Теорема Безу

**Этьен Безу**–

французский математик, член Парижской Академии Наук( с 1758 года ), родился в Немуре 31 марта 1730 года и умер 27 сентября 1783 года.

С 1763 года Безу преподавал математику в училище гардемаринов, а с 1768 года и в королевском артиллерийском корпусе.

Основные работы Этьена Безу относятся к высшей алгебре, они посвящены созданию теории решения алгебраических уравнений. В теории решения систем линейных уравнений он содействовал возникновению теории определителей , развивал теорию исключения неизвестных из систем уравнений высших степеней, доказал теорему (впервые сформулированную К. Маклореном ) о том , что две кривые порядка m и n пересекаются не более чем в mn точках. Во Франции и за её границей вплоть до 1848 года был очень популярен его шеститомный“Курс математики “, написанный им в 1764-69 годах. Безу развил метод неопределённых множителей, в элементарной алгебре его именем назван способ решения систем уравнений, основанный на этом методе . Часть трудов Безу посвящена внешней баллистике. Именем учёного названа одна из основных теорем алгебры.

**Теорема Безу.**

***Остаток от деления полинома Pn(x)***

***на двучлен (x-a) равен значению***

***этого полинома при x = a.***

# Пусть :

*Pn(x)* – данный многочлен степени *n* ,

двучлен *(x-a)*  - его делитель,

*Qn-1(x)* – частное от деления *Pn(x)* на *x-a* (многочлен степени n-1 ) ,

*R* – остаток от деления ( *R* не содержит переменной *x* как делитель первой степени относительно *x* ).

**Доказательство :**

Согласно правилу деления многочленов с остатком можно записать :

*Pn (x) = (x-a)Qn-1(x) + R* .

Отсюда при *x = a :*

*Pn (a) = (a-a)Qn-1 (a) + R =0\*Qn-1(a)+R=*

*=0+R=R .*

Значит , *R = Pn (a)* , т.е. остаток от деления полинома на *(x-a)* равен значению этого

полинома при *x=a* , что и требовалось доказать .

**Следствия из теоремы** .

С*ледствие 1 :*

***Остаток от деления полинома Pn (x)***

***на двучлен ax+b равен значению***

***этого полинома при x = -b/a ,***

***т. е. R=Pn (-b/a) .***

Доказательство :

Согласно правилу деления многочленов :

*Pn (x)= (ax + b)\* Qn-1 (x) + R* .

При x= -b/a :

Pn (-b/a) = (a(-b/a) + b)Qn-1(-b/a) + R = R. Значит , R = Pn (-b/a) , что и требовалось доказать.

*Следствие 2:*

***Если число a* *является корнем***

***многочлена P (x) , то этот***

***многочлен делится на (x-a) без***

***остатка .***

Доказательство :

По теореме Безу остаток от деления многочлена *P (x)* на *x-a* равен *P (a)* , а по условию *a*  является корнем *P (x)* , а это значит , что *P (a) = 0* *, что и требовалось доказать* .

Из данного следствия теоремы Безу видно , что задача решения уравнения *P (x) = 0* равносильна задаче выделения делителей многочлена *P* , имеющих первую степень ( линейных делителей ) .

*Следствие 3 :*

***Если многочлен P (x) имеет***

***попарно различные корни***

***a1 , a2 , … , an , то он делится на***

***произведение (x-a1) … (x-an)***

***без остатка*** *.*

Доказательство :

Проведём доказательство с помощью математической индукции по числу корней . При *n=1*  утверждение доказано в следствии 2 . Пусть оно уже доказано для случая , когда число корней равно *k* , это значит , что *P(x)* делится без остатка на *(x-a1)(x-a2) … (x-ak)* , где

*a1 , a2 , … , ak* - его корни .

Пусть *P(x)* имеет *k+1* попарно различных корней .По предположению индукции *a1 , a2 , ak , … , ak+1* являются корнями многочлена, а , значит, многочлен делится на произедение  *(x-a1) … (x-ak)* , откуда выходит , что

*P(x) = (x-a1) … (x-ak)Q(x).*

При этом *ak+1* – корень многочлена *P(x)* , т. е*. P(ak+1) =* 0 .

Значит , подставляя вместо *x ak+1*  , получаем верное равенство :

*P(ak+1) = (ak+1-a1) … (ak+1-ak)Q(ak+1) =*

*=0 .*

Но *ak+1* отлично от чисел *a1 , … , ak* , и потому ни одно из чисел *ak+1-a1 , … , ak+1-ak*  не равно 0 . Следовательно , нулю равно *Q(ak+1)* , т. е. *ak+1* – корень многочлена *Q(x)* . А из следствия 2 выходит , что *Q(x)* делится на *x-ak+*1 без остатка .

