Сургутский государственный педагогический институт

Кафедра высшей математики

##### РЕФЕРАТ

По дисциплине:

***ИСТОРИЯ*** ***МАТЕМАТИКИ***

На тему:

#### ТЕОРИЯ ФЛЮКСИЙ

Выполнил:

Студентка гр. 751,

Митющенко Е.В.

Проверил:

преподаватель

Ефремова Т.Н.

Сургут, 2000.

# Оглавление

Введение 2

§ 1. Общие положения теории флюксий 3

§ 2. Решение проблем теории флюксий 6

Решение первой проблемы 7

Решение второй проблемы 7

Частное решение. 7

Подготовление к решению. 9

Классификация уравнений в рамках проблемы и их решение 12

Решение первого случая. 12

Решение второго случая. 12

Заключение 16

Литература: 17

# Введение

К последней трети 17 века относится открытие дифференциального и интегрального исчисления в собственном смысле слова. В отношении публикации приоритет этого открытия принадлежит Г. Лейбницу, давшему развёрнутое изложение основных идей нового исчисления в статьях, опубликованных в 1682-86. В отношении же времени фактического получения основных результатов имеются все основания считать приоритет принадлежащим И. Ньютону, который к основным идеям дифференциального и интегрального исчисления пришёл в течение 1665-66.

"Анализ с помощью уравнений" И. Ньютона в 1669 был передан им в рукописи английским математикам И. Барроу и Дж. Коллинзу и получил широкую известность среди английских математиков. "Метод флюксий" - сочинение, в котором И. Ньютон дал вполне законченное систематическое изложение своей теории, - был написан в 1670-71 (издан в 1736). Г. Лейбниц же начал свои исследования по анализу бесконечно малых лишь в 1673.

И. Ньютон и Г. Лейбниц впервые в общем виде рассмотрели основные для нового исчисления операции дифференцирования и интегрирования функций, установили связь между этими операциями (так называемая формула Ньютона - Лейбница) и разработали для них общий единообразный алгоритм.

Подход к делу у И. Ньютона и Г. Лейбница, однако, различен. Для И. Ньютона исходными понятиями являются понятия "флюенты" (переменной величины) и её "флюксий" (скорости её изменения).

# § 1. Общие положения теории флюксий

Основные задачи теории Ньютон формулировал в терминах механики:

1. определение скорости движения по известной зависимости пути от времени; «Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время»
2. определение пройденного за данное время пути по известной скорости. «Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути»

Прямой задаче нахождения флюксий и соотношений между флюксиями по заданным флюентам (дифференцирование и составление дифференциальных уравнений) Ньютон противопоставлял обратную задачу нахождения флюент по заданным соотношениям между флюксиями, то есть сразу общую задачу интегрирования дифференциальных уравнений; задача нахождения первообразной появляется здесь как частный случай интегрирования дифференциального уравнения

*dy/dx* = *f(x)*.

Такая точка зрения была вполне естественна для Ньютона как создателя математического естествознания: его исчисление флюксий являлось просто отражением той идеи, что элементарные законы природы выражаются дифференциальными уравнениями, а предсказание хода описываемых этими уравнениями процессов требует их интегрирования. Для Лейбница в центре внимания находился вопрос о переходе от алгебры конечного к алгебре бесконечно малых; интеграл воспринимался прежде всего как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых, а основным понятием дифференциального исчисления являлись дифференциалы - бесконечно малые приращения переменных величин (наоборот, И. Ньютон, вводя соответствующее понятие "момента", стремился в более поздних работах от него освободиться).

С публикации работ Г. Лейбница в континентальной Европе начался период интенсивной коллективной работы над дифференциальным и интегральным исчислением, интегрированием дифференциальных уравнений и геометрическими приложениями анализа, в которой принимали участие, кроме самого Г. Лейбница, Я. Бернулли, И. Бернулли, Г. Лопиталь и другие. Здесь создаётся современный стиль математической работы, при котором полученные результаты немедленно публикуются в журнальных статьях и уже очень скоро после опубликования используются в исследованиях других учёных.

