План:

Предмет комбинаторики. 2

Краткая историческая справка. 4

Основные комбинаторные задачи. 5

Основные формулы комбинаторики 7

Правило суммы. 7

Правило произведения. 9

# Предмет комбинаторики.

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

*Достоверным* называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

*Невозможным* называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S. Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

*Случайным* называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» — случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, — она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.*

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

# Краткая историческая справка.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI—XVII вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А.А.Маркова(1856—1922) и А. М.Ляпунова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и др.). В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит советским математикам.

# Основные комбинаторные задачи.

Основными и типичными операциями и связанными с ними задачами комбинаторики являются следующие:

1) образование упорядоченных множеств, состоящее в установлении определенного порядка следования элементов множества друг за другом, - составление перестановок;

2) образование подмножеств, состоящее в выделении из данного множества некоторой части его элементов, - составление сочетаний;

3) образование упорядоченных подмножеств - составление размещений.

ТИПЫ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ.

1. **Магический квадрат** - квадратная таблица (n \* n) целых чисел от 1 до n¤ такая, что суммы чисел вдоль любого столбца, любой строки и двух диагоналей таблицы равны одному и тому же числу s=n(n¤+1)/2. Число n называют порядом магического квадрата.

Доказано, что магический квадрат можно построить для любого n Є 3. Уже в средние века был известен алгоритм построения магических квадратов нечетного порядка. Существуют магические квадраты, удоволетворяющие ряду дополнительных условий, например магический квадрат с n=8 , который можно разделить на четыре меньших магических квадрата 4x4. В Индии и некоторых других странах магические квадраты употреблялись как талисманы. Однако общей теории магических квадратов не существует. Неизвестно даже общее число магических квадратов порядка n.

2. **Латинский квадрат** - квадратная матрица порядка n, каждая строка и каждый столбец которой являются перестановками элементов конечного множества S, состоящего из n элементов.

3. **Задача размещения** - одна из классических комбинаторных задач, в которой требуется определить число способов размещения m различных предметов в n различных ячейках с заданным числом r пустых ячеек. Это число равно

r n-r m

C (r)=C дельта O , r=0,1,2,...,n,

nm n

где

k m k j j m

дельта O =сигма (-1) C (k-j)

j=0 k

4. **Задача коммивояжера**, задача о бродячем торговце – комбинаторная задача теории графов. В простейшем случае формулируется следующим образом: даны n городов и известно расстояние между каждыми двумя городами; коммивояжер, выходящий из какого-нибудь города, должен посетить n-1 других городов и вернуться в исходный. В каком порядке должен он посещать города (по одному разу каждый) чтобы общее пройденное расстояние было минимальным?

Методы решения задачи коммивояжера, по существу, сводятся к организации полного перебора вариантов.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

1. Метод рекуррентных соотношений.

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение комбинаторной задачи с n предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется рекуррентным. Пользуясь этим соотношением, искомую величину можно вычислить, исходя из того, что для небольшого количества предметов решение задачи легко находится.

2. Метод включения и исключения.

Пусть N(A) - число элементов множества A. Тогда методом математической индукции можно доказать, что

N(A1 U A2 U ... An) = N(A1) + ... + N(An) -

- {N(A1 П A2) + ... + N(An-1 П An)} +

+ {N(A1 П A2 П A3) + ... + N(An-2 П An-1 П An)} - ...

... +(-1)^n-1\*N(A1 П A2 П ... П An-1 П An).

Метод подсчета числа элементов объединения множеств по этой формуле, состоящий в поочередном сложении и вычитании, называется методом включения и исключения.

3. Метод траекторий.

Для многих комбинаторных задач можно указать такую геометрическую интерпретацию, которая сводит задачу к подсчету числа путей (траекторий), обладающих определенным свойством.

# Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

*Перестановками* называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

Pn = n!,

где n! = 1 \* 2 \* 3 ... n.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 0! = 1.

*Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

Amn = n (n - 1)(n - 2) ... (n - m + 1).

*Сочетаниями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

С mn = n! / (m! (n - m)!).

