Сигулдская средняя школа N2

Кронвальда 7, Сигулда, Латвия

***Неевклидова геометрия.***

Проект ученика 11а класса

Чиркова Андрея

Консультант: Степулане Р.Э

# СИГУЛДА 2003

# *Содержание*

1. Введение стр.

2. История геометрии стр.

3. Биография Николая Ивановича Лобачевского стр.

4. Другие авторы стр.

5. Краткое описание геометрии Лобачевского стр.

6. 5 постулат стр.

7. Геометрия Лобачевского в реальном мире стр.

8. Заключение стр.

9. Приложение стр.

9. Использованная литература стр.

***Введение***

Любая теория современной науки считается единственно верной, пока не создана следующая. Это своеобразная аксиома развития науки.

Этот факт многократно подтверждался. Физика Ньютона переросла в релятивистскую физику, а та в квантовую. Теория флогистона стала химией, а самозарождение мышей из грязи обернулось биологией. Такова судьба всех наук, и нельзя сказать, что сегодняшнее открытие через двадцать лет не окажется грандиозной ошибкой. Но это тоже нормально – ещё Ломоносов говорил: «Алхимия – мать химии: дочь не виновата, что её мать глуповата».

Участь эта не обошла и геометрию. Традиционная Евклидова геометрия переросла в неевклидову, геометрию Лобачевского. Именно этому разделу математики, его истории и особенностям и посвящен этот проект.

***История геометрии.***

Считается, что геометрия началась в так называемой Ионийской школе. Её основателем считается ***Фалес Милетский*** (640-540 (546?) гг. до н. э.). Он считался одним из семи мудрецов Греции, первым математиком, астрономом и философом. Он доказал, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, что вертикальные углы равны, что диаметр делит окружность пополам и ещё множество теорем. Предсказание затмения солнца в 585 году также приписывается ему.

Огромный импульс развития этой школе дал ***Пифагор*** (569-470 гг. до н. э.). В основном о его личных качествах пишут то же самое, что и о Фалесе. Но к этому ещё можно добавить титул чемпиона по боксу на олимпийских играх – звание, среди математиков редкое.

Несмотря на все его достижения, мнение современников хорошо выразил Гераклит: «Многознание без разума». Что ж, это было вполне заслужено: Пифагор засекречивал открытия и приписывал себе работы учеников. Пифагор также заставлял своих воспитанников исполнять целый свод очень странных правил: например, не прикасаться к белому петуху.

Но факт есть факт - и одна из теорем Пифагора теперь известна каждому – это теорема о равенстве квадрата гипотенузы сумме квадратов катетов. Эта теорема настолько популярна в мире математиков, что одних только доказательств накопилось 39 штук. Их можно посмотреть на сайте www.cut-the-knot.com/pythagoras.

***Платон*** (428-348) знаменит введением принципа ***дедуктивности*** в математике, или принципа развития от простого к сложному. Он также знаменит постановкой трех задач на построение. Используя только циркуль и линейку, надо было:

1. Разделить угол на три части (задача о трисекции угла).
2. Построить квадрат, равный по площади данному кругу (задача о квадратуре круга).
3. Построить куб, равный по объему данному (задача об удвоении куба).

Нерешаемость этих задач была доказана только в 19 веке, но перед этим они успели вызвать настоящую бурю: например, задача №2 вызвала появление интегрального исчисления.

Закончилось развитие традиционной геометрии ***Евклидом.*** Его книга «Начала» только до 1880 года выдержала 460 изданий, уступив только Библии. Способ построения «Начал» стал единственно верным для всех научных работ: Перечисление основных, естественных понятий → Перечисление основных аксиом → Перечисление основных определений → Формулирование теорем (утверждений) и их доказательство.

Метод доказательства от противного – тоже его заслуга. Он же сформулировал пять ***постулатов*** геометрии:

1. Через два точки можно провести одну и только одну прямую.
2. Прямая продолжается бесконечно.
3. Из любого центра можно провести окружность любым радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.

Пятый постулат является своеобразным философским камнем геометрии и будет подробнее описан в шестой части.

