### МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## ИМ. А. А. КУЛЕШОВА

#### Реферат

*Развитие аналитической геометрии*

##### Выполнила

*студентка*

*физико-математического*

*факультета*

*V курса, группы “Г”*

*Гуленкова Оксана*

###### Могилев 2002.**Алгебраические методы в геометрии**

Применение алгебры в геометрии имело к началу XVII в. долгую исто­рию. Еще древние вавилоняне решали многие задачи на прямоугольные треугольники, выражая искомые отрезки, как корни численных квадрат­ных уравнений; аналогичные приемы употреблялись впоследствии неодно­кратно. В классической! Греции важным средством геометрического исследования, в частности конических сечений, служила геометриче­ская алгебра, в которой место вычислений занимали построения от­резков.

Бурные успехи символической и числовой алгебры в XVI в. явились основой гораздо более обширных приложений алгебраического метода в геометрии, приведших к созданию новой аналитической геометрии. Пер­воначально работы в этом направлении не выходили за пределы тради­ционных постановок и решений вопросов, иногда довольно сложных. Большое число таких задач было рассмотрено Виетом, за которым по­следовали и другие, например Марин Геталдич (Гетальди, 1566—1627), уроженец югославского города Дубровник (Рагуза), в то время бывшего самостоятельной республикой. Ученик Хр. Клавия и хороший знаток греческих авторов, Гетальди испытал особенно сильное влияние Виета, с которым познакомился в бытность в Париже. В «Собрании различных задач» (Variorum problematum collectio, Veneliae, 1607) и посмертно из­данном труде «О математическом анализе и синтезе» (De resolutione et compositione mathematica, Romae, 1630) Гетальди средствами алгебры Ви­ета решает разнообразные задачи на деление отрезков, построение тре­угольников и так называемые вставки (ср. т. I, стр. 84); по большей части его задачи выражаются уравнениями первой или второй степени относи­тельно искомого неизвестного отрезка. В некоторых случаях применяется чисто геометрическое решение. Упомянем античную задачу о вставке между продолжением стороны квадрата и ближайшей перпендикулярной стороной отрезка данной длины, продолжение которого проходит через вершину квадрата, не лежащую на названных сторонах. Гетальди отнес задачу к тем, которые не относятся к алгебре (sub algebram non cadunt), и решил ее геометрически. Данная задача привлекла внимание и других ученых. Жирар (1629) выразил ее уравнением четвертой степени и по­казал, как связан выбор знаков перед радикалами, входящими в его кор­ни, с положением частей искомого отрезка. Декарт (1637) рассмотрел ее с целью привести пример уравнения четвертой степени, распадающегося на два квадратных (коэффициенты которых, между прочим, квадратично ир­рациональны относительно исходных коэффициентов). Попутно Декарт указал, как от более или менее удачного выбора неизвестной зависит срав­нительная простота уравнения. Эти соображения Декарта подробнее раз­виты во «Всеобщей арифметике» Ньютона. Оригинальное решение при­надлежит еще Гюйгенсу.

Алгебраическим решением геометрических задач занимались, как видно, очень многие. К уже названным можно добавить, например, имя английского алгебраиста Вильяма Отреда (1574—1660), на книге кото­рого, озаглавленной, подобно одному из сочинений ал-Каши, «Ключ ма­тематики» (Clavis mathematicae, Londini, 1631)[[1]](#footnote-1), отразилось несомненное влияние «Собрания различных задач» Гетальди.

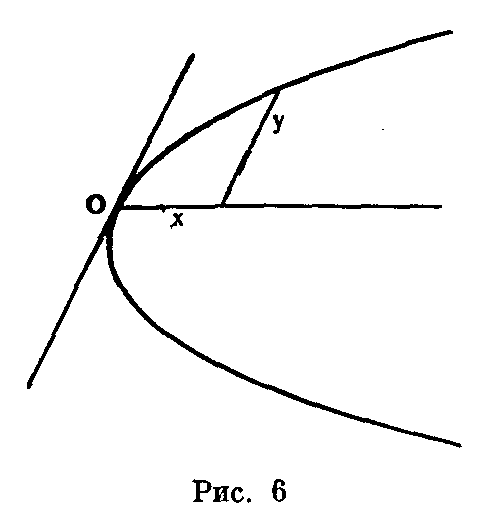
# Аналитическая геометрия

Описанная алгебраическая трактовка вопросов геометрии подготовля­ла почву для создания аналитической геометрии, предметом которой яв­ляется уже нс только нахождение отдельных отрезков, выражаемых кор­нями уравнений с одним неизвестным, но изучение свойств различных геометрических образов, прежде всего алгебраических линий и поверхно­стей, выражаемых уравнениями с двумя или более неизвестными или ко­ординатами.