*Q(x) = (x-ak+1)Q1(x)* , и потому

P(x) = (x-a1) … (x-ak)Q(x) =

*=(x-a1) … (x-ak)(x-ak+1)Q1(x)* .

Это и означает , что *P(x)* делится на *(x-a1) … (x-ak+1)* без остатка .

Итак, доказано , что теорема верна при *k =1* , а из её справедливости при *n = k* вытекает , что она верна и при *n = k+1*. Таким образом, теорема верна при любом числе корней , *что и* *требовалось доказать* .

*Следствие 4 :*

***Многочлен степени n имеет не более***

***n различных корней .***

Доказательство :

Воспользуемся методом от противного: если бы многочлен  *Pn(x)* степени *n* имел бы более *n* корней - *n+k* (*a1 , a2 , … , an+k*  - его корни ) , тогда бы по ранее доказанному следствию 3 он

бы делился на произведение *(x-a1) … (x-an+k)* , имеющее степень *n+k* , что невозможно .

Мы пришли к противоречию , значит наше предположение неверно и многочлен степени n не может иметь более , чем *n* корней , *что и требовалось доказать .*

*Следствие 5 :*

***Для любого многочлена P(x)***

***и числа a разность***

***(P(x)-P(a)) делится без***

***остатка на двучлен (x-a) .***

Доказательство :

Пусть *P(x)* – данный многочлен степени *n* , *a* - любое число .

Многочлен *Pn(x)*  можно представить в виде :  *Pn(x)=(x-a)Qn-1(x)+R* ,

где *Qn-1(x)* – многочлен , частное при делении *Pn(x)* на *(x-a)* ,

*R* – остаток от деления *Pn(x)* на *(x-a)* .

Причём по теореме Безу :

*R = Pn(a)* , т.е.

*Pn(x)=(x-a)Qn-1(x)+Pn(a)* .

Отсюда

Pn(x) - Pn(a) = (x-a)Qn-1(x) ,

а это и означает делимость без остатка *( Pn(x) – Pn(a) )*

на *(x-a)* *, что и требовалось доказать* .

*Следствие 6 :*

***Число a является корнем***

***многочлена P(x) степени***

***не ниже первой тогда и***

***только тогда , когда***

***P(x) делится на (x-a)***

***без остатка*** *.*

Доказательство :

Чтобы доказать данную теорему требуется рассмотреть необходимость и достаточность сформулированного условия .

***1.****Необходимость* .

Пусть *a* – корень многочлена *P(x)* , тогда по следствию 2 *P(x)* делится на *(x-a)*  без остатка .

Таким образом делимость *P(x)* на *(x-a)* является необходимым условием для того , чтобы *a* являлось корнем *P(x)* , т.к. является следствием из этого .

***2.****Достаточность* .

Пусть многочлен *P(x)* делится без остатка на *(x-a)*,

тогда *R = 0* , где *R* – остаток от деления *P(x)* на *(x-a)* , но по теореме Безу *R = P(a)* , откуда выходит , что *P(a) = 0* , а это означает , что *a* является корнем *P(x) .*

Таким образом делимость  *P(x)* на *(x-a)* является и достаточным условием для того , чтобы *a* являлось корнем *P(x)* .

Делимость *P(x)* на *(x-a)* является *необходимым и достаточным* условием для того, чтобы *a* являлось корнем *P(x)* , *что и требовалось доказать .*

*Следствие 7(авторское):*

***Многочлен , не имеющийй действи-***

***тельных корней , в разложении***

***на множители линейных множителей***

***не содержит .***

Доказательство :

Воспользуемся методом от противного: предполо-жим , что не имеющий корней многочлен *P(x)* при разложении на множители содержит линейный множитель  *(x – a)*:

*P(x) = (x – a)Q(x)*,

тогда бы он делился на *(x – a)* , но по следствию 6 *a* являлось бы корнем *P(x)* , а по условию он корней не содержит . Мы пришли к противоречию , значит наше предположение неверно и многочлен ,

не имеющий действительных корней , в разложении на множители линейных множителей не содержит , *что и требовалось доказать .*

На основании теоремы Безу и следствия 5 можно доказать следующие утверждения:

1. *Разность одинаковых натуральных степеней на разность их оснований делится без остатка :*

Пусть *P(x) = xn , P(a) = an ,*

тогда *xn – an*  – разность одинаковых натуральных степеней .