Основные идеи метода флюксий сложились у Н. под влиянием трудов П. Ферма, Дж. Валлиса и его учителя И. Барроу в 1665-66. К этому времени относится открытие Ньютоном взаимно обратного характера операций дифференцирования и интегрирования.

В понятиях и терминологии метода флюксий с полной отчётливостью отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона. Понятие непрерывной математической величины Ньютон вводит как абстракцию от различных видов непрерывного механического движения. Линии производятся движением точек, поверхности - движением линий, тела - поверхностей, углы - вращением сторон и т.д. Переменные величины Ньютон назвал флюентами (текущими величинами, от лат. fluo - теку). Общим аргументом текущих величин - флюент - является у Ньютона "абсолютное время", к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюент Ньютон назвал флюксиями, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюент - "моментами" (у Лейбница они назывались дифференциалами). Таким образом, Ньютон положил в основу понятия флюксий (производной) и флюенты (первообразной, или неопределённого интеграла). И. Ньютон в своём методе флюксий и флюент (1666 и следующие гг.) ввёл знаки для последовательных флюксий (производных) в виде

и для бесконечно малого приращения *o*



Время Ньютон понимал как общий аргумент, к которому отнесены все переменные величины. Систему величин *х, у, z,...,* одновременно изменяющихся непрерывно в зависимости от времени, он называл флюентами (лат. fluens – текущий, от fluo – теку), скорости, с которыми изменяются флюенты, – флюксиями (лат. fluxio – истечение): , , *.* Т. о., флюксии являются производными флюент по времени. Бесконечно малые изменения флюент Ньютон назвал моментами (понятие момента в Ф. и. соответствует дифференциалу), момент независимого переменного он обозначил знаком о, момент флюенты *х –* знаком *xo.*



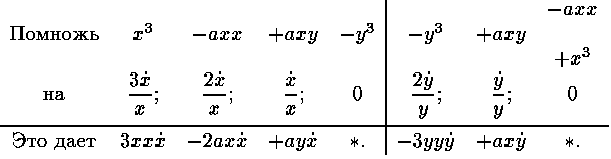
Представление о существе операции отыскания флюксий, особенностях символики и о ходе рассуждений Ньютона можно получить из следующих примеров:

Пример 1.

«Если соотношение между текущими величинами *x* и *y* выражается уравнением

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *f*(*x*,*y*) = *x*3 + *ax*2 + *axy*  *y*3 = 0, | |

то сперва расположи члены по *x*, а затем по *y* и помножь их, как указано ниже( Звездочкой Ньютон обозначает члены, которые можно отбросить, но которые потребуются в дальнейшем. ).



Сумма произведений есть



и это уравнение показывает, какое соотношение существует между флюксиями  и . (У Ньютона нет других формул, кроме



|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | (*xn*)’= *nxn-1*. | |

Нет у него формул производной произведения, дроби и сложной функции. (В "Математических началах натуральной философии", впрочем, дается формула для момента произведения.) Что производная суммы равняется сумме производных слагаемых,  представляется ему совершенно очевидным. Основное правило Ньютона это не что иное, как правило определения производной полинома *f*(*x*, *y*) по *t*, когда *x*, *y* суть функции от *t* (*t* у него время). Мы будем писать, если

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *f*(*x*,*y*) = *x*3 + *ax*2 + *axy*  *y*3 = 0, | |

что *,*



где



Ньютон предлагают находить эти , следующим образом: члены с *x*3, *x*2, *x*, *x*0 умножаются на 3*x*x’/*x*, 2*xx’*/*x*, *xx’*/*x*, 0/*x*, а члены с *y*2, *y*, *y*0 на 2*yy’*/*y*, *yy’*/*y*, 0/*y*)»



