Позвольте пригласить вас на прогулку по математической кунсткамере, где собраны некоторые экспонаты, которые столь же отличаются от знакомых со школьных или вузовских времен математических образов, как ихтиозавры или какие нибудь трицератопсы от современных животных.

**Джин выходит из бутылки.** Необычной является уже сама функция Дирихле, о которой говорилось выше. Ведь на самом маленьком отрезке оси абсцисс бесконечно много и рациональных и иррациональных чисел. Но функция Дирихле для рациональных чисел равна единице, а для иррациональных – нулю. Поэтому когда x пробегает ось абсцисс, то значение функции все время прыгает от 0 к 1 и обратно. Построить график этой функции совершенно невозможно, потому что эта функция во всех точках разрывна.

Но и среди непрерывных функций есть функции с неожиданными свойствами. Например, может ли непрерывная функция иметь на конечном отрезке бесконечно много максимумов и минимумов? На первый взгляд это совершенно невозможно. Ведь функция должна успеть опуститься из точки максимума в точку минимума и т. д. Как же ей сделать все это на конечном отрезке? Тем не менее оказалось, что такие странные функции существуют, причем построить их совсем нетрудно.

Построим такую функцию на отрезке [0,1]. Для этого разделим отрезок пополам и построим на левой половине равносторонний треугольник. Теперь разделим оставшуюся правую половину снова на две равные части и на части [1/2, 3/4] построим второй равносторонний треугольник. Выполним описанную операцию бесконечно много раз. У нас получится «горная цепь», состоящая из бесконечного числа вершин, постепенно опускающаяся к точке 1

0 1

# Рис. 12

(рис. 12). Примем полученную ломанную за график функции f(x). Тогда функция будет определена в каждой точке отрезка [0,1], за исключением крайней правой точки 1. В этой точке положим f(1)=0.

Так как при приближении к точке 1 высоты вершин стремятся к нулю, полученная нами функция непрерывна во всех точках отрезка [0,1]. А число максимумов и минимумов на этом отрезке бесконечно велико!

Математику XVIII в., чтобы построить такую странную функцию, понадобилось бы долго комбинировать различные функции, прежде чем он догадался бы, что функция

{ x cos(π/x), если x≠0

F(x)= { 0, если x=0

имеет бесконечно много максимумов и минимумов на отрезке [0,1].

Но функции с бесконечным числом максимумов и минимумов были лишь началом неприятностей, ожидавших математиков. Джинн только начал выходить из бутылки.

**“Мокрые точки”.** У функции, которую мы построили в предыдущем пункте, есть лишь одна точка, около которой бесконечно много максимумов и минимумов, а именно точка 1. Сейчас мы построим другую функцию, у которой таких точек будет куда больше.

Предположим, что на отрезок [0,1] оси абсцисс падает сверху дождь. Для защиты от дождя поступим следующим образом. Разделим отрезок [0,1] на три равные части и возведем над средней частью палатку в форме равностороннего треугольника. Она защитит от дождя все точки средней части (кроме концов этой части, то есть точек 1/3 и 2/3). Теперь каждую из оставшихся двух частей снова разделим на три равные части и защитим средние части палатками той же формы ( но втрое меньшего размера).

Рис. 13

У нас получится линия, изображенная на рис. 13. На третьем шаге процесса мы построим еще четыре палатки, потом еще восемь и т. д.

Возникает вопрос: все ли точки отрезка защищены получившейся пилообразной линией или остались точки, которые дождь намочит? Некоторые из таких “мокрых” точек указать легко – ими являются концы защищаемых отрезков (то есть такие, ка 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9 и т. д.). Все эти точки остаются без защиты при возведении соответствующей палатки, а последующие палатки их тоже не защищают. Легко видеть, что таких концов будет бесконечное, но счетное множество.

**Колючая линия.** На протяжении многих столетий математики имели дело лишь с линиями, почти в каждой точке которых можно было провести касательную. Если и встречались исключения, то только в нескольких точках. В этих точках линия как бы ломалась, и потому их называли точками излома. В течение долгого времени никто из математиков не верил, что может существовать непрерывная линия, целиком состоящая из зубцов, изломов и колючек. Велико было изумление, когда удалось построить такую линию, более того, функцию, график которой был такой колючей изгородью. Первым это сделал Больцано. Но его работа осталась неопубликованной, и впервые такой пример опубликовал Вейерштрасс. Однако пример Вейерштрасса очень трудно изложить – он основан на теории тригонометрических рядов. Пример же Больцано напоминает линии, которые мы строили раньше.