Координаты появились еще в древности, притом в различных формах, между собой непосредственно не связанных. С одной стороны, это были географические координаты, именовавшиеся долготой и широтой, причем положение пунктов земной по­верхности, изображенной в виде прямоугольника, характеризовалось парой чисел. Сходными были астрономические координаты, служившие для определения положения светил на небесной сфере. Другой вид коор­динат представляли собой отрезки, зависимости между которыми, так называемые симптомы (см. т. I, 130), выражали определяющие свой­ства этих кривых. В этом случае речь шла не о числовых координатах любых точек с отсчетом от фиксированного меридиана и параллели, а об отрезках диаметров и хорд, связанных с точками рассматриваемой фи­гуры.

Своеобразной разновидностью координат были отрезки широт и долгот в теории изменения форм Орема. Здесь не было ни числовых коор­динат любых точек, ни «симптомов», выраженных средствами геометри­ческой алгебры; словесно сформулированная зависимость между широтой и долготой формы изображалась плоской линией.

Координатные отрезки древнегреческой геометрии стали известны в Европе частью по арабским сочинениям, но главным образом по трудам Архимеда и особенно Аполлония. Параллельные хорды или полухорды, сопряженные некоторому диаметру, Аполлоний называл, если перевести с греческого, «по порядку проведенными линиями», а отрезки этого диа­метра от его конца до хорды — «отсеченными на диаметре по порядку про­веденными (линиями)» (на рис. 6 соответственно *у* и *x*). В своем упоминав­шемся ранее латинском издании «Конических сечений» (Венеция, 1566) Федориго Коммандино первые



выражения передал оборотом ordinatim applicatae, т. е. «по порядку приложенные» (т. е. направленные)[[2]](#footnote-2), а вто­рое — quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur, т. е. «которые отсекаются ими па диаметре от вершины». Отсюда берут начало термины abscissa, т. е. «отсеченная», ordinata и applicata, которые, впрочем, уко­ренились не сразу. Слово «абсцисса», встречавшееся в смысле отрезка у различных авторов, например Кавальерп (1635), становится техниче­ским термином координатной геометрии в 1668 г. у Микеланджело Риччи (1619—1692) ii особенно у Лейбница, начиная с рукописей 1673 г. Ферма и Декарт в своих основоположных сочинениях по аналитической геомет­рии (1636—1637; писали еще об «отрезках диаметра». Слово «ордината» в нашем смысле применял другой переводчик па латынь «Конических се­чений» — Франчсско Мавролико. Ферма пользовался термином applica­ta, Декарт — appliquee par ordre, т. е. французским переводом ordinatim applicata, но также (в письме 1638 г.) словом ordonnee, которое неза­долго перед тем в 1637 г. употребил в своем курсе П. Эригон (в латин­ском тексте 1644г.—ordinata); затем им стал регулярно пользоваться Лейбниц.

В середине XVIII в. слово «ордината» начинает вытеснять в геомет­рии на плоскости слово «аппликата». Обе координаты первоначально назывались неизвестными величинами, как у Ферма, или неопределенны­ми, как у Декарта; слово «координаты» ввел в 1692 г. Лейбниц, имея в виду уже любые криволинейные координаты. Но еще и позднее понятие о координатах связывалось с отрезками диаметров и хордами плоских кривых. Так обстоит, например, дело в статьях «Abscissa, die Abscisse» и «Ordinatae, ordinatim applicatae, die Ordinaten» «Математического словаря» (Mathematisches Lexicon, Leipzig, 1716) Xp. Вольфа (ср. стр. 35).

Термин «ось», который у Аполлония относился к **взаимно** перпендику­лярным сопряженным диаметрам, употребил в более широком смысле И. Барроу (1670). Обозначение начальной точки буквой *О* восходит к ее наименованию origine — «начало», данному Ф. Лагиром в 1679 г.; два­дцатью годами ранее Я. де Витт писал об initium immutabile, неподвижном начале. Декарт еще говорил о точке, с которой начинаются вычисления. Вернемся от истории терминологии к истории геометрических методов и идей.

# Аналитическая геометрия Ферма

К разработке начал новой аналитической геометрии независимо друг от друга и одновременно приступили оба крупнейших французских ма­тематика XVII в.— Ферма и Декарт. Небольшое «Введение в изучение плоских и телесных мест» (Ad locos pianos et solidos isagoge) Ферма было написано несколько ранее 1637 г., но при жизни Ферма распространялось через Мерсепна и других только в рукописном виде. Напомним, что «плоские и телесные места» — термины греческой геометрии — означали прямые и окружности и соответственно эллипсы, параболы и гиперболы. Работа написана в обозначениях Виета с соблюдением однородности урав­нений.