# § 2. Решение проблем теории флюксий

В "Методе флюксий..." (1670-1671) Ньютон формулирует две основные взаимно-обратные задачи анализа:

1. определение скорости движения в данный момент времени по известному пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюентами (Современная формулировка: какому дифференциальному уравнению удовлетворяют функции (независимого аргумента), связанные некоторым функциональным уравнением? Или: как дифференцировать неявно заданную функцию?),
2. определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюентами по данному соотношению между флюксиями (задача интегрирования дифференциального уравнения и, в частности, отыскания первообразных, найти общее (или хотя бы частное) решение дифференциального уравнения).

## Решение первой проблемы

Решение первой проблемы Ньютон предлагает в следующем виде:

«Расположи уравнение, которое выражает данное соотношение, по степеням какой-либо из входящих в него текущих величин (например *x*) и члены его помножь на какую-либо арифметическую прогрессию, а затем на  . Это действие произведи отдельно для каждой из текущих величин. Затем положи сумму всех этих произведений равной нулю, и ты получишь искомое уравнение». Данная рекомендация иллюстрируется примерами, аналогичными примеру 1.



## Решение второй проблемы

Для решения второй проблемы Ньютон предлагает следующие шаги:

### Частное решение.

«Так как эта проблема обратна вышеизложенной, то ее можно решать с помощью противоположных действий, а именно, члены помноженные на , должны быть расположены по степеням *x* и поделены на  , а затем  - на показатели их степеней или же на какую-либо другую арифметическую прогрессию. После того как эти действия будут произведены и для членов, помноженных на , или , получившуюся при этом сумму по отбрасывании лишних членов следует положить равной нулю.

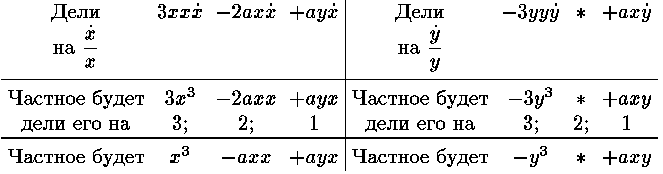


Пример 2.

Предложено уравнение



Действие производится следующим образом:



Поэтому сумма

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *x*3  *axx* + *ayx*  *y* 3 = 0 | |

выражает искомое соотношение величин *x* и *y*.

Здесь следует заметить, что хотя член *axy* встречается дважды, я все же не выписываю его дважды в сумме

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *x*3  *axx* + *ayx*  *y* 3 = 0 | |

но один из них отбрасываю как лишний. Таким образом, если какой-либо член встречается дважды (или еще больше раз в том случае, если он получается от различных флюэнт), то в сумме членов его следует выписывать лишь один раз.»

( Здесь описана следующая процедура нахождения частного решения дифференциального уравнения

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | (3*x*2  2*ax* + *ay*)*dx* = (3*y*2 + *ax*)*dy*. | |

Уравнение записывается в виде

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *d*(*x*3  *ax*2  *y* 3  *axy*) = 0, | |

откуда вытекает наличие решения

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | *x*3  *ax*2  *y* 3  *axy* = 0. | |

Произвольной постоянной Ньютон не добавляет).

Далее Ньютон пишет: «Прочие необходимые замечания я оставляю на долю проницательности самого мастера, тем более, что было бы излишним чересчур долго останавливаться на этом предмете, так как этим приемом проблема может быть решена не всегда. Я добавляю только одно замечание, а именно, что, найдя таким методом зависимость между флюэнтами, ты можешь затем согласно проблеме I вернуться к предложенному уравнению, содержащему флюксии, и тогда наверное узнаешь, правильно ли произведено действие или нет.

Предпослав все это беглым образом, я приступаю к общему решению.

