциональных букв;

конечное или счетное множество предметных констант.

В частности под функциональной буквой может пониматься цепочка логических операций.

Множество предикатных букв вместе с множеством функциональных букв и констант называется сигнатурой языка данной теории.

Различные теории первого порядка могут отличаться друг от друга по составу букв в алфавите.

**Термы и формулы.**

В любой теории важное значение имеет определение терма и формулы. Фактически это два класса слов множества.

Термом называется: а). предметная переменная и переменная константа;

Таким образом, кроме предметных переменных и констант термами являются цепочки, образованные из предметных переменных и констант посредством символов операций.

Примеры теорий первого порядка.

1). Геометрия (теория равенства отрезков).

Логические аксиомы этой теории те же пять, что упомянутые выше. Первичные термины - множество всех отрезков и = - отношение равенства.



2). Аксиоматическая теория натуральных чисел.

Аксиоматическое построение арифметики натуральных чисел связано с именами Пеано и Дедекинда. Язык теории содержит константу 0, числовые переменные, символ равенства, функциональные символы +, . , (прибавление единицы) и логические связки, то есть. Термы строятся из константы 0 и переменных с помощью функциональных символов. В частности натуральные числа изображаются термами вида 0.



Элементарные формулы в этой теории – это равенства термов, остальные формулы получаются из элементарных с помощью логических связок. Вводится одна предикатная буква и три функциональных буквы.

- отношение равенства, - отношение следования (прибавление единицы), - операция суммы, - операция произведения. В качестве специальных аксиом теории натуральных чисел берутся следующие аксиомы:

где - произвольная формула теории натуральных чисел. Девятая аксиома называется принципом математической индукции. Аксиомы 1-2 обеспечивают очевидные свойства равенства, аксиомы 5-8 уточняют свойства операций сложения и умножения.

Для произвольных теорий первого порядка теорема дедукции, доказанная нами в исчислении высказываний, требует изменения. В первоначальном виде, причем никаких ограничений на предметные переменные, входящие в, не накладывалось. Для справедливости теоремы дедукции для произвольных теорий первого порядка необходимо ее изменить следующим образом.

Теорема Геделя о неполноте. В любой непротиворечивой формальной системе, содержащей минимум арифметики, а, следовательно, и в теории натуральных чисел, найдется формально неразрешимое суждение, то есть такая замкнутая формула , что ни , ни не являются выводимыми в системе.



Пусть у нас есть некая формальная система T, т.е. некий набор аксиом, из которых мы, пользуясь фиксированных набором правил перехода и общелогических аксиом, можем доказывать какие-нибудь теоремы. Поставим несколько условий: пусть, во-первых, наша система T будет сформулирована на языке арифметики. Это значит, что формулы аксиом и теорем в T, кроме общелогических символов (таких, как переменные, скобки, ∧ "и", ¬ "не-" и прочие логические операции, знак равенства =, а также кванторы существования ∃ и всеобщности ∀) могут содержать такие символы, как 0 (константа), + (бинарная операция), \* (ещё одна операция), < (отношение "меньше, чем"), S(x) (функция, обозначающая "следующий за x элемент", т.е. x+1). Во-вторых, пусть система T будет достаточно мощной, что в нашем случае значит, что она умеет доказывать некоторые достаточно простые формулы отношений между натуральными числами (подробности я опускаю). Например, если мы не внесём вообще никаких аксиом в T, то она ничего нетривиального не сможет доказать, т.е. будет недостаточно мощной и теорема Гёделя к ней относиться не будет. Но любой достаточно полный список аксиом арифметики (например, перечисляющий обычные тривиальные свойства операций умножения и сложения, отношения < и функции S(x)) оказывается достаточно мощным для наших целей. В-третьих, система T должна быть в некотором техническом смысле "легко описываемой" — в ней должно быть либо конечное количество аксиом, либо бесконечное, но описываемое с помощью какого-то заранее известного алгоритма. Любую формальную систему, отвечающую этим трём условиям, назовём подходящей (это не стандартная терминология, просто для удобства только в этой записи).  
С точки зрения формальных доказательств система T не имеет "семантики", иными словами, смысл используемых в ней символов нам безразличен. Формальное доказательство есть всего лишь некоторая длинная цепочка строк, в которой каждая строка есть аксиома T, общелогическая аксиома, или получена из предыдущих строк применением одного из разрешённых правил перехода. Мы обозначили, скажем, одну из операций языка арифметики символом \*, потому что она соответствует нашему пониманию умножения; но с точки зрения формальной системы T \* — всего лишь символ, который ничего не означает. Вместо него мог быть любой другой символ, скажем, %, и все доказательства оставались бы в силе; просто если бы мы захотели определить смысл аксиом или доказываемых нами теорем, нам пришлось бы понимать % как "умножение".