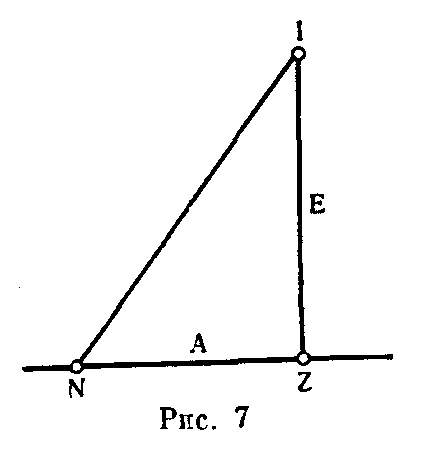
Ферма формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины (quantitates ignotae), налицо имеется место, и ко­нец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для уста­новления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин»[[3]](#footnote-3). Как мы видим, под неизвестными величинами (координатами) Ферма понимает прямоли­нейные отрезки: первую из них он всякий раз обозначает *NZ* и алгебра­ически буквой *А*, а вторую соответственно *ZI* и *Е.* Затем по порядку рас­сматриваются различные плоские и телесные места.

Уравнение прямой, проходящей через начальную точку, Ферма вы­водит в форме

*D* на *А* равно *В* на *Е*,

т. е*. dx = by* (на рис. 7 нанесена лишь часть прямой *NI*, так как Ферма пользуется положительными координатами). К этому случаю приводится общее уравнение первой степени (с указанным ограничением) и несколько далее однородное уравнение второй степени, причем здесь говорится лишь об одной из двух возможных прямых. Первое приведение по существу со­стоит в преобразовании координат, именно в параллельном сдвиге вдоль горизонтальной оси: от уравнения вида *с −* *dx = by* Ферма переходит к *d* (*r − х*) *= by*, где *dr = с.* Идею преобразования координат путем па­раллельного переноса системы Ферма более отчетливо выражает в сле­дующих примерах: установив сначала, что в прямоугольной системе уравнение окружности с центром в начальной точке есть *b*2 − *x*2 = *у*2, он правильно характеризует общее уравнение окружности и для образца преобразует к основной форме уравнение

*b*2 − 2*dx* = *у*2 + 2*rу*.



Для этого он производит дополнение до квадрата

*p*1 *−* (*х +* *d*)*2* = (*у + r*)2, где *р*2 *=* *r*2 + *b*2 + *d*2,

затем пишет снова *x* вместо *x* + *d* и *y* вместо *у* + *r* и получает

*p*2 − *x*2 = *у*2.

Следует заметить все же, что Ферма обходит молчанием вопрос об отрица­тельных координатах, какими оказываются координаты центра (−*d*, −*r*) в данной задаче (ибо *d* и *r* у него положительные). Разумеется, построить центр для него не представляло труда и в этом случае.

Основные уравнения конических сечений представляют собой у Ферма непосредственное выражение в терминах алгебры их свойств, известных по труду Аполлоиня. Для параболы это уравнения *x*2 = *dy* и симметричное *у*2 = *dx*, для эллипса (*b*2 − *x*2)/*y*2 = const (указывается, что в случае непрямого координатного угла кривая будет эллипсом и при const = 1), для гиперболы (*b*2 + *x*2)/*y*2 = const. Любопытно, что на рисунке в по­следнем случае изображены обе ветви гиперболы, хотя опять-таки об отрицательных координатах ничего не сказано. Кроме того, приводится уравнение равносторонней гиперболы *ху=с.* Все это распространяется на соответствующие уравнения, дополненные линейными членами.

На частном примере уравнения *b*2 − 2*x*2 = 2*xy +* *у*2 Ферма разбирает и наиболее трудный случай, когда группа старших членов содержит и член с произведением координат. Его выкладки и построения соответствуют пе­реходу к новой системе координат *X*, *Y* с прежним началом и осью орди­нат и с осью абсцисс, образующей угол 45° со старой. В этой системе *Х = х*, *Y =* *x* + *у*, так что (2*b*2 *— X*2)/*Y*2= 2 и фигура есть эллипс.



Изложив все это, Ферма писал: «Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест»[[4]](#footnote-4). На самом деле был сделан лишь первый шаг к созда­нию нового типа геометрии, которая, между прочим, получила свое ны­нешнее наименование лишь в самом конце XVIII в.[[5]](#footnote-5)

# Аналитическая геометрия Декарта

«Введение» Ферма, долгое время остававшееся в рукописи, не нашло того широкого распространения, какое получила «Геометрия» Декарта, изданная в 1637 г. О влиянии «Введения» на Декарта не может быть речи. Мы говорили уже, что все основные идеи «всеобщей математики», как в ал­гебраической, так и в геометрической части, имелись у ее творца не позд­нее 1632 г.

Изложение аналитической геометрии у Декарта во многом отличается от данного Ферма. В одном оно уступает, ибо разбросано по всем трем книгам «Геометрии» и даже во второй из них, содержащей наиболее важные элементы новой дисциплины, не имеет систематического характера, как во «Введении». Но в других отношениях геометрия Декарта имела реши­тельные преимущества. Не говоря уже о том, что Декарт применял бо­лее развитую символику, что его изложение было доступнее и богаче примерами, он выдвинул несколько общих идей и предложений, весьма существенных для последующего.