примеры перестановок, размещений, сочетаний

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

Amn = PmC mn.

З а м е ч а н и е. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n1 элементов одного вида, n2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

Pn (n1, n2, ...) = n! / (n1! n2! ... ),

где n1 + n2 + ... = n.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

## Правило суммы.

Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно m + n способами.

*Суммой* А + В *двух событий* А и В называют событие, состоящее в появлении события А, или события В, или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и А — попадание при первом выстреле, В — попадание при втором выстреле, то А + В — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события А и B — несовместные, то А + В — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

*Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, событие А + В + С состоит в появлении одного из следующих событий: А, В, С, А и В, А и С, В и С, А и В и С.

Пусть события A и В — несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A, либо событие В? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

**Теорема.** *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

Р (А + В) = Р (А) + Р (В).

Доказательство:

Введем обозначения: n — общее число возможных элементарных исходов испытания; m1 — число исходов, благоприятствующих событию A; m2— число исходов, благоприятствующих событию В.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события А, либо события В, равно m1 + m2. Следовательно,

Р (A + В) = (m1 + m2) / n = m1 / n + m2 / n.

Приняв во внимание, что m1 / n = Р (А) и m2 / n = Р (В), окончательно получим

Р (А + В) = Р (А) + Р (В).

**С л е д с т в и е**. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

Р (A1 + A2 + ... + An) = Р (A1) + Р (A2) + ... + Р (An).

Доказательство:

Рассмотрим три события: А, В и С. Так как рассматриваемые события попарно несовместны, то появление одного из трех событий, А, В и С, равносильно наступлению одного из двух событий, A + В и С, поэтому в силу указанной теоремы

Р ( А + В + С) = Р [(А + В) + С] = Р (А + В) + Р (С) = Р (А) + Р (В) + Р (С).

Для произвольного числа попарно несовместных событий доказательство проводится методом математической индукции.

**Полная группа событий.**

**Теорема** *Сумма вероятностей событий* А1 , А2 , ..., Аn , *образующих полную группу, равна единице:*

Р (A1) + Р (А2) + ... + Р (Аn) = 1.

Доказательство:

Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

Р (A1 + A2 + ... + An) = 1.     (\*)

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

Р (А1 + А2 + ... + Аn) = Р (A1) + Р (A2) + ... + Р (Аn).    (\*\*)

Сравнивая (\*) и (\*\*), получим

Р (А1) + Р (А2) + ... + Р (Аn) = 1.

**Противоположные события.**

*Противоположными* называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать



**Теорема.** *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

.



Доказательство базируется на том, что противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (см. Теорему о полной группе событий).

З а м е ч а н и е 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через р, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

p + q = l

З а м е ч а н и е 2. При решении задач на отыскание вероятности события А часто выгодно сначала вычислить вероятность противоположного события, а затем найти искомую вероятность по формуле

.



## Правило произведения.

Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

**Произведение событий.** *Произведением двух событий* А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если А — деталь годная, В — деталь окрашенная, то АВ — деталь годна и окрашена.

*Произведением нескольких событий* называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если А, В, С — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то АВС — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

**Условная вероятность.** Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события В при дополнительном условии, что произошло событие А. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

*Условной вероятностью* РA (В) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Исходя из классического определения вероятности, формулу РA (В) = Р (АВ) / Р (А) (Р (А) > 0 можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

*Условная вероятность* события В при условии, что событие А уже наступило, по определению, равна

РA (В) = Р (АВ) / Р (А)    (Р(A)>0).

Рассмотрим два события: А и В; пусть вероятности Р (А) и РA (В) известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие А и событие В? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

**Теорема.** *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

Р (АВ) = Р (А) РA (В).     (\*)

Доказательство:

По определению условной вероятности,

РA (B) = Р (АВ) / Р (A).

Отсюда

Р (АВ) = Р (А) РA (В).