По следствию 5

*P(x) - P(a) = xn – an = (x – a)Q(x) ,*

а это значит , что

***(xn–an)/(x–a)=Q(x)****,*  т.е. разность одинаковых натуральных степеней на разность их оснований делится без остатка , что и требовалось доказать .

Итак

*(xn – an)/(x – a) = xn-1 + axn-2 + a2xn-3 + … +an-2x + an-1.*

2. *Разность одинаковых чётных степеней на сумму их оснований делится без остатка .*

Пусть *P(x) = x2k , тогда P(a) = a2k .*

Разность одинаковых чётных степеней *x2k - a2k* равна *P(x) – P(a) .*

*P(a) = a2k = (-a)2k = P(-a) , т.е. x2k - a2k = P(x) – P(-a).*

По следствию 5

*P(x) - P(-a) = (x –(- a))Q(x)=*

*= (x + a)Q(x)*

а это значит , что

*x2k – a2k = (x + a)Q(x)* или

***(x2k – a2k)/(x + a) = Q(x)*** *,*

т.е. разность одинаковых чётных степеней на сумму их оснований делится без остатка , что и требовалось доказать .

Итак ,

*(x2k – a2k)/(x + a) = x2k-1 – ax2k-2 + … +a2k-2x + a2k-1.*

3. *Разность одинаковых нечётных натуральных степеней на сумму их оснований не делится .*

Пусть *P(x) = x2k+1 - a2k+1* – разность одинаковых нечётных степеней .

По теореме Безу при делении x2k+1 - a2k+1 на *x + a = x – (-a)* остаток равен

*R = P(-a) = (-a)2k+1 – a2k+1 = -2a2k+1*

Т. к. остаток при делении не равен *0* , то разность одинаковыхнечётных натуральных степеней на сумму их оснований не делится , что и требовалось доказать .

4. *Сумма одинаковых нечётных натуральных степеней на сумму их оснований делится без остатка .*

Пусть *P(x) = x2л+1 , P(-a) = (-a)2л+1 = -а2л+1 ,*

тогда *P(x) – P(-a)* = *x2k+1 + a2k+1*  – сумма одинаковых нечётных натуральных степеней .

По следствию 5

*P(x) - P(-a) = x2k+1 + a2k+1= (x –(- a))Q(x)=*

*= (x + a)Q(x),*

а это значит , что

*(x2k+1 + a2k+1)/(x + a) = Q(x) ,*

т.е. сумма одинаковых нечётных натуральных степеней на сумму их оснований делится без остатка , что и требовалось доказать .

Итак ,

*(x2k+1 + a2k+1)/(x + a) = x2k - ax2k-1 + … - a2k-1x + a2k.*

5. *Сумма одинаковых чётных натуральных степеней на сумму их оснований не делится .*

Пусть *P(x) = x2k + a2k* – сумма одинаковых чётных степеней .

По теореме Безу при делении *x2k + a2k*  на *x + a = x – (-a)* остаток равен

*R = P(-a) = (-a)2k + a2k = 2a2k.*

Т. к. остаток при делении не равен *0* , тосумма одинаковых чётных натуральных степеней на сумму

их оснований не делится, что и требовалось доказать.

Остановимся на рассмотрении некоторых случаев применения теоремы Безу к решению практических задач .

**Пример 1.**

# Найти остаток от деления многочлена

*x3 – 3x2 + 6x – 5*

на двучлен *x – 2 .*

По теореме Безу

*R = P3 (2) = 23 – 3\*22 + 6\*2 – 5 = 3 .*

Ответ: *R = 3 .*

**Пример 2.**

Найти остаток от деления многочлена

*32x4 – 64x3 + 8x2 + 36x + 4*

на двучлен *2x – 1 .*

Согласно следствию 1 из теоремы Безу

*R=P4(1/2)=32\*1/24–64\*1/23 + 8\*1/22+36\*1/2+4=*

*= 2 – 8 + 2 + 18 + 4 =18 .*

Ответ*: R = 18 .*

**Пример 3.**

При каком значении *a* многочлен

*x4 + ax3 + 3x2 – 4x – 4*

делится без остатка на двучлен *x – 2 ?*

По теореме Безу

*R = P4 (2) = 16 + 8a + 12 – 8 – 4 = 8a +16.*

Но по условию *R = 0* , значит

*8a + 16 = 0 ,*

отсюда

*a = -2 .*

Ответ: *a = -2* .