Один из основных вопросов для Декарта заключался в следующем: какие линии служат предметом геометрии? Ответ определялся верой Де­карта в то, что единственным общим методом математики является алге­браический. Сначала этот ответ формулируется в кинематических выра­жениях: геометрические линии — это те, которые «описаны непрерыв­ным движением или же несколькими такими последовательными движе­ниями. пз которых последующие вполне определяются им предшествую­щими.— ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру»[[6]](#footnote-6). Напротив, из геометрии, т. е. собственно всеобщей математики, исключаются меха­нические линии, описываемые «двумя отдельными движениями, между которыми и существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить»[[7]](#footnote-7). Примеры механических линий—спираль и квадратриса: в качестве примера геометрических приводятся кривые, описывае­мые некоторым шарнирным механизмом, число звеньев которого можно неопределенно увеличивать. Этот механизм, по идее сходный смезолабием предложенным Эратосфеном в III в. до н. э. для построения двух средних пропорциональных, Декарт изобрел между 1619 и 1621 гг.: в третьей части «Геометрии» показано, как можно с его помощью строить любое число средних пропорциональных между двумя данными отрезками

*а* : *x*1 = *x*1 : *x*2 = *x*2 : *х*3 = ... = *x*n : *b.*

Уравнения описываемых этим прибором линий

*r*2 (*x*2 + *у*2)2n-1 = *x*4n (*n* = 0,1, 2,...)

Декарт не привел ни в общем виде, ни для частных значений *п.*

Кинематическое образование линий являлось отправным пунктом геометрии Декарта и применяется в ней неоднократно. Конечно, данная им при этом кинематическая характеристика геометрических линий как кривых, описываемых одним или несколькими непрерывными движения­ми, последовательно определяющими друг друга, не вполне отчетлива, так же как и заявление, что для проведения всех таких линий «нужно только то предположение, что две или несколько линий можно переме­щать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другие линии»[[8]](#footnote-8)*.* Но в этих утверждениях, по сути дела, Декарт предвосхитил уже упоми­навшуюся важную теорему английского ученого А. Кемпе (1876), со­гласно которой посредством плоских шарнирных механизмов можно опи­сать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной транс­цендентной. Свой кинематический способ деления линий на геометриче­ские и механические Декарт тотчас облекает в более ясную аналитиче­скую форму и здесь же предлагает классификацию первых. «Все точки линий,— пишет он,— которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обяза­тельно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии»[[9]](#footnote-9). В этом поистине замечательном по глубине месте своего сочинения Декарт вводит и метод прямолинейных координат и понятие об уравнении кривой, а вместе с тем понятие о функции как аналитическом выражении, составленном из «неопределенных» отрезков *x* и *у.* Несколько перед тем Декарт объяснил, как описывать кривую или, вернее, строить любое число ее точек, вычисляя значения *х* по данным значениям *у*,*—* первой координатой *у* него служила *у*.

В 1684 г. Лейбниц назвал геометрические кривые Декарта алгебраи­ческими, а механические — трансцендентными, мотивируя отказ от тер­минологии Декарта тем, что и механические линии не подлежат исклю­чению из геометрии.

Непосредственно за изложенными общими соображениями Декарт приводит первую общую классификацию алгебраических кривых в зави­симости от степени их уравнений, отнеся к роду *п* кривые с уравнениями степени 2*п —* 1 и 2*п.* Классификация требовалась прежде всего для все­общей математики Декарта (стр. 30), а также была нужна в аналитиче­ской геометрии. Предложенное Декартом разделение кривых по родам, себя не оправдавшее, мотивировалось тем, что, по его мнению, кривые с уравнением степени 2*п* вообще не сложнее, чем с уравнением степени 2*п —* 1. Все трудности, связанные с четвертой степенью, писал он, при­водятся к третьей, а трудности, связанные с шестой степенью,— к пятой и т. д. Общепринятой классификацией плоских кривых по порядкам мы обязаны Ньютону.

Но классификация кривых в прямолинейных координатах по родам или порядкам имеет смысл, если род или порядок кривой не зависит от выбора координатной системы. Это было Декарту ясно, и он, правда ми­моходом, но вполне отчетливо, сформулировал фундаментальное предло­жение об инвариантности рода кривой при замене одной системы прямо­линейных координат другой: «Действительно, хотя для получения более короткого и удобного уравнения и нужен весьма тщательный выбор, но все же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, что­бы линия оказалась того же самого рода: это легко доказать»[[10]](#footnote-10). Впрочем, доказательство не приводится, да и формулы линейного преобразования координат у Декарта еще отсутствовали.