Вот этот пример с небольшими изменениями. Разделим отрезок [0,1] на четыре равные части и над двумя средними частями построим равнобедренный треугольник (рис. 16, а). Получившаяся линия является графиком некоторой функции, которую обозначим через y=f 1(x).

а б

0 1 0 1

в

0 1

Рис. 16

Разделим теперь каждую из четырех частей еще на четыре равные части и в соответствии с этим построим еще четыре равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 16, б). Мы получим график второй функции y=f 2(x). Если сложить эти две функции, то график суммы y=f 1(x) + y=f 2(x) будет иметь вид, изображенный на рис. 16, в. Видно, что получившаяся линия имеет уже больше изломов и эти изломы гуще расположены. На следующем шаге мы снова разделим каждую часть еще на четыре части, построим 16 равнобедренных прямоугольных треугольников и прибавим соответствующую функцию y=f 3(x) к функции y=f 1(x) + y=f 2(x).

Продолжая этот процесс, мы будем получать все более и более изломанные линии. В пределе получится линия, у которой излом в каждой точке и ни в одной точке к ней нельзя провести касательную.

Похожий пример линии, нигде не имеющей касательной построил голландский ученый Ван-дерВарден. Он взял равносторонний треугольник, разделил каждую его сторону на три равные части и на средних частях построил новые равносторонние треугольники, смотрящие наружу. У него получилась звезда. Теперь каждую из двенадцати сторон этой звезды он разделил еще на три части и снова на каждой из средних частей построил правильный треугольник. Получилась еще более колючая линия, в каждой точке которой есть излом, колючка.

Рис. 17

Рис. 18

Математики построили много непрерывных функций, графики которых не имели касательной ни в одной точке, и начали изучать их свойства. Эти свойства совсем не походили на свойства “добропорядочных” гладких функций, с которыми они до тех пор имели дело. Поэтому математики, воспитанные в классических традициях, с изумлением смотрели на новые функции. Более того, виднейший представитель классического математического анализа Шарль Эрмит так писал своему другу, голландскому математику Стилтьесу. “Я с ужасом отворачиваюсь от этой достойной сожаления язвы непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке” ( то есть, как мы их называли, всюду колючих линий).

В физике встречаются линии, очень напоминающие колючие линии Ван-дер-Вардена и других. Это – траектории частиц, совершающих под ударами молекул броуновское движение. Французский ученый Ж. Перрен сделал зарисовки движения таких частиц. Он наблюдал их положения через каждые полминуты и соединял полученные точки прямолинейными отрезками. В результате у него получились запутанные ломанные, вроде изображенных на рис. 18. Но не следует думать, что в действительности между отдельными наблюдениями частица двигалась по прямой. Если бы Перрен наблюдал ее не через полминуты, а через полсекунды, то каждый прямолинейный отрезок пришлось бы заменить ломаной, столь же сложной, как и ломанные на рис. 18. И чем меньше были бы промежутки между наблюдениями, тем сложнее и “колючее” становилась бы ломаная. Американский математик Н. Винер показал, что движение броуновской частицы, настолько малой, что ее инерцией можно пренебречь, совершается по линии, нигде не имеющей касательной.

**Как делают статуи.** Про многих знаменитых скульпторов рассказывают, что на вопрос, как удается делать столь замечательные статуи, следовал ответ: “Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее”. В разных книгах это можно прочитать о Микеланджело, о Торвальдсене, о Родене.

Тем же самым способом можно получить любую ограниченную плоскую геометрическую фигуру: надо взять какой-нибудь квадрат, в котором она лежит, а потом отсечь все лишнее. Однако отсекать надо не сразу, а постепенно, на каждом шагу отбрасывая кусочек, имеющий форму круга. При этом сам круг выбрасывается, а его граница – окружность – остается в фигуре.