### Подготовление к решению.

Прежде всего следует заметить, что в предложенном уравнении знаки флюксий в отдельных членах должны быть одинакового измерения (ибо флюксии суть величины иного рода, чем те, для которых они служат флюксиями)»

Речь идет о том, что уравнение должно быть однородным, т. е. все его слагаемые должны измеряться в одних и тех же единицах измерения. Во времена Ньютона выражение вида *x*2 + *x* считалось неправильным, поскольку нельзя "складывать площадь и длину"

«Если в каком-либо случае дело обстоит иначе, то флюксию какой-либо флюэнты следует принять за единицу и помножить на нее низшие члены столько раз, сколько требуется для того, чтобы знаки флюксий привелись во всех членах к одинаковому числу измерений. Уравнения, которые содержат только флюэнты, имеющие везде одинаковое число измерений, всегда можно привести к такому виду, чтобы в одной части находилось отношение флюксий (например, или или и т. д.), а в другой значение этого отношения, выраженное в простых алгебраических членах (таким образом, левая часть уравнения будет зависеть от производной *y* по *x*), как, например,



|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | = 2 + 2*x*  *y*. | |

В том случае, когда не может быть применено приведенное выше частное решение, уравнения всегда следует представлять в этой форме.

Поэтому, когда в значении этого отношения имеется какой-либо член с составным знаменателем или радикалом или когда это отношение представляет собой корень неявного уравнения, то прежде чем приступить к действиям, ты должен совершить приведение либо посредством деления, либо с помощью извлечения корня, либо с помощью решения неявного уравнения, как мы это объясняли выше.»

Речь идет, по существу, о хорошо известном методе Ньютона решения нелинейных уравнений, описываемом Ньютоном в предыдущем разделе трактата в форме представления решений в виде ряда.

«Пусть, например, предложено уравнение



Прежде всего приведение его дает



или



При первом предположении я обращаю выражение *y*/(*a* *x*), у которого знаменатель есть составное выражение *a* *x*, в бесконечный ряд простых членов:



(приведение это производятся делением числителя *y* на знаменатель *a*  *x*), откуда получаю



с помощью чего и следует определить отношение между *x* и *y*.

Таким же образом, если данное уравнение есть



или



или после дальнейшего преобразования



то я извлекаю квадратный корень из членов 1/4+*xx* и получаю бесконечный ряд

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | 1  2 | + *xx*  *x*4 + 2*x*7  5*x*8 + 14*x*10 и т. д. | |

При подстановке его вместо я буду иметь



|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | = 1 + *xx*  *x*4+2*x*7  5*x*8 + 14*x*10 и т. д. | |

или

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | = *xx* + *x*4  2*x*7 + 5*x*8  14*x*10 и т. д., | |

смотря по тому, прибавляю ли к 1/2 или вычитаю из нее.»



В этих примерах Ньютон описывает первый этап своего метод решения дифференциальных уравнений. В современной терминологии это приведение уравнения к нормальной форме и разложение правой части в степенной ряд.

«Далее, чтобы легче было отличать одну из флюэнт от других, можно с достаточным основанием ту из флюксий, которая находится в числителе отношения, назвать величиной отнесенной, а ту, которая стоит в знаменателе и с которой сравнивается первая,  соотнесенной, -зависимая и, соответственно, независимая переменные в дифференциальном уравнении; и этими же терминами можно соответственно называть и флюэнты. Для лучшего понимания дальнейшего можно представлять себе, что соотнесенная величина есть время или, лучше, какая-либо равномерно текущая величина, с помощью которой выражается и измеряется время, а другая, именно отнесенная, величина есть пространство, проходимое за это время вещью или точкой, обладающей некоторым ускоренным или замедленным движением. Сущность проблемы заключается тогда в определении пройденного за все время пути, если известна скорость для любого момента времени.»

## Классификация уравнений в рамках проблемы и их решение

Уравнения, относящиеся к этой проблеме, Ньютон разделил на три рода:

1. уравнения вида *F*(*x*,,) = 0, приводящиеся к виду *f*(*x*,*dy*/*dx*) = 0 «…те уравнения, в которых имеются две флюксии величин и только одна из флюэнт».