В качестве первого примера Декарт выводит уравнение линии *ЕС*, описанной точкой пересечения линейки *GL* и неопределенно продолжен­ной стороны *CNK* плоской прямолинейной фигуры *NKL*, сторона кото­рой *KL* движется вдоль данной прямой *ВА*, заставляя вращаться вокруг точки *G* линейку, неизменно проходящую при этом через точку *L.* При­няв *GA*, перпендикуляр к *ВА*, равным *а*, *KL* = *b*, *NL = с*, выбрав *АВ* за ось *х* и точку *А* за начало, Декарт обозначает «неопределенные и неизве­стные величины» *СВ* = *у*, *ВА = х.* Тогда на основании подобия тре­угольников *СВК* и *NLK*, с одной стороны, и *CBL* и *GAL —* с другой, быстро выводится уравнение линии *ECG*

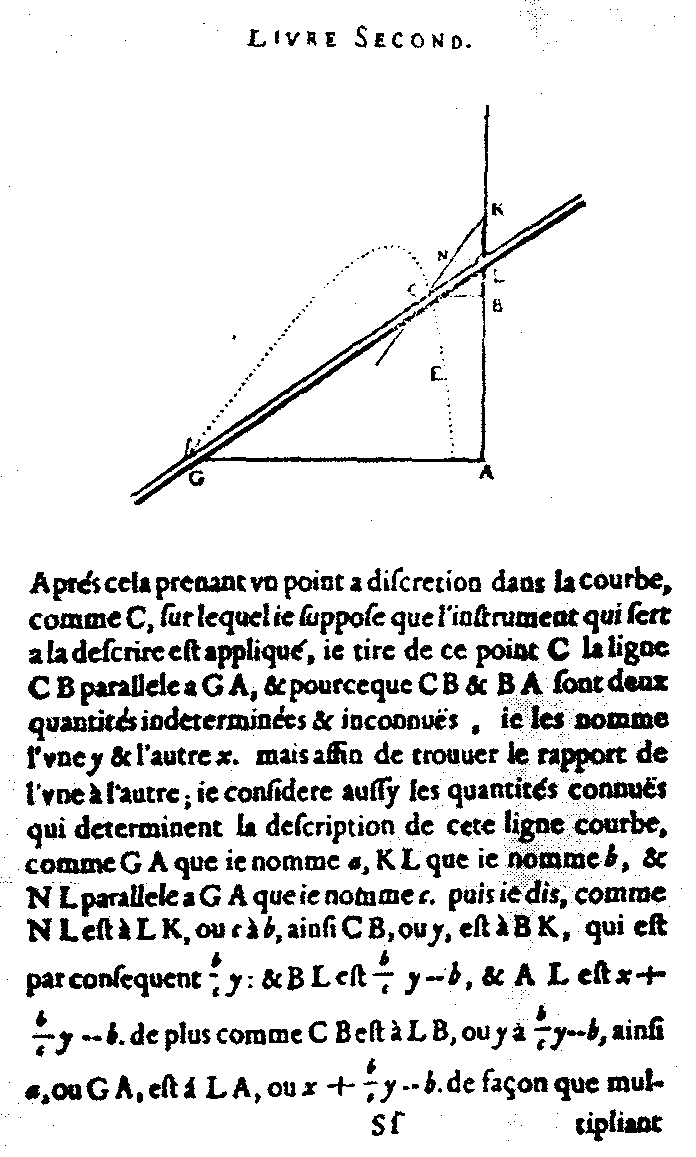
*уу* = *су* − *ху + ау − ас*,



так что эта линия первого рода и, как указывает без доказательства Де­карт, гипербола (пример этот подробно разобрали комментаторы латинского издания «Геометрии»).

Страница первого издания «Геометрии» Р. Декарта (1637):

начало вывода уравнения линии *ЕС*



Заменяя прямую *CNK* другими линиями, можно получать таким образом бесконечное множество кривых. Так, если *CNK* есть окружность с центром *L*, то будет описана конхоида (не­сомненно, что прием Декарта является как раз обобщением античного определения конхоиды), а если *CNK* есть парабола с диаметром *KB*, то возникает кривая второго рода, именно та, которую Ньютон впослед­ствии назвал трезубцем (ср. далее стр. 108). Вообще, заявляет Декарт, если образующая кривая имеет род п, то описанная линия будет рода *п* -)- 1. Это одна из немногих ошибок Декарта, который не довел, видимо, до конца легкие, по его собственным словам, вычисления. На самом деле, если в подвижной системе координат *СВ = у*, *BL = х'*, уравнение линии *CNK* есть