На первый взгляд кажется, что так можно получить лишь фигуры такого вида, ка на рис. 23. Но все дело в том, что отбрасывают не один и не два круга, а бесконечное, точнее говоря, счетное множество кругов. Таким путем можно получить любую фигуру. Чтобы убедиться в этом достаточно принять во внимание, что множество кругов, у которых рациональны и радиус и обе координаты центра, счетное.

А теперь чтобы получить любую фигуру, достаточно взять содержащий ее квадрат (глыбу мрамора) и обросить все круги указанного выше вида, которые не содержат ни одной точки нужной нам фигуры. Если же выбрасывать круги не из квадрата, а из всей плоскости, то описанным приемом можно получить и неограниченные фигуры

Рис. 23

**А все таки их можно измерить.** Над тем, что такое площадь фигуры, математики задумывались еще до открытия неквадрируемых областей. До этого на протяжении многих тысячелетий ученые пользовались понытиями длины, площади, объема, не подвергая их строгому критическому анализу. Рассказывают, что когда один французский генерал принес в Парижскую академию наук свое “решение” проблемы квадратуры круга, его спросили, а что именно он понимает под площадью круга. “Площади не понимают, их вычисляют!” – воскликнул бравый генерал. И такая точка зрения была распространена тогда даже среди математиков. Они считали, что площадь – это число, сопоставленное геометрической фигуре и обладающее очевидными свойствами (площадь целого равна сумме площадей частей, когруэнтные фигуры имеют равные площади и т. д.). Ни на одну минуту они не сомневались в том, что любая плоская геометрическая фигура имеет площадь (быть может, равную нулю или бесконечности).

Но характерной чертой математики является то, что наряду с созданием новых методов решения практических задач она изучает и оттачивает применяемый ею инструментарий, для каждого возникающего понятия ищет наиболее широкую и естественную область его применимости, для каждой доказанной теоремы – наиболее общие условия, при которых она справедлива. И это не пустые занятия математических снобов, а необходимость. Только установив понятия и теоремы в наибольшей общности, освободив их от ненужных ограничений, связанных с той конкретной задачей, из которой они возникли, можно увидеть связи между далекими друг от друга областями науки, научиться применять созданные методы в ситуациях, не имеющих на первый взгляд ничего общего с первоначальными источниками этих методов.

Поэтому столь очевидные, казалось бы, понятия, как длина, площадь, объем (позднее все эти понятия стали называть одним словом – мера), были подвергнуты тщательнейшему анализу. Одна из первых работ по уточнению понятия меры принадлежала Жордану. В течении многих десятилетий он читал в Париже курс математического анализа, построенный на самых точных определениях, безупречных доказательствах и строжайшей логике. И, конечно, он не мог пользоваться в этом курсе расплывчатым понятием площади. Придуманное им определение площади можно сформулировать так: площадь фигуры – это число, которое лежит между множеством площадей многоугольников, содержащихся в этой фигуре, и множеством площадей многоугольников, содержащихся в этой фигуре, содержащих ту же фигуру. Оказалось, что площадь по Жордану имеют те и только те плоские фигуры, граница которых имеет нулевую площадь. К сожалению, слишком много фигур не поддавалось измерению по Жордану; в частности, нельзя было измерить описанные выше неквадрируемые области.

За решение возникших проблем взялись молодые ученые, вдохновленные лекциями Жордана. Одно из первых определений, применимых к весьма широкому классу фигур, предложил в конце XIX в. Эмиль Борель. Он заметил, что все возникавшие в науке фигуры на прямой, плоскости и в пространстве могли быть получены из простейших фигур – отрезков, квадратов и кубов с помощью двух основных операций: образования дополнения к множеству и объединения счетной совокупности множеств (в частности, как мы видели выше, таким путем получаются все замкнутые множества). Чередуя эти операции и продолжая такой процесс трансфинитным образом, можно получать на каждом шагу все более сложные множества, названные в честь Бореля борелевскими или иначе В-множествами (отметим что применяя идею Зенона можно получить каждое такое множество за конечный промежуток времени, удваивая на каждом шагу скорость применяемых операций).

Оказалось что любому борелевскому множеству можно приписать меру исходя из следующих двух принципов:

А) если множество А представимо в виде объединения счетной совокупности подмножеств, имеющих меру, причем никакие два из них не имеют общих точек, то мера всего множества равна сумме ряда, составленного из мер подмножеств;

Б) мера дополнения к подмножеству, имеющему меру, получается путем вычитания меры этого подмножества из меры целого.