Сказать, что какое-то утверждение доказуемо в T — значит сказать, что есть некоторое формальное доказательство, которое к нему приводит. Доказуемость — синтаксическое свойство, а не семантическое. С другой стороны, сказать, что какое-то утверждение истинно — значит, сказать, что если мы интерпретируем его согласно обычной интерпретации символов T (т.е. \* будем понимать как "умножение", символ 0 — как число 0, итп.), то получаем истинное утверждение о натуральных числах.

Доказуемость необязательно влечёт истинность. Предположим для простоты, что для каждого натурального числа n в нашем языке есть константа n, позволяющая "говорить" о числе n в формулах нашего языка (на практике мы можем "симулировать" такие константы, не объявляя их, с помощью цепочки терминов: 0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))) итп.). Теперь возьмём формальную систему T, в которой есть следующая аксиома: 2+2=5. Тогда утверждение  
"2+2=5" доказуемо в системе T (т.к. оно даже является аксиомой), но, естественно, ложно (является ложным утверждением о натуральных числах).  
Есть формальные системы, которые доказывают только истинные утверждения. Таковы системы, в которых все аксиомы — истинные утверждения (можно доказать, что тогда все правила перехода между аксиомами сохраняют истинность). Такие формальные системы называются корректными.  
Формальная система называется консистентной, если она не может доказать одновременно какое-то утверждение и его отрицание, т.е. доказать противоречие. Неконсистентная формальная система — это плохо и практически бесполезно, т.к. можно легко показать, что из доказательства противоречия можно получить доказательство чего угодно. Неконсистентная формальная система доказывает вообще любое утверждение, так что ничего интересного в ней нет.  
Если система корректна, то она автоматически консистентна: ведь она доказывает только истинные утверждения, а какое-то утверждение и его отрицание не могут одновременно быть истинными: одно из них будет истинным, а другое ложным. Заметим, однако — это важно! — что "консистентность", как и "доказуемость" есть свойство синтаксическое, не зависящее от смысла формул и их интерпретации; а вот корректность системы есть свойство семантическое, требующее понятия "истинности".  
Наконец, формальная система называется полной, если для любого утверждения φ она может доказать либо φ, либо ¬φ ("не-φ"). Доказательство ¬φ называется также опровержением φ ; таким образом, полная система может либо доказать, либо опровергнуть любою утверждение. В некотором смысле она "на все вопросы даёт ответ". Что ни скажешь про натуральные числа — она сможет либо доказать это, либо опровергнуть. Это свойство полноты – тоже синтаксическое, не пользующееся понятием "истинности".

