**Исследование решений одной системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций**

Н.В. Перцев, Омский государственный педагогический университет, кафедра математического анализа

**1. Введение**

В работе автора [1] предложена математическая модель, описывающая динамику численности некоторых популяций с ограниченным временем жизни особей. Модель представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений



с начальным условием



где , а оператор имеет вид , .



В настоящей работе приводятся результаты изучения вопросов существования, единственности, неотрицательности и ограниченности решений системы уравнений (1) с начальным условием (2). Рассмотрены также достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, которые применяются к исследованию вопроса о вырождении популяций. Для изучения поведения решений используются принцип сжимающих отображений, монотонный метод [2, с. 43] и свойства М - матриц [3, с. 132].

**2. Основные результаты**

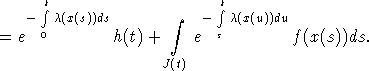
Введем некоторые обозначения.Пусть - длина вектора , - норма матрицы A = ( ai j ), [4, с. 196], A+ - матрица, составленная из элементов , Rm+ - множество векторов с неотрицательными компонентами. Если , то запись u>0 означает, что ui>0 при всех . Неравенства между векторами из Rm понимаются как неравенства между их комнонентами. Для фиксированного T>0 под C+T будем понимать пространство неотрицательных непрерывных на отрезке [0,T] функций с нормой , где K>0 - некоторая константа, [2, с. 11]. В системе (1) , при под понимается правосторонняя производная. Далее, , , , , . Функции предполагаются непрерывными в своих областях определения.



От системы уравнений (1) с начальным условием (2) перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений вида



где (Fx)(t) =



Здесь при , h(t) = 0 при , - отрезок интегрирования, . Примем в дальнейшем, что выполнено следующее предположение :



H) элементы матрицы определены, непрерывны и ограничены, ; функции удовлетворяют условию Липшица , , , где D - некоторое выпуклое подмножество Rm+.



Пусть M1 и M2 такие постоянные, что , , . Зададим матрицы A,B,Q по формулам : , где при и при , , Q = I - A B, I - единичная матрица. Положим



(Lx)(t) =



где . Тогда и для всех таких, что , верно неравенство .



Теорема 1. Пусть предположение H) выполняется на множестве D = Rm+. Тогда система уравнений (3) имеет единственное непрерывное решение x=x(t), определенное на , и справедливы оценки , где .



Теорема 2. Пусть предположение H) выполняется на некотором прямоугольнике и существует , такой, что . Тогда система уравнений (3) имеет единственное непрерывное, ограниченное решение x=x(t), определенное на , и справедливы оценки .



Теорема 3. Пусть предположение H) выполняется либо на множестве D = Rm+, либо на некотором прямоугольнике D = D0. Пусть, кроме того, f(0) = 0 и Q является невырожденной М - матрицей. Тогда система уравнений (1) имеет нулевое решение x(t) = 0, которое является экспоненциально устойчивым, иначе для всех верно , где .



Приведем краткую схему доказательства этих теорем. В условиях теоремы 1 будем искать функцию w(t), удовлетворяющую неравенствам . Выберем . Используя оценку , приходим к неравенству , где , . Имеем, что при (поэлементно). Единичная матрица I является невырожденной М - матрицей. В силу непрерывной зависимости найдется такое a0>0, что (I - A0(a0) B) также будет невырожденной М - матрицей. Используя свойства невырожденных М - матриц, получаем, что существует , такой, что верно неравенство . Отсюда следует, что при всех . Зафиксируем T>0 и обозначим через CwT множество всех функций , удовлетворяющих неравенству . Тогда из неравенств следует, что . Пусть множество . Для всех верно, что , где , , . Полагая , получаем, что отображение F является сжимающим. При доказательстве теоремы 2 функция w(t) ищется в виде w(t) = b0, где . Если существует , такой, что , то и является сжимающим отображением на CwT. Используя далее принцип сжимающих отображений, убеждаемся в справедливости утверждений теорем 1 и 2.