З а м е ч ан и е. Применив формулу (\*) к событию ВА, получим

Р (ВА) = Р (В) РB (А),

или, поскольку событие ВА не отличается от события АВ,

Р(АВ) = Р (В) РB (А).     (\*\*)

Сравнивая формулы (\*) и (\*\*), заключаем о справедливости равенства

Р (А) РA (В) = Р (В) РB (А).     (\*\*\*)

С л е д с т в и е. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*



где



является вероятностью события An, вычисленной в предположении, что события А1,А2,..., Аn — 1 наступили. В частности, для трех событий

Р (AВС) = Р (А) РA (В) РAB (С).

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Пусть вероятность события В не зависит от появления события А.

Событие В называют независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В, т. е. если условная вероятность события В равна его безусловной вероятности:

РA (В) = Р (В). (\*)

Подставив (\*) в соотношение (\*\*\*) предыдущего параграфа, получим

Р (A) Р (В) = Р (В) РB (A).

Отсюда

РB (A) = Р (A),

т. е. условная вероятность события A в предположении что наступило событие В, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события В.

Итак, если событие В не зависит от события A, то событие A не зависит от события В; это означает, что   с в о й с т в о   н е з а в и с и м о с т и   с о б ы т и й   в з а и м н о.

Для независимых событий теорема умножения Р (АВ) = Р (А) РA (В) имеет вид

Р (АВ) = Р (А) Р (В), (\*\*)

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (\*\*) принимают в качестве определения независимых событий.

*Два события* называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

З а м е ч а н и е 1. Если события А и В независимы, то независимы также события



Действительно,



Следовательно,



Отсюда



т. е. события А и В независимы.  
Независимость событий



является следствием доказанного утверждения.

*Несколько событий* называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события А, В, С попарно независимы, если независимы события А и В, А и С, В и С.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

*Несколько событий называют независимыми в совокупности* (или просто *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A1, A2, А3, независимы в совокупности, то независимы события A1 и А2, А1 и А3, А2 и A3; А1 и A2A3, A2 и A1A3, А3 и A1A2. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Подчеркнем, что если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Поясним сказанное на примере. Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один — в красный цвет (А), один — в синий цвет (В), один — в черный цвет (С) и один — во все эти три цвета (АВС). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то Р(А) = 2 / 4 = 1 / 2. Рассуждая аналогично, найдем Р (В) = 1 / 2, Р (С) = 1/ 2. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие В уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события А? Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события А по-прежнему равна 1 / 2. Другими словами, условная вероятность события А, вычисленная в предположении, что наступило событие В, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события А и В независимы. Аналогично придем к выводу, что события A и С, В и С независимы. Итак, события А, В и С попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события В и С произошли, приходим к выводу, что событие А обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице. Другими словами, условная вероятность РBC (A)= 1 события А не равна его безусловной вероятности Р (А) = 1 / 2. Итак, попарно независимые события А, В, С не являются независимыми в совокупности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

С л е д с т в и е. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

Р (А1А2 ... Аn) = Р (А1) Р (А2) ... Р (Аn).

Доказательство:

Рассмотрим три события: А, В и С. Совмещение событий А, В и С равносильно совмещению событий АВ и С, поэтому

Р (AВС) = Р (АВ \* С).

Так как события А, В и С независимы в совокупности, то независимы, в частности, события АВ и С, а также А и В. По теореме умножения для двух независимых событий имеем:

Р (АВ \* С) = Р (АВ) Р (С) и Р (АВ) = Р (А) Р (В).

Итак, окончательно получим

Р (AВС) = Р (А) Р (В) Р (С).

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции.

З а м е ч а н и е. Если события А1, А2, ..., Аn независимы в совокупности, то и противоположные им события



также независимы в совокупности.

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** *Вероятность появления хотя бы одного из событий А1 , А2 , ..., Аn , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий*



Р (A) = 1 — *q*1*q*2 ... *q*n.(\*)

Доказательство:

Обозначим через А событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А1,А2, ...,An. События А и



(ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:



Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим



или



Ч а с т н ы й   с л у ч а й. *Если события А1 , А2 , ..., Аn имеют одинаковую вероятность, равную р, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий*

P (A) = l — *q*n. (\*\*)