***Биография Николая Ивановича***

***Лобачевского.***

***1729 – 1856***

Детство Лобачевского было тяжелым и бедным. В Казанской гимназии он был казеннокоштным студентом, что накладывало определенные обязанности и ограничения. Самым простым было учиться лучше других; но казеннокоштным студентам, например, не разрешалось выходить дальше, чем за пределы парадного двора. Но уже с самого начала жизни Лобачевский интересовался геометрией. Это неудивительно, ведь его отец был землемером. Лобачевский проявил также большую склонность к языкам – например, французский он выучил за три месяца. Он писал стихи – его поэмы о Волге считаются одними из лучших. Но при этом он не забывал учиться – в 1807 году он студент, а в 1811 – магистр. Работая над развитием геометрии, в 1826 году, уже будучи деканом физико-математического факультета, он сделал доклад, содержавший основы неевклидовой геометрии. Однако время было не совсем подходящим: открылись хищения из казны Магницким – ещё одним математиком этой эпохи, Магницкого «записали» в декабристы… Словом, ученому миру было не до новых теорий.



Но он не сдался. С 1829 по 1830 год он публиковал в журнале «Казанский вестник» мемуар «О началах геометрии», и это была первая публикация основ его теории.

Взлеты и падения следовали один за другим. Только были сданы в печать первая и вторая части «Новых начал геометрии», как умер его кумир Пушкин, а потом и дочь Надежда.

Лобачевский пользовался уважением и любовью студентов и коллег. Когда упразднили должность директора университета, то его кандидатуру на пост главного ректора утвердили без возражений. Не высказался даже его главный соперник – Симонов.

в 1842 году, во время большого пожара в Казани он героически спас древние книги, до этого, во время эпидемии холеры, превратил университет в мини-госпиталь – из-за чего умерло гораздо меньше студентов, чем в других ВУЗ’ах.

Когда негде было разместить второй класс Казанской гимназии, он предложил свой дом, обещав потом построить для гимназии дворец. Понятно, что в 1845 году он получил должность управляющего Казанским учебным округом, а после стал член-кореспондентом Гуттенгенского университета.

Но жизнь нанесла ещё один удар: он начал слепнуть. Он начал играть со своей женой в страшную игру, пытаясь убедить её, что ещё хорошо видит. Она закатывала истерики, уговаривала лечиться, но все тщетно – Лобачевский ослеп. Но, тем не менее, он продолжал преподавать и пользоваться безграничной любовью и уважением учеников. Знаменателен случай, когда молодого студента, засмеявшегося над споткнувшимся Лобачевским, однокурсники заставили уйти из университета. Лобачевский об этом даже не узнал.

В 1855 году он был уволен со службы с причислением к министерству. В этом же году опубликовал свою последнюю работу – «Пангеометрия», которую диктовал своим ученикам. Его горячим желанием было создать единую механику – но времени не хватило. Он умер в 1856 году – забытый царем, лишившись орденов и квартиры – ордена украли, а квартиру конфисковали. В его формулярном листе за сорок лет работы в графе отпусков бисерным почерком Лобачевского было написано: «Не был».

Ему поставлен памятник – и поэт В. Фирсов написал о нем:

Высокий лоб, нахмуренные брови,

В холодной бронзе – отраженный луг…

Но даже неподвижный и суровый,

Он, как живой, - спокоен и могуч.

Когда – то здесь, на площади широкой,

Задумчивый, неторопливый, строгий,

Он шел на лекции – великий и живой.

Пусть новых линий не начертят руки,

Он здесь стоит, взнесенный высоко,

Как утверждение бессмертья своего,

Как вечный символ торжества науки.***Другие авторы.***

Идея неевклидовой геометрии пришла в голову не только Лобачевскому – просто ему относительно повезло. Одним из «конкурентов» был Гаусс – великий затворник, отказавшийся от услуг почты, чтобы никто не смог обвинить его в плагиате.

В это время сын старого друга Гаусса, Янош Больяи, занялся теорией параллельных линий. В 1832 году он выпустил труд «Аппендикс», содержащий начала неевклидовой геометрии. Но его работа почти совпадала с мемуаром Лобачевского «О началах геометрии» 1829 года; подобных результатов достиг и сам Гаусс.

Тога Гаусс написал Фаркашу Больяи то, что тот сам говорил сыну: время для этих выкладок ещё не пришло. Януш же посчитал, что Гаусс решил присвоить его труд. Но Гаусс не публиковал его – ведь он был королем математики того периода, и боялся, что его сочтут свихнувшимся.

Гаусс в то время хотел уехать – куда-нибудь далеко, где никто не помешает. Он думал о Петербурге или Казани. Но из-за бюрократии российских чиновников поездка расстроилась.

Но если Януш Больяи считал себя гением-одиночкой, то Гаусс узнал о Лобачевском, прочитав «Геометрические исследования по теории параллельных линий Николая Лобачевского». Гаусс говорил, что, читая этот труд, он видел в первую очередь себя. Гаусс закончил затворничество, начал изучать русский язык – и стал бегло читать уже через два месяца. Но – ирония судьбы – Гаусс стеснялся открыто попросить сочинения Лобачевского, а тот не отсылал их в Геттинген, так как не знал, что Гаусс понимает по-русски.