**Пример 4.**

При каких значениях *a* и *b* многочлен

*ax3 + bx2 – 73x + 102*

делится на трёхчлен

*x2 – 5x + 6* без остатка ?

Разложим делитель на множители :

*x2 – 5x + 6 = (x – 2)(x – 3) .*

Поскольку двучлены *x – 2* и  *x – 3* взаимно просты , то данный многочлен делится на *x – 2* и на *x – 3* , а это значит , что

по теореме Безу

*R1 = P3 (2) = 8a + 4b – 146 + 102 =*

*= 8a + 4b – 44 = 0*

*R2 = P3 (3) = 27a+9b – 219 + 102 =*

*= 27a +9b -117 =0*

Решим систему уравнений :

*8a + 4b – 44 = 0*

*27a + 9b – 117 = 0*

*2a + b = 11*

*3a + b = 13*

Отсюда получаем :

*a = 2 , b = 7 .*

Ответ: *a = 2 , b = 7* .

**Пример 5.**

При каких значениях *a*  и *b* многочлен

*x4 + ax3 – 9x2 + 11x + b*

делится без остатка на трёхчлен

*x2 – 2x + 1 ?*

Представим делитель так :

*x2 – 2x + 1 = (x – 1)2*

Данный многочлен делится на *x – 1* без остатка ,

если по теореме Безу

*R1 = P4 (1) = 1 + a – 9 + 11 + b = a + b + 3 = 0.*

Найдём частное от деления этого многочлена на *x – 1* :

*\_ x4 + ax3–9x2 + 11x–a –3 x – 1*

*x4 – x3  x3+(a+1)x2+(a–8)x+(a+3)*

*\_(a + 1)x3 – 9x2*

*(a + 1)x3 – (a + 1)x2*

*\_(a – 8)x2 + 11x*

*(a – 8)x2 – (a –8)x*

*\_(a + 3)x – a – 3*

*(a + 3)x – a – 3*

*0*

Частное

*x3+(a+1)x2+(a–8)x+(a+3)*

делится на *(x – 1)* без остатка , откуда

*R2 = P3 (1) = 1 + (a + 1)\*1 +(a – 8)\*1 + a+3 =*

*=3a – 3 = 0 .*

*a + b + 3 = 0*

*3a – 3 = 0*

*a + b =-3*

*a = 1*

Из системы : *a = 1 , b = -4*

Ответ*: a = 1 , b = -4* .

**Пример 6.**

Разложить на множители многочлен *P(x) = x4 + 4x2 – 5* .

Среди делителей свободного члена число *1* является корнем данного многочлена *P(x)* , а это значит , что по следствию 2 из теоремы Безу *P(x)* делится на *(x – 1)*  без остатка :

*\_x4 + 4x2 – 5 x – 1*

*x4 – x3 x3 + x2 + 5x + 5*

*\_x3 + 4x2 – 5*

*x3 – x2*

*\_5x2 – 5*

*5x2 – 5x*

*\_5x – 5*

*5x – 5*

*0*

*P(x)/(x – 1) = x3 + x2 + 5x + 5* , значит

*P(x) = (x – 1)(x3 + x2 + 5x + 5).*

Среди делителей свободного члена многочлена *x3 + x2 + 5x + 5 x = -1* является его корнем , а это значит , что по следствию 2 из теоремы Безу *x3 + x2 + 5x + 5*  делится на *(x + 1)*  без остатка :

*\_x3 + x2 +5x + 5 x + 1*

*x3 + x2 x2 +5*

*\_5x + 5*

*5x + 5*

*0*

*(x3 + x2 +5x + 5)/(x + 1) = x2 +5* ,

значит

*x3 + x2 +5x + 5 = (x +1)(x2 +5)*.

Отсюда

*P(x) = (x – 1)(x +1)(x2 +5)* .

По следствию 7 *(x2 + 5)* на множители не раскладывается , т.к. действительных корней не имеет , поэтому *P(x)* далее на множители не раскладывается .

Ответ :  *x4 + 4x2 – 5 = (x – 1)(x +1)(x2 +5)* .

**Пример 7.**

Разложить на множители многочлен *P(x) = x4 + 324* .

*P(x)* корней не имеет , т.к. *x4* не может быть равен *-324* , значит , по следствию 7 *P(x)* на множители не раскладывается .

Ответ : многочлен на множители не раскладывается .

**Пример 8.**

Какую кратность имеет корень *2* для многочлена

*P(x) = x5  - 5x4 + 7x3 – 2x2 + 4x – 8* .