Теперь мы можем определить три формулировки теоремы Гёделя о неполноте следующим образом:  
1. Пусть T — "подходящая" (см. выше) формальная система, и предположим также, что T — корректная система. Тогда множество утверждений, которые T может доказать, и множество истинных утверждений не совпадают (а так как все доказуемые с помощью T утверждения истинны, отсюда сразу следует, что есть истинные утверждения, недоказуемые в T).  
2. Пусть T — "подходящая" формальная система, и предположим опять, что T корректна. Тогда мы можем построить конкретное утверждение G (называемое "гёделевым утверждением"), обладающее следующим свойством: G истинно, но недоказуемо в T.  
3. Пусть T — "подходящая" формальная система, и предположим, что T консистентна. Тогда T не является полной системой, т.е. существует утверждение G такое, что T не может его ни доказать, ни опровергнуть; более того, мы можем построить такое конкретное G (называемое "гёделевым утверждением").  
Неполнота системы T утверждается в качестве результата только в третьей версии, но легко видеть, что она сразу следует из заключения и в первых двух версиях. В них мы заключаем, что существует какое-то истинное, но недоказуемое утверждение. Такое утверждение T не доказывает, но и опровергнуть его — доказать его отрицание — она не может, т.к. его отрицание ложно, а T (в первых двух вариантах теоремы) корректна и доказывает только истинные утверждения. Поэтому T не может ни доказать, ни опровергнуть такое утверждение G и, следовательно, T неполна.  
Но вот что действительно отличает первые две версии от третьей: условие теоремы. В первых двух версиях от системы T требуется быть корректной; в третьей версии она должна быть всего лишь консистентной — намного более слабое требование. Есть бесчисленное количество консистентных, но некорректных систем. Ещё более важен тот факт, что и в условии, и в заключении третьей версии теоремы используются только синтаксические понятия, не требующие понятия "истинности", не требующие семантики. Третья версия теоремы и есть та, которую первоначально доказал Гёдель в начале 30-х годов прошлого века.  
если быть совсем точным, формулировка Гёделя включала дополнительное синтаксическое условие для теории T, называющееся w-консистентностью (произносится "омега-консистентность"). Однако через пять лет после публикации статьи Гёделя Россер доказал, что от этого условия можно избавиться и достаточно одной консистентности)  
То, что в самой сильной и общей своей формулировке теорема Гёделя не накладывает на T никаких существенных семантических условий, и заключение её тоже вполне синтаксично — это очень важно понять. Важно не только и не столько потому, что иногда мы хотим применить теорему Гёделя к некорректным системам, хоть и это тоже верно. Важно в основном по следующим двум причинам.  
Во-первых, первая теорема о неполноте Гёделя используется в доказательстве второй теоремы о неполноте Гёделя, которая доказывает, что "подходящая" (в несколько другом, но схожем с описанным выше, смысле) формальная система T не может доказать собственную консистентность, если она консистентна (если она неконсистентна, то она может доказать всё что угодно, включая собственную консистентность, как ни парадоксально это звучит). Я не буду вдаваться в подробности, но замечу лишь, что в процессе доказательства второй теоремы о неполноте необходимо показать, что доказательство первой теоремы о неполноте можно формализовать внутри системы T. Иными словами, не просто "если T консистента, то она неполна" (третья версия первой теоремы о неполноте, см. выше), но также это утверждение (точнее, его арифметический аналог) можно доказать в самой системе T. Но в то время, как можно формализовать "внутри" системы T такие понятия, как "формальная система", "консистентность" и "полнота", оказывается, что понятие "истинности" формализовать внутри T невозможно в принципе. Поэтому первый и второй варианты теоремы Гёделя, хоть они и более просты для доказательства, не могут быть использованы для доказательства второй теоремы Гёделя.

Во-вторых, теорема Гёделя о неполноте применима не только к формальным системам, сформулированным в языке арифметики (т.е. говорящим о натуральных числах), но также к бесчисленному множеству других формальных систем, от которых требуется только, чтобы они были "подходящими" в нужном техническом смысле; главное требование здесь — чтобы они были не менее мощными, чем теория T в языке арифметики, для которой мы собственно доказываем теорему Гёделя, а это требование обеспечивается возможностью интерпретировать T в такой новой теории. Например, формальная система ZFC, используемая для формализации теории множеств, а вместе с ней и практически всей современной математики, намного более мощна, чем какая-нибудь простенькая арифметическая T, для которой мы доказали теорему Гёделя этот факт можно строго описать (предъявив интерпретацию, т.е. способ перевести утверждения из языка T в утверждения языка ZFC, и показав, что ZFC тогда доказывает "перевод" всех аксиом T) и из него тогда будет следовать, что и ZFC тоже неполна, т.е. в ней тоже есть какое-то гёделево утверждение G, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Проблема, однако, в том, что в отличие от арифметических формальных систем, для утверждений которых у нас всегда есть удобный и обычный способ определить их истинность (посмотреть на то, верны ли они как утверждения о натуральных числах), для других формальных систем, таких, скажем, как ZFC, понятие истинности вообще не определено или определено очень плохо. Для них первая и вторая версии теоремы Гёделя оказываются неподходящими именно потому, что эти версии опираются на корректность данной системы и на существование определённого понятия истинности утверждений. Подходит только третья, чисто синтаксическая версия.

**Список литературы**

1. www.intuit.ru

2. www.proza.ru

3. www.referat.ru