Через шесть лет Гаусс все ещё думает о Лобачевском. Но он понимает, что слишком стар, чтобы защищать новые идеи. А Лобачевский погибал без поддержки.

Больяи же, получив в 1848 году «Геометрические исследования», посчитал, что Гаусс выпустил мемуар под псевдонимом Лобачевский. Целью его жизни было превзойти этот труд. Это была агония разума – а Лобачевский даже не подозревал о существовании талантливого венгра.

За год до этого, зимой 1848 года, к Гауссу пришел студент. Его звали Бернард Риман. Но Гаусс оттолкнул его. Тогда Риман, сжав зубы, уехал в Берлин. Но мир тесен, и, защитив докторскую диссертацию, он решает стать профессором. Удивительно, но тему пробной лекции утверждает и принимает именно Гаусс.

Риман создал геометрию, где прямые замкнуты, где нет параллельных прямых, а сумма углов треугольника больше 180о. Она похожа на геометрию сферы Гаусса.

Риман оказался хорошим учеником великого математика, и из нежеланного гостя стал единственным другом. Он умер в Италии, не закончив последний мемуар. На русском языке он появился только в 1893 году. Его название было: «О гипотезах, лежащих в основе геометрии».

***Краткое описание геометрии Лобачевского.***

Иногда говорят, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются в бесконечности. Но это не совсем так. Есть только немного другое свойство параллельности: через одну точку вне прямой можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной. Это видно на рисунке 1. Причем параллельность сохраняется только в сторону уменьшения расстояния между прямыми. Этот, казалось бы, простой факт, меняет всю геометрию. Как, например, в геометрии Евклида доказывается, что сумма углов треугольника равна 180о? Классическое доказательство приведено на рисунке 2. Используется свойство углов при накрест лежащих прямых, и выходит, что ∠1+∠2+∠3=180о. Но так как в геометрии Лобачевского параллельность сохраняется только в одном направлении, то для нахождения суммы углов треугольника\*, то нужно провести две прямые, параллельные данной в разные стороны. Что получается, видно на рисунке 3. Понятно, что теперь сумма углов треугольника меньше 180о. Эта разница была названа Лобачевским дефектом треугольника.

1

2

3

1

2

рис. 3

1

2

3

3

1

рис. 2

рис 1.

Одними из важных объектов на плоскости Лобачевского являются пучки прямых. Но чтобы описать эти пучки, сначала надо уяснить, что в плоскости Лобачевского есть три типа расположения прямых: прямые или параллельны, или пересекаются, или являются ***расходящимися.***  
\_\_\_\_\_\_\_

\* Здесь и далее подразумевается геометрия Лобачевского, если нет оговорки на геометрию Евклида.

Так вот, первый вид пучков образован прямыми, имеющими общую точку – центр пучка (рис. 4а). Пучок расходящихся прямых – это перпендикуляры к одной прямой – ***оси пучка*** (рис. 4б). Из этого определения выходит интересное и, казалось бы, абсурдное утверждение, что два перпендикуляра к одной прямой непараллельны, и отличие от геометрии Евклида.

И, наконец, пучок, образуемый прямыми, параллельными данной прямой в заданном направлении (рис. 4в).

рис. 4

а

б

в

Следующими объектами геометрии Лобачевского являются кривые. Для их построения Лобачевским было введено понятие соответственных точек. В пучке первого рода это точки на прямых, равноудаленные от центра (рис. 5а). В пучке второго рода это точки прямых, лежащие по одну сторону от оси и отстоящие от нее на одинаковые расстояния (рис. 5б). Наконец, в пучке третьего рода они расположены симметрично относительно биссектрисы полосы между двумя прямыми, на которых лежа эти точки (рис. 5в).

Соединив соответствующие точки первого пучка, мы получим окружность. В случае второго пучка мы получаем линию равных расстояний, а в третьем случае – так называемую предельную линию.

Примеры таких построений – на рисунке 6.

Из определения предельных линий выходит, что она бесконечна. Поэтому в теоремах используется понятие предельной дуги, или дуги предельной линии.

рис. 6

б

а

в

рис. 5

а

б

в

Для концентрических предельных дуг существуют несколько правил: во-первых, равным хордам соответствуют равные дуги, большей хорде – большая дуга; отрезки осей, заключенные между дугами, равны, и отношение двух предельных дуг, заключенных между одинаковыми осями, зависит только от расстояния. Причем это отношение при S1>S2 равно , где х – расстояние, а к – некотрая константа. Сам Лобачевский дает её определение так: к – это расстояние между двумя предельными дугами, заключенными между двумя осями, отношение которых равно *е*. Физический смысл этой константы заключается в отображении кривизны пространства Лобачевского.