***Определение:*** *Если многочлен P(x) делится без остатка на (x – a)k , но не делится на (x – a)k+1 , то говорят , что число*  ***a***  *является корнем кратности k для P(x).*

*\_x5  - 5x4 + 7x3 – 2x2 + 4x – 8 x – 2*

*x5  - 2x4 x4 – 3x3 + x2 + 4*

*\_-3x4 + 7x3 – 2x2 + 4x – 8*

*-3x4 + 6x3*

*\_x3 – 2x2 + 4x – 8*

*x3 – 2x2*

*\_4x – 8*

*4x – 8*

*0*

*\_x4 – 3x3 + x2 + 4 x – 2*

*x4 – 2x3 x3 – x2 – x – 2*

*\_-x3 + x2 + 4*

*-x3 +2x2*

*\_-x2 + 4*

*-x2 + 2x*

*\_-2x + 4*

*-2x + 4*

*0*

*\_ x3 – x2 – x – 2 x – 2*

*x3 – 2x2 x2 + x + 1*

*\_x2 – x – 2*

*x2 – 2x*

*\_x – 2*

*x – 2*

*0*

*x2 + x + 1* на *x – 2* не делится , т.к. *R=22 + 2 + 1=*

*=7*.

Значит , *P(x)/(x – 2)3 = x2 + x + 1* , т.е. корень *2* имеет кратность *3* для многочлена *P(x)* .

Ответ: корень *2* имеет кратность *3* для многочлена *P(x)* .

**Пример 9.**

Составить кубический многочлен , имеющий корень *4* кратности *2* и корень *-2* .

По следствию 3 , если многочлен *P(x)* имеет корень *4* кратности *2* и корень *–2* , то он делится без остатка на *(x – 4)2(x + 2)* , значит

*P(x)/(x – 4)2(x + 2) = Q(x)* ,

т.е. *P(x) = (x – 4)2(x + 2)Q(x) =*

*= (x2 – 8x +16)(x + 2)Q(x) =*

*= (x3 – 8x2 + 16x +2x2 – 16x + 32)Q(x) =*

*= (x3 – 6x2 + 32)Q(x).*

*(x3 – 6x2 + 32)* - кубический многочлен , но по условию *P(x)* – также кубический многочлен, следовательно , *Q(x)* – некоторое действительное число .

Пусть  *Q(x) = 1* , тогда *P(x) = x3 – 6x2 + 32* .

Ответ: *x3 – 6x2 + 32* .

**Пример 10.**

Определите *a* и *b* так , чтобы *-2* было корнем многочлена *P(x) = x5  + ax2 + bx + 1*, имеющим по крайней мере кратность два .

Если *-2* – корень многочлена *P(x)* кратности два , то по следствию 3 *P(x)*  делится на *(x + 2)2* без остатка *(R = 0)*

*(x + 2)2 = x2 + 4x + 4*

*\_x5  + ax2 + bx + 1 x2 + 4x + 4*

*x5  + 4x4 + 4x3 x3 – 4x2 + 12x – (a + 32)*

*\_-4x4–4x3–ax2+bx+1*

*-4x4 – 16x3 – 16x2*

*\_12x3 + (16 – a)x2 + bx + 1*

*12x3 +48x2 + 48x*

*\_-(a + 32)x2 + (b – 48)x + 1*

*-(a + 32)x2 – 4(a + 32)x – 4(a + 32)*

*(4a +b – 48 + 128)x + 4a + 129*

*R = (4a +b – 48 + 128)x + 4a + 129 =*

*= (4a +b + 80)x + 4a + 129*

Но *R = 0* , значит

*(4a +b + 80)x + 4a + 129 = 0*  при любых *x* .

Это возможно при условии , что

*4a +b + 80 = 0* ,

*4a + 129 = 0*

Решим систему двух уравнений :

*4a +b + 80 = 0 a = -32,25*

*4a + 129 = 0 b = 49*

Ответ:  *a = -32,25 , b = 49* .

Из рассмотренных примеров видно , что теорема Безу находит применение при решении задач , связанных с делимостью многочленов (нахождение остатка при делении многочленов , определение кратности многочленов и т.д. ) , с разложением многочленов на множители , с определением кратности корней и многих других .

Теорема Безу находит применение при рассмотрении одной из важнейших задач математики – решении уравнений .

### Литература.

### Бородин А.И., Бугай А.С.

Биографический словарь деятелей в области математики.

1. Математическая энциклопедия.
2. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А.

Алгебра и элементарные функции.

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварц- бурд С.И.

Алгебра и математический анализ.

1. Курош А.Г.

Курс высшей алгебры.