Из принципов Бореля вытекало, в частности, что любое счетное множество имеет нулевую меру – ведь оно является объединением счетной совокупности точек, а мера каждой из этих точек равна нулю.

К сожалению, позднее выяснилось, что предложенный Борелем процесс измерения множеств обладал существенным недостатком. Дело в том, что одно и тоже множество может быть разными способами составлено из простейших, а потому предстояло доказать, что все эти способы дадут одно и то же значение для меры данного множества. Такого доказательства Борель не смог получить.

Иначе подошел к проблеме измерения множеств начинавший в те годы свою научную деятельность Анри Лебег. Уже первые работы Лебега разгневали математиков классического направления. Само название одной из них «О нелинейных развертывающихся поверхностях» казалось им столь же противоестественным, как, например название «О газообразном льде» для физики или «О рыбообразных слонах» для биолога. Самый слабый студент знал, что любая поверхность, которую можно развернуть на плоскость (цилиндр, конус и т. д.), соткана из прямых линий, то есть может быть получена движением прямолинейной образующей. Но все дело было в том, что молодой автор по иному понимал развертывающиеся поверхности, чем геометры-классики.

Он считал такими не только поверхности, получаемые аккуратным изгибанием листа бумаги, но и поверхности, которые получатся, если этот лист бумаги скомкать (поясняя свою работу одному из друзей, Лебег сказал: «Представь себе скомканный носовой платок»). Он доказал, что кусок плоскости можно так «скомкать», что после этого на нем не оказалось ни одного прямолинейного отрезка. Разумеется, получившаяся поверхность вся состояла из складок и изломов. Поэтому ее и пропустили геометры, классифицированные развертывающиеся поверхности: они занимались лишь гладким случаем.

От изучения произвольных развертывающихся поверхностей Лебег перешел к общему вопросу, как определить площадь поверхности, если эта поверхность не является гладкой, если к ней нигде нельзя провести касательную плоскость. Для скомканной развертывающейся поверхности задача решается просто: надо расправить ее и подсчитать площадь получившегося куска плоскости. Но этот ответ нельзя было получить по формулам, которые давала классическая математика: они годились лишь для гладких поверхностей.

Не удалась бы и попытка измерять площади поверхностей, вписывая в них многогранники и переходя к пределу при уменьшении размеров всех граней. Немецкий математик Г. Шварц показал, что таким путем нельзя найти площадь самого обычного цилиндра – вписанный в него многогранник может оказаться настолько складчатым, что площадь его поверхности куда больше площади цилиндра. Лебегу удалось придумать определение площади поверхности, которое не требовало проведения касательных плоскостей, но в то же время обходило все трудности, связанные с «гармошкой Шварца». Решая эту частную задачу, Лебег пришел к общим идеям о том, что такое мера множества, как измерять длины, площади, и объемы самых причудливых фигур.

Взяв от Бореля идею суммирования рядов, он видоизменил определение, предложенное Жорданом, разрешив использовать кроме многоугольников и фигуры, получаемые из них с помощью объединения счетных совокупностей. Именно, назовем фигуру ε-покрываемой по Лебегу, если существует счетная система многоугольников, объединение которых покрывает эту фигуру, причем сумма ряда, составленного из их площадей меньше, чем ε. Далее, назовем множество X измеримым по Лебегу, если для любого ε>0 его можно представить в виде многоугольника Аε, к которому присоединено одно ε-покрываемое множество и от которого отброшено другое ε-покрываемое множество. Если меру многоугольника А обозначить через |А|, то ясно, что мера множества X должна быть заключена между числами|Аε| - ε и |Аε|+ε. Оказалось, что для измеримых по Лебегу множеств всегда существует одно и только одно число, обладающее этим свойством, какое бы ε>0 мы ни выбрали и какой приближающий многоугольник Аε ни взяли. Это-то число и называют *мерой Лебега* множества Х.