1. уравнения вида *F*(*x*,*y*,,) = 0, приводящиеся к виду *f*(*x*, *y*, *dy*/*dx*) = 0. «…те, которые содержат обе текущие величины с их флюксиями.»



1. Одно дифференциальное уравнение с несколькими неизвестными. «…те, в которых имеются флюксии больше чем двух величин»

Ньютон рассматривает и решение каждого из случаев.

### Решение первого случая.

«Прими единственную имеющуюся в уравнению флюэнту за соотнесенную величину и, преобразовав уравнение в соответствии с этим допущением (т. е. установив отношение флюксии второй величины к флюксии первой и значение этого отношения, выраженного через простые члены(Т. е. разложенного в степенной ряд)), помножь значение отношения флюксий на соотнесенную величину. Затем раздели каждый член этого выражения на показатель степени, в которую возведена в нем соотнесенная величина; то что ты таким образом получишь, и будет равно другой текущей величине.»

В современных терминах это выглядит так: нужно уравнение *f*(*x*, *y*) = 0 привести к виду *y’*= (*x*) и проинтегрировать. Процедура же интегрирования сводится к разложению  в степенной ряд и последующему почленному интегрированию ряда.

### Решение второго случая.

«До сих пор речь шла об уравнениях, которые заключают одну флюэнту. Когда же в уравнении появляются обе, то уравнение прежде всего следует привести к уже указанному виду, полагая с одной стороны отношение флюксий, а с другой  равную ему сумму простых членов.

Кроме того, если какой-либо член преобразованного таким образом уравнения представляет дробь с флюэнтой в знаменателе, то он должен быть освобожден от подобного знаменателя при помощи вышеприведенной замены текущей величины.

Таким образом, если дано уравнение



или



то в силу наличия члена *a*/*x* я беру произвольное *b* и вместо *x* пишу *b* + *x* или *b* - *x* или *x-* *b*. Если написать *b* + *x*, то получается



Обращая затем при помощи деления член *a*/(*b* + *x*) в бесконечный ряд, я вывел бы, что и т.д.



**Правило:** Подготовив таким образом (если это нужно) уравнение, расположи члены по степеням флюэнт, сперва ставя те, которые не содержат отнесенной величины, затем те, которые содержат ее в наименьшей степени, и т. д. Таким же образом распредели по отдельным родам члены согласно степеням соотнесенной величины и члены, которые образуют первый род (именно, которые не содержат отнесенной величины), запиши в виде горизонтального ряда слева направо, а остальные выпиши в левом столбце так, чтобы они образовывали нисходящий ряд, как это показано в нижеприведенной таблице.

Приготовив таким образом ряды, помножь первый или низший член первого рода на соотнесенную величину и раздели произведение на показатель его степени и то, что при этом получится, введи в результат (Предлагается проинтегрировать ряд по степеням независимой переменной).Затем подставь это значение вместо отнесенной величины в те члены уравнения, которые расположены в левом столбце; второй член результата ты получишь из следующего низшего члена по тому же способу, каким добыт первый член результата. Повторяя эти действия, ты можешь продолжить результат сколь угодно»

По существу, здесь предлагается конечный алгоритм следующих действий:

1. В уравнение подставляется разложение решения в ряд по степеням независимого аргумента с неопределенными коэффициентами.
2. Коэффициенты при одинаковых степенях приравниваются.
3. Получившаяся (бесконечная) система алгебраических уравнений получается треугольной, поэтому можно выписать ее решение в явном виде).

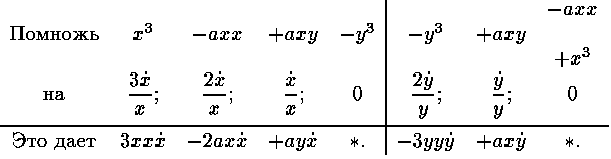
Это станет еще ясней из рассмотрения нескольких примеров.