Для доказательства теоремы 3 строится оценка на решение , где , функция w(t) такова, что . Эти неравенства будут выполнены, если , где , при при . Матрица (I - A1(a) B) непрерывно зависит от a и (поэлементно) при . Так как Q является невырожденной М - матрицей, то найдется a = a0 >0 такой, что (I - A1(a0) B) также будет невырожденной М - матрицей. Используя свойства невырожденных М - матриц, можно показать, что существуют и такие, что выполняется неравенство . В итоге получаем, что справедливы оценки на решение .



**3. Заключение**

Установленные выше результаты указывают на корректность применения представленной модели в целях описания динамики численности популяций. Это связано с тем, что решения модели обладают такими важными свойствами, как существование, единственность, неотрицательность и ограниченность, которые соответствуют смыслу моделируемых процессов.

Важным следствием теоремы 3 являются достаточные условия, при которых популяция вырождается, т.е. ее численность x(t) такова, что при . Предположение H) задает ограничения на интенсивности процессов рождения и гибели особей, тогда как условие f(0) = 0 означает, что нет внешних источников поступления новых особей. Заметим, в частности, что предположение H) и условие f(0) = 0 выполняются для линейных процессов рождения и гибели особей. В нелинейном случае этому предположению и условию удовлетворяют f(x) и , заданные в виде некоторых многочленов, рациональных функций либо функций с непрерывными частными производными. Функции такого вида широко используются в моделях биологических процессов, см., например, [5,6].



Нетрудно показать, что матрица Q будет невырожденной М - матрицей для малых или при достаточно малых ненулевых элементах матрицы B. Если в условиях теоремы 3 D = Rm+, то экспоненциальная оценка на решение x(t) справедлива при любом начальном значении x(0). Если же D = D0, то эта оценка выполняется для x(0), лежащих в некоторой окрестности точки x = 0. В обоих случаях конкретный вид начального распределения особей по возрасту не влияет на экспоненциальную оценку (вектор зависит только от значений x(0)). В рамках принятых предположений можно сделать следующий вывод: если в некоторых популяциях особи являются короткоживущими или интенсивности процесса рождения особей достаточно малы, то такие популяции обязательно вырождаются, причем независимо от начального распределения особей по возрасту.



В завершение рассмотрим пример. Одной из классических моделей динамики популяций является так называемая логистическая модель или модель Ферхюльста, которая описывается дифференциальным уравнением



с начальным условием , где , см., например, [5, c. 14]. Если учитывать ограниченность времени жизни особей, то в соответствии с (1) следует рассмотреть уравнение



с начальным условием (2). Здесь в качестве множества D можно рассматривать произвольный отрезок [0, d], . Пусть . Из теоремы 3 следует, что решение x(t) данного интегро-дифференциального уравнения таково, что при для любых начальных значений x(0). Можно показать, что этот результат справедлив и для . Неравенства задают на плоскости область параметров, при которых популяция вырождается. Кроме того, можно показать, что для решение при , независимо от значений x(0), где x\* - единственный положительный корень уравнения С ростом t решение x(t) приближается к x\* либо монотонно, либо с затухающими колебаниями. Отметим, что решение логистической модели таких колебаний не имеет.



В заключение укажем, что система уравнений (1) с начальным условием (2) является обобщением некоторых из моделей, рассмотренных в работе [7].

**Список литературы**

Перцев Н.В. Применение одного дифференциального уравнения с последействием в моделях динамики популяций // Фундаментальная и прикладная математика / Ред. А.К. Гуц. Омск, 1994. С.119 - 129.

Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

Berman A., Plemmous R.J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York, Academic Press, 1979.

Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.

Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

Cooke K., Yorke A. Some equations Modelling Growth Processes and Gonorhea Epidemics // Math. Biosci., 1973. V.16. P.75 - 101.