Лобачевским была создана и стереометрия. Прямые в пространстве могут или скрещиваться, или лежать в одной плоскости. Скрещивающиеся прямые имеют смысл двух прямых, имеющих общий перпендикуляр, определяющий кратчайшее расстояние между ними. У параллельных прямых есть два основных свойства: во-первых, если через две параллельные прямые провести две пересекающиеся плоскости, то прямая пересечения плоскостей будет параллельна двум другим; во-вторых, две прямые, параллельные третей, параллельны одна другой в том же направлении – даже если третья прямая не лежит в плоскости первых двух.

Для анализа расположения прямой и плоскости, на плоскость опускается проекция. Если прямая и плоскость параллельны, то прямая и её проекция на плоскость тоже параллельны, и наоборот. Так же определяется и расположение двух плоскостей – с тем лишь отличием, что, если нельзя провести плоскость, перпендикулярную двум выбранным плоскостям и проходящую через выбранную прямую и её проекцию, то плоскости обязательно пересекутся.

Аналогию пучкам в пространстве составляют связки. Связки также делятся на три рода: первые образуются прямыми и плоскостями, проходящими через одну точку – центр связки; вторые образованны прямыми и плоскостями, перпендикулярными некой плоскости; и, наконец, третьи образованы прямыми и плоскостями, параллельными данной плоскости в одном направлении. Точно так же определяются соответствующие точки. В случае связки первого рода они формируют сферу, второго – поверхность равных расстояний, третьего – предельную поверхность. Предельная поверхность обладает удивительным свойством: на ней справедлива геометрия Евклида. Этот факт свидетельствует о том, что неевклидова геометрия не опровергает евклидову, а включает её в себя как органичную часть.

В процессе нахождения тригенометрических формул, Лобачевский проецировал прямоугольный треугольник с предельной плоскости на плоскость, касательную к ней. Пользуясь формулами и , вывод которых приведен в приложении, он получил тригинометрические формулы своего пространства. Соотношения в прямоугольном треугольнике при этом остаются одинаковыми, но *cos*, *sin* и *tg* определяются по-другому: , , , где *с* – сторона против прямого угла, *а* – против *α*, *в* – против *β*.



Несмотря на все кажущиеся странности, геометрия Лобачевского является настоящей геометрией нашего мира, и Евклидова является только её составной частью. Но в пределах ежедневных измерений Евклидова геометрия дает исчезающе малые ошибки, и мы пользуемся именно ею.

***5 постулат.***

Итак, мы дошли до пятого постулата. Сам Евклид формулировал его так: «Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых». Другие формулировки гораздо проще, например: «через точку вне прямой можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной».

Конечно, ещё сам Евклид пытался вывести этот сложный постулат из более простых. После него этой проблемой занимались почти все известные математики, но чаще всего это заканчивалось тем, что постулат выводился только при принятии каких-то дополнительных предположений. У менее удачливых математиков не получалось вообще ничего.

Самую известную попытку доказать пятый постулат методом от противного предпринял итальянский монах Джироламо Саккерти в 1733 году. Но отрицание пятого постулата – это и есть главное отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида. Он, как и другой математик И. Г. Ламберт в 1766 году, вплотную подошел к неевклидовой геометрии, но не нашел её реальной.

Гаусс, Больяи, Швейкарт, Тауринус – они все рано или поздно убеждались, что доказать пятый постулат невозможно. Сам Лобачевский говорил об этой проблеме: «Напрасные страданья … в продолжение двух тысяч лет». И именно он смог отверг этот постулат, создав новую геометрию.

Гаусс, изучая поверхности, обнаружил, что на поверхностях отрицательной кривизны сумма углов треугольника меньше 180о. Он был в шаге от опровержения пятого постулата.

Попыток было много – и именно недоказуемость этого предположения привела к открытию неевклидовой геометрии.

***Геометрия Лобачевского в реальном мире.***

Если геометрия Евклида является только частью геометрии Лобачевского, то выходит, что наш мир – не мир Евклида, как принято считать? Почему же мы не замечаем разницы?

Как пример можно привести тот факт, что видимый звездный свод это ни что иное, как предельная плоскость. Астрономам после признания достижений Лобачевского пришлось пересчитывать все расстояния между звездами – и ошибки достигали 1/6.