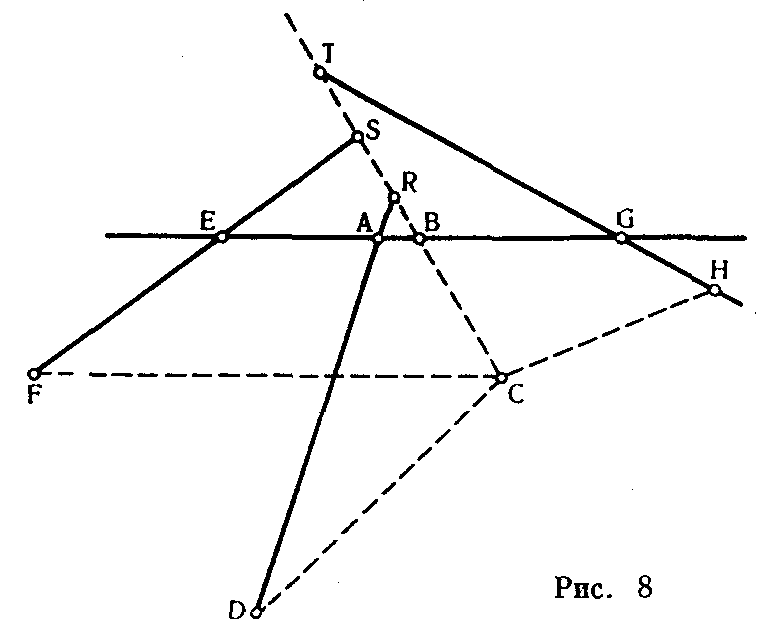
*f*(*x'*,*y*) *=* 0,

то кривая *ECG* имеет в прежних координатах уравнение



Неточность Декарта показал на частном примере еще Ферма. В рассмотренном только что примере нарисованы две взаимно перпен­дикулярные координатные оси, хотя и не в обычном для нас положении. Однако чаще всего Декарт, так же как Ферма и ближайшие поколения их последователей, чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат, вообще говоря наклонных. Отрицатель­ные абсциссы lie рассматривались, что иногда приводило к неточным или неполным чертежам. Эти замечания не относятся к Ньютону или Лейбницу. но правильное различение знаков координат и применение обеих осей стало обычным делом уже в XVIII в.

Силу своего метода Декарт затем демонстрирует на предложенной ему Я. Гоолем задаче Паппа о геометрическом месте к 2*п* или 2*n* − 1 прямым, которое определяется следующим образом: даны 2*п* (или 2*n* − 1) прямых, требуется найти геометрическое место таких точек, чтобы произведение отрезков, приведенных от них под данными углами к *п* из этих прямых, находилось в данном отношении к произведению аналогичных отрезков. проведенных к остальным *п* (или *n* − 1) прямым. Древние знали, что при *п* = 2 геометрическое место есть коническое сечение, но не оставили ана­лиза и этого случая: случай же *n* > 2 остался нерассмотренным. Если мы запишем уравнение прямых в виде *аkх* + *bkу* + *ck =* 0, то длины прове­денных к ним отрезков *dk* пропорциональны левым частям этих уравне­ний, и для нас отсюда ясно, что уравнение места будет, вообще говоря, кривой порядка *п.* Декарт, получив выражения для *dk* в выбранной им косоугольной координатной системе из геометрических соображений, при­ходит к тому же общему результату. Более подробно он рассмотрел слу­чаи *n* = 2 и *п* = 3. Это прежде всего место к трем или четырем прямым, исследование которого дает ему повод исследовать уравнение второго порядка, весьма общего, хотя и не самого общего вида. Пусть данные пря­мые суть *АВ*, *AD*, *EF* и *GH*, причем углы, образуемые с ними отрезками *СВ*, *CD*, *CF* и *СH*, проведенными из точек *С* искомого геометрического ме­ста, определяемого условием *CB − -CF = CD − CH*, известны (рис. 8). Де­карт принимает одну из данных и одну из проведенных линий, именно *АВ* и *ВС*, за оси *А В* = *х*, *ВС = у* и обозначает данные длины отрезков *ЕА* = *k*, *AG* = *l*. Данными являются также углы треугольников на рис. 8, а значит, отношения их сторон



*АВ : BR* = *z* : *b*, *CR : CD* = *z* : *с* и т. д., где *z*, *b*, *с*, ... суть данные отрезки (Декарт не вводит синусы углов). После этого нее нужные отрезки выражаются через *x*, *у*, *z*, *b*, *с*, ..., *k*,*l*, линейно относительно *х* и *у*:

*CB* = *y*, ,

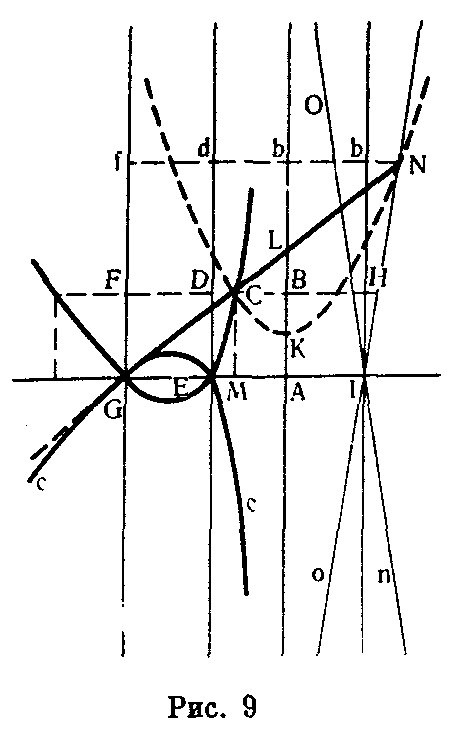


а условие *CB·CF* = *CD·CH* выражается уравнением второй степени без свободного члена, решение которого относительно *у*, после введения не­которых сокращенных обозначений, дает



Однородность полученного уравнения объясняется принятыми для отно­шений сторон выражениями и, в сущности, не была в глазах Декарта обя­зательной (ср. стр. 42), но представляла в данном случае то удобство, что в принципе позволяла сразу строить одни отрезки по другим. В приводи­мом несколько далее числовом примере однородность относительно бук­венных величин не соблюдается в отличие от примера Ферма, в алгебре примыкавшего к Виету (ср. стр. 102).