*Пример 3.*

Пусть дано уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | = 1  3*x* + *y* + *xx* + *y*. | |

Члены его 1  3*x* + *xx*, не содержащие отнесенной величины *y*, расположены, как видишь, в первой строке, а остальные члены *y* и *xy*  в левом столбце.

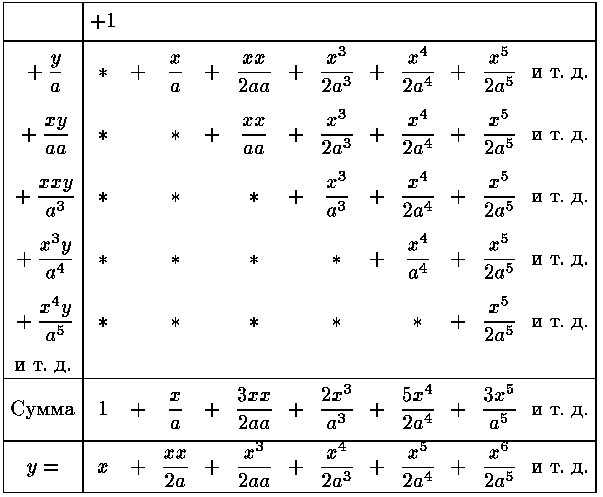


*Пример 4.*

Точно так же, если требуется определить соотношение между *x* и *y* из уравнения



в котором ряд предполагается продолжающимся до бесконечности, то наверху я пишу 1, остальные члены выписываю в левом столбце и затем произвожу действие, как это видно из представленной таблицы.



Предполагая, что мне предложено было найти выражение для *y* лишь до шестой степени *x*, я в силу этого опускаю при действии все члены, которые, как я предвижу, не будут использованы; это отмечается знаком "и т. д.", который я ставлю вместо отсеченных частей рядов»

Приведенные выше сведения были частично взяты из перевода работы "Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых", которая была написана Ньютоном в 1664-71 гг. и издана уже после его смерти.

Метод флюксий применяется здесь к большому числу геометрических вопросов (задачи на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.); здесь же выражается в элементарных функциях ряд интегралов от функций, содержащих квадратный корень из квадратичного трёхчлена. Большое внимание уделено в "Методе флюксий" интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, причём основную роль играет представление решения в виде бесконечного степенного ряда.

Во введении к "Рассуждению о квадратуре кривых" (основной текст 1665-66, введение и окончательный вариант 1670, опубликован 1704) и в "Началах" он намечает программу построения метода флюксий на основе учения о пределе, о "последних отношениях исчезающих величин" или "первых отношениях зарождающихся величин", не давая, впрочем, формального определения предела и рассматривая его как первоначальное.

В сочинении "Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов" (1669, опубликовано 1711) Ньютон вычислил производную и интеграл любой степенной функции. Различные рациональные, дробно-рациональные, иррациональные и некоторые трансцендентные функции (логарифмическую, показательную, синус, косинус, арксинус) Ньютон выражал с помощью бесконечных степенных рядов.

# 

# Заключение

Таким образом, разработанная сначала Ньютоном, затем Лейбницем теория флюксий дала начало дифференциальному и интегральному исчислениям в том виде, в котором мы их знаем сегодня.

# 

# Литература:

1. Вавилов С. И., Исаак Ньютон, М., 1961;
2. Философия и история математики. Колмогоров А. Н., Математика, в книге: Большая Советская энциклопедия, 2 изд., т. 26, М., 1954;
3. Математика, её содержание, методы и значение, т. 1-3, М., 1956;
4. Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961;
5. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959;
6. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965;
7. Исаак Ньютон. Математические работы, ОНТИ, М.-Л., 1937

  Конец формы