Но вернемся на землю. Есть такое понятие – гауссова кривизна пространства. Если мы возьмем кривую поверхность, проведем к какой-то точке касательную, проведем в точку касания отрезок, перпендикулярный касательной плоскости, то мы получим нормаль. Проведя через нормаль плоскость, мы можем найти окружность, наиболее плотно прилегающую к поверхности. Так как мы можем провести сколько угодно плоскостей, то мы можем найти окружности с минимальным и максимальным радиусом. Подставив их в выражение , мы получим Гауссову кривизну пространства. Если К>0, то поверхность в этой точке эллиптическая. Если К<0, то гиперболическая. Если К=0, то параболическая.

рис. 7



Как мы уже знаем, на поверхностях с отрицательной кривизной работает геометрия Лобачевского. Но именно такую кривизну имеют графики интенсивности всех электромагнитных полей! Состояние поверхности плазмы также описывается геометрией Лобачевского.

Но наглядно геометрию Лобачевского можно устроить и на бумаге. Если нарисовать окружность, то мы можем, не выходя за её пределы, провести сколько угодно прямых, не пересекающих данную (рис. 7). Взяв сферу, можно построить стереометрическую модель. Такая модель называется моделью Клейна.

Все эти модели служат одной цели – полнее представить наш мир, не прибегая к вселенским масштабам.

***Заключение.***

Когда Евклид формулировал пятый постулат, вряд ли он знал, какую бурю тот вызовет. Когда Лобачевский отказался от пятого постулата, он не знал, что его «воображаемая геометрия» на поверку окажется реальной.

Нельзя сказать, что неевклидова геометрия единственно правильна. На данный момент к ней нет никаких претензий. Но, может быть, через много лет она устареет – или это произойдет быстрее? Так или иначе, но наука никогда не будет стоять на месте, и когда – нибудь и этот проект окажется макулатурой.

Но думаю, что этого времени он успеет исполнить свое предназначение – рассказать и заинтересовать читателя настоящей геометрией нашего мира. Именно из-за популярного характера в нем нет ни строгих доказательств, ни полного описания неевклидовой геометрии. Но для поверхностного ознакомления с ней он вполне годен.

***Приложение.***

При доказательства используют рисунок 1. Пусть ОХ перпендикулярно ОY.

N’

Y

M

P

C

M’

A’

X

O

N

A

B

u

s

v

σ

σ

рис. 1

Через точку А прямой ОY проведем прямую АА’ , параллельную ОХ, и построим предельную линию с осью ОХ, проходящую через точку О. Дугу , заключенную между осями ОХ и АА’, обозначим через s, отрезки ОА и АВ – соответственно через u и v. Проведем прямую ММ’, параллельную ОХ и ОY. Предельную дугу ОС, заключенную между ОХ и ММ’, обозначим через σ. Нашей задачей является вывод следующих формул: (А) и (В).

рис. 2

A’

X

M’

D

C

M

N’

Y

O

N

A

B

v

u

s

σ

σ



Построим прямую NN’, параллельную ОY и перпендикулярную АА’, и через точку N проведем предельную дугу , концентрическую дуге . Так как прямая М’М параллельна NN’ и АА’, то NР = σ. Далее, так как ∠ОАА’ = П(u)\*, ∠ YАN, то АN = u, т.е. NВ = u + v. Применяя формулу к концентрическим дугам = σ и = σ - s, получаем (3). Отложим теперь отрезок ОА = u и проведем прямую АА’, параллельную ОХ, и прямую ММ’, параллельную ОХ и ОY. Строим прямую NN’, перпендикулярную АА’ и параллельную ОY (рис. 2). Через точку О проведем ортогонально к ОХ предельную дугу = s + σ, через точку N – концентрическую дугу = σ. Так как ∠ ОАА’ = П(ОА) = П(АN), то АN = ОА = u, т.е. ВN = u – v. Итак, (4). Складывая отношения (3) и (4), получаем формулу (А). вычитая (3) из (4), имеем . Подставляя сюда из (А) , получаем соотношение (В).



\*Имеется ввиду, что отрезок u определяется *углом параллельности* ∠ОАА’ .

\*\**Гиперболические функции* определяются так:

1. Синус: .



1. Косинус: .



1. Тангенс: .



***Использованная литература.***

Смилга В.П. В погоне за красотой./. Н-п издание. – М.: Молодая гвардия, 1968. – 200 стр. с илл.

Колесников М. Лобачевский./. Серия «Жизнь замечательных людей». – М.: Молодая гвардия, 1965. – 320 стр. с илл.

Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского./. – М.: Наука, 1983. – 76 стр.