Опираясь на теоремы I книги «Конических сечений» Аполлония, Де­карт показывает, что полученное уравнение принадлежит коническому сечению, а в особых случаях, когда радикал обращается в нуль или ко­рень извлекается нацело, оказывается прямой линией: в самостоятельном виде уравнение прямой отсутствует и о «вырождении» кривой второго порядка в пару прямых ничего не говорится. В ходе анализа выясняется, при каких знаках коэффициентов получаются парабола, гипербола и эл­липс, в частности окружность, и определяются положение и форма кони­ческого сечения — в случае параболы



вершина, диаметр и «прямая сторона»[[11]](#footnote-11), а в случае центральных кривых—центр вершины, «прямая сто­рона» и диаметры. Здесь же Декарт разбирает числовой пример, беря *ЕА* = 3, *AG* = 5, *АВ = BR* и т. д., а угол *ABR* равным 60°, так что урав­нение есть *уу =* 2*у — ху* + 5*x* — *хх*: кривая при этом оказывается окруж­ностью. Общее заключение гласит, что к первому роду принадлежат круг, парабола, гипербола и эллипс. Прямая не упоминается, — ее при­надлежность к первому роду подчеркнул Дебон, который рассмотрел так­же случай, когда в уравнении нет членов с *х*2и *у*2, но есть *ху*, оставленный Декартом в стороне.

Вслед за тем Декарт изучает еще место к пяти прямым и специально случай, в котором четыре прямые суть эквидистанты *АВ*, *IH*, *ED*, *GF*,а пятая *GA* к ним перпендикулярна (рис. 9), причем *CF·CD·CH = СВ·СМ·а*, где *а —* расстояние между соседними эквидистантами. Здесь появляется первое в истории аналитической геометрии уравнение кривой третьего порядка. Обозначив *СВ = у*, *СМ = х*, Декарт находит

*у*3 *—* 2*ay*2 *— аау* + 2*а*3 = *аху*,

т. е. уравнение трезубца (см. стр. 106), и показывает, что эта кривая *CEG* может быть, как он утверждал ранее, описана пересечением параболы *CKN*, диаметр которой *KL* = *а* движется по *АВ*, и линейки *GL*, вра­щающейся вокруг точки *G* и постоянно проходящей через точку *L[[12]](#footnote-12)*. Он не упускает из виду, что искомым местом служит также кривая *NIo*, опи­санная пересечением *GL* с другой ветвью параболы (*HKN*), можно взять и сопряженные линии *cEGc* и *пI0*, получающиеся, если подвижная парабола обращена вершиной в другую сторону. Чертеж в «Геометрии» недо­статочно отчетливо изображает вторую часть трезубца, который состоит из двух отдельных линий, имеющих каждая — в терминологии Ньютона — гиперболическую ветвь с асимптотой *АВ* и параболическую ветвь, ли­шенную асимптоты. Как и должно быть, кривая пересекает на чертеже горизонтальную ось при значениях *у = — а*, *у* = *а*, *у =* 2*а*, но точка перегиба у части, лежащей справа от асимптоты, не обозначена.

Большое место занимают в «Геометрии» исследование оптических овалов, рассматриваемых в биполярных координатах, и про­ведение нормалей. Вторая книга сочинения завершается краткими замечаниями о возможности распространения метода на про­странственные кривые посредством проектирования их точек на две вза­имно перпендикулярные плоскости и заявлением: «Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий»[[13]](#footnote-13).

Конечно, в этих словах Декарта, как и в приведенной выше авторской оценке «Введения» Ферма, было несомненное преувеличение. Но действи­тельно, перед геометрией раскрывались невиданно широкие перспективы. Историки науки немало спорили о том, имелась ли у Аполлония аналити­ческая геометрия и было ли творчество Ферма и Декарта в этой области новаторским. Ответ зависит от определения термина «аналитическая гео­метрия», который, как отмечалось в другой связи, понимается по-разному. Несомненно, что оба ученых чрезвычайно многим обязаны были древним и что в саму теорию конических сечений они не внесли каких-либо новых теорем, а также не построили ее в чисто аналитическом плане. И вместе с тем Декарт и Ферма закладывали фундамент поистине новой геометрии, хотя «симптомы» Аполлония и соответствовали буквенным уравнениям кривых второго порядка.