После создания понятия меры Лебега оказалось, что для нее нет никаких осложнений, причем по Лебегу можно измерить все встретившиеся до того в науке множества. Позднее были построены примеры неизмеримых множеств, но они используют так называемую аксиому выбора, о которой будет идти речь ниже. Построенные с ее помощью примеры не являются конструктивными.

Поэтому можно сказать, что Лебег решил проблему измерения всех множеств, которые могут встретиться в практической работе математиков.

С помощью введенного им понятия меры Лебег сумел найти интегралы всех разрывных функций, которые можно было построить известными в то время методами (интеграл Лебега).

Триумф идей Лебега привел к тому, что даже один из вождей математиков – классиков Гастон Дарбу изменил свое мнение и, выступая в 1908г. на Математическом конгрессе в Риме, говорил о пламенном и пытливом духе математики ХХ в., о науке, ведущей свои изыскания в абсолютно новой области с неизведанными перспективами. Он подчеркнул, что наука ХХ в. не боится атаковать основы построений, которые столь долго казались непоколебимыми.

Позднее идеи, приведшие к созданию меры и интеграла Лебега, позволили А. Н. Колмогорову построить аксиоматику теории вероятностей, а Норберту Винеру – определить понятия меры и интеграла для пространств, состоящих из функций.

**Работу надо не рецензировать, а печатать!** Урысон доказал много интереснейших теорем, связанных с введенным им понятием размерности. Но одну самую главную теорему ему никак не удавалось доказать: не получалось доказательство того, что самый обычный куб имеет размерность 3. После длительных усилий он нашел замечательный выход из положения, придумав новое определение размерности. Мы не будем детально излагать это определение, а поясним его на простейших фигурах.

Если взять отрезок или окружность, то их можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая точка принадлежит не более чем двум кусочкам (рис. 33). При этом надо брать кусочки вместе с их границами (то есть конечными точками). Квадрат уже так разбить нельзя. На первый взгляд кажется, что при разбиении квадрата на куски всегда будут точки, принадлежащие четырем частям (рис. 34, а). Но если уложить части так, как кирпичи на стройке, то удается добиться чтобы каждая точка принадлежала не более чем трем различным частям (рис.34, б). Точно так же у куба есть разбиение на маленькие параллелепипеды при котором каждая точка принадлежит не более чем четырем параллелепипедам.

Именно это свойство и принял Урысон за новое определение размерности. Фигура называется имеющей размерность n, если ее можно разбить на сколь угодно малые замкнутые части так, чтобы ни одна точка не принадлежала n+2 различным частям, но при

Рис. 33 Рис. 34

любом достаточно мелком разбиении найдутся точки, принадлежащие n+1 различным частям.

Используя это определение размерности, Урысон доказал что размерность квадрата равна 2, куба – 3 и т. д. А потом он показал, что это определение равносильно первоначально данному.

Построенная Урысоном теория размерности произвела глубокое впечатление на весь математический мир. Об этом ярко говорит следующий эпизод. Во время заграничной командировки Урысон сделал доклад о своих результатах в Геттинге. До прихода нацистов к власти Геттингский университет был одним из основных математических центров. После доклада руководитель геттингенской математической школы знаменитый Давид Гильберт сказал, что эти результаты надо опубликовать в журнале «Mathematische Annalen» - одном из главных математических журналов того времени. Через несколько месяцев Урысон снова делал доклад в Геттингене и Гильберт спросил у своего помощника по журналу, напечатана ли уже работа Урысона. Тот ответил, что работа рецензируется. «Но я же ясно сказал, что ее надо не рецензировать, а печатать!» – воскликнул Гильберт. После столь недвусмысленного заявления статья была немедленно напечатана.

В течение трех лет продолжалась не имеющая равных по глубине и напряженности научная деятельность Урысона (за это время он опубликовал несколько десятков научных работ). Трагический случай оборвал его жизнь – он утонул 17 августа 1924г., купаясь во время шторма в Бискайском заливе. За день до смерти он закончил очередную научную работу.

После смерти П. С. Урысона остались многочисленные черновики и наброски неопубликованных результатов. Его ближайший друг (и соавтор по многим работам) Павел Сергеевич Александров, отложив на некоторое время свои исследования, подготовил эти работы к печати, сделав тем самым и эти результаты Урысона достоянием всех математиков. В настоящее время теория размерности стала важной главой математики.