Дело в том, что, как правильно писал Г. Цейтен, «геометрическая форма, приданная методом древних самой алгебре, была причиной многочислен­ных комбинаций между средствами и объектом геометрического исследо­вания — комбинаций, которые должны были оставаться довольно чуж­дыми аналитической геометрии, в особенности поскольку последняя стре­милась превратить геометрические проблемы целиком в задачи исчисле­ния»[[14]](#footnote-14). И до тех пор, пока средством исследования оставалась геометри­ческая алгебра, синтетическое рассмотрение неизбежно переплеталось с аналитическим, а в глазах некоторых ученых являлось принципиально господствующим. Ньютон, завершая свой вывод теоремы о том, что место к четырем прямым есть коническое сечение, писал: «Такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое не с помощью исчисления, но геометри­ческим построением, и изыскивалось древними»[[15]](#footnote-15). Между тем после Ферма и Декарта и благодаря им начинает развиваться чисто аналитический ме­тод исследования геометрических образов, в принципе не нуждающийся в обращении к геометрическим построениям и опирающийся лишь на ал­гебраическое исчисление. Такова общая, идейная сторона дела. К этому следует добавить, что новая алгебра давала средства изучения кривых любого порядка, первые примеры чего имеются уже у Декарта[[16]](#footnote-16) (такое применение геометрической алгебры было невозможно), что система коор­динат становилась свободной от связи с теми или иными исключительными точками и направлениями (например, диаметром и вершиной конического сечения), что приобретали право на существование отрицательные коор­динаты и т. д. Мы не говорим уже о том, что в новой геометрии впервые нашло явное выражение понятие о функции, заданной формулой.

В свете сказанного второстепенное значение имеют недостатки, при­сущие аналитической геометрии Декарта и Ферма, пользовавшегося к то­му же менее совершенной алгеброй Виета, например не разработанность вопроса об отрицательных координатах или отсутствие на большинстве чертежей второй оси, а также то обстоятельство, что оба они ограничились немногими примерами приложения нового метода.

Современники восприняли новую геометрию с энтузиазмом. Уже в ла­тинских изданиях «Геометрии» Декарта мы находим отдельные, заслу­живающие упоминания вещи.

1. В первом издаиии этот весьма распространенный в XVII в. труд назывался «Основы арифметики в числах и видах» (Arithmeticae in numeris et speciebus institutio). [↑](#footnote-ref-1)
2. Еще в переводе арабского трактата Ибн ал-Хайсама о параболических зеркалах, сделанном в XII в., употребляется оборот linea secunduin ordinem, т. е. «линия по порядку». Н. Орем в середине XIV в. писал о перпендикулярно приложенных отрез­ках — perpendiculariter applicatae. [↑](#footnote-ref-2)
3. *П. Ферма.* Введение в изучение плоских и пространственных мест. В книге: *Р. Де­карт.* Геометрия, стр. 137—138. [↑](#footnote-ref-3)
4. См. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 146. [↑](#footnote-ref-4)
5. Термин «аналитическая геометрия» в применении к любым геометрическим прило­жениям алгебры употреблялся в XVIII в. не раз. В более специальном смысле. совпадающем с общепринятыми в XIX в., его начал применять С. Ф. Лакруа, а пер­вую книгу, озаглавленную «Начала аналитической геометрии» (Elements de geome­tric analytique. Paris, 1801), опубликовал профессор Политехнической школы Ж. Г. Гарнье (1766-1840). [↑](#footnote-ref-5)
6. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 30. [↑](#footnote-ref-6)
7. Там же, стр. 30-31 [↑](#footnote-ref-7)
8. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 30. [↑](#footnote-ref-8)
9. Там же, стр. 33 [↑](#footnote-ref-9)
10. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 34 [↑](#footnote-ref-10)
11. «Прямая сторона» — термин, восходящий к древности, есть отрезок, равный нашему удвоенному параметру. Слово «параметр» (измеряю) предложил в этом смысле употреблять друг Декарта Кл. Мидорж во «Введения в катоптрику и диоптрику или труде о конических сечениях» (Prodromus catoptricorum et dioptri-corum sive conicoruni opus, Parisiis, 1631). [↑](#footnote-ref-11)
12. В подвижной системе координат *ЕВ = у*, *LB = х'* уравнение параболы *CKN* есть *у*2 = *а* (*a* — *х'*), при этом *х' = ху/*(2*а — х*)*.* [↑](#footnote-ref-12)
13. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 73 [↑](#footnote-ref-13)
14. *Г. Цейтен.* История математики в древности и в средние века. Перевод П. С. Юшке­вича. М.— Л., 1938, стр. 138. [↑](#footnote-ref-14)
15. *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Кры­лова. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII. М.— Л., стр. 122. [↑](#footnote-ref-15)
16. Помимо трезубца Декарт рассмотрел (в переписке 1638 г.) так называемый декартов лист *x*3 + *y*3 = 3*axy* и еще некоторые высшие кривые. [↑](#footnote-ref-16)