***Интеграл Пуассона.***

Пусть ƒ(*x*) , *g*(*x*) , *x*∈R1 –суммируемые на [-π, π] , 2π- периодические, комплекснозначные функции. Через  *f\*g(x)* будем обозначать свертку

*f\*g(x)*  =dt



Из теоремы Фубини легко следует, что свертка суммируемых функций также суммируема на [-π,π] и

cn ( f\*g ) = cn ( f )⋅ cn ( g ) , n = 0, ±1 , ±2 , ... ( 1 )

где { cn ( f )} -- коэффициенты Фурье функции f ( x ) :

cn = -*i n tdt* , n = 0, ±1, ±2,…



Пусть ƒ ∈ L1 (-π, π ) . Рассмотрим при 0 ≤ r < 1 функцию

ƒr ( x ) = n ( f ) r| n | ei n x , x ∈ [ −π, π ] , ( 2 )



где ряд в правой части равенства (2) сходится равномерно по х для любого фиксированного r , 0 ≤ r < 1 . Коэффициенты Фурье функции ƒr (х) равны

cn ( fr ) = cn ⋅ r| n | , n = 0 , ±1, ±2, … , а это согласно (1) значит, что ƒr ( x ) можно представить в виде свертки :



ƒr ( x ) = , ( 3 )



где

, t ∈ [ −π, π ] . ( 4 )



Функция двух переменных Рr (t) , 0 ≤ r <1 , t ∈ [ −π, π ] , называется ядром Пуассона , а интеграл (3) -- интегралом Пуассона .



Следовательно,

Pr ( t ) = , 0 ≤ r < 1 , t ∈ [ −π, π] . ( 5 )



Если ƒ∈ L1 ( -π, π ) − действительная функция , то , учитывая , что

c-n ( f ) = ‾cn( f ) , n = 0, ±1, ±2,…, из соотношения (2) мы получим :

fr ( x ) =



= , ( 6 )



где

F ( z ) = c0 ( f ) + 2 ( z = reix ) ( 7 )



* аналитическая в единичном круге функция . Равенство (6) показывает, что для любой действительной функции ƒ∈ L1( -π, π ) интегралом Пуассона (3) определяется гармоническая в единичном круге функция

u ( z ) = ƒr (eix ) , z = reix , 0 ≤ r <1 , x ∈ [ -π, π ] .

При этом гармонически сопряженная с u (z) функция v (z) c v (0) = 0 задается формулой

v (z) = Im F (z) = . ( 8 )



*Утверждение1.*

Пусть u (z) - гармоническая ( или аналитическая ) в круге | z | < 1+ε ( ε>0 ) функция и ƒ (x) = u (eix) , x∈[ −π, π ] . Тогда

u (z) = ( z = reix , | z | < 1 ) ( 10 ).



Так как ядро Пуассона Pr (t) - действительная функция, то равенство (10) достаточно проверить в случае, когда u (z) - аналитическая функция:

=, | z | < 1+ ε .



Но тогда



и равенство (10) сразу следует из (2) и (3).

Прежде чем перейти к изучению поведения функции ƒr (*x*) при r→1 , отметим некоторые свойства ядра Пуассона:

а) ;



б) ;



в) для любого δ>0



Соотношения а) и в) сразу следуют из формулы (5), а для доказательства б) достаточно положить в (2) и (3) ƒ (х) ≡ 1.



*Теорема 1.*

Для произвольной (комплекснозначной) функции ( -π, π ) , 1 ≤ p < ∞ , имеет место равенство



;



если же ƒ (x) непрерывна на [ -π, π ] и ƒ (-π) = ƒ (π) , то

.



Доказательство.

В силу (3) и свойства б) ядра Пуассона

( 12 )



Для любой функции , пользуясь неравенством Гельдера и положительностью ядра Пуассона , находим



.



Следовательно,

.



Для данного ε > 0 найдем δ = δ (ε) такое, что . Тогда для r , достаточно близких к единице, мы получим оценку



.



Аналогично второе неравенство вытекает из неравенства

.



Теорема 1 доказана.

Дадим определения понятий "максимальная функция" и "оператор слабого типа", которые понадобятся нам в ходе доказательства следующей теоремы.

*Определение1.*

Пусть функция суммируема на любом интервале (-А, А), А > 0 . Максимальной функцией для функции называется функция



где супремум берется по всем интервалам I , содержащим точку х.

*Определение 2.*

Оператор называется оператором слабого типа (р,р) , если для любого y > 0



.



*Теорема 2 (Фату).*

Пусть - комплекснозначная функция из . Тогда



для п.в. .



Доказательство.

Покажем, что для и



, ( 13 )



где С - абсолютная константа , а M ( *f, x )* - максимальная функция для *f (x)* [[1]](#footnote-1). Для этой цели используем легко выводимую из (5) оценку



(*К -* абсолютная константа).

Пусть - такое число, что



.



Тогда для



.



Неравенство (13) доказано. Используя затем слабый тип (1,1) оператора , найдем такую последовательность функций ,что



,



( 14 )



для п.в. .



Согласно (13) при x∈ (-2π,2π)



Учитывая , что по теореме 1 для каждого x∈ [-π, π] и (14)



Из последней оценки получим

при n→∞.



Теорема 2 доказана.

*Замечание.*

Используя вместо (13) более сильное неравенство (59), которое мы докажем позже, можно показать, что для п.в. x∈ [-π, π] , когда точка reit стремится к eix по некасательному к окружности пути.



1. Мы считаем , что *f (x)* продолжена с сохранением периодичности на отрезок [−2π,2π] (т.е.   
   *f (x) = f (y)* , если *x,y* ∈ [-2π,2π] и *x-y=2π*) и *f (x) = 0* , если |*x*| > 2π .

   

   [↑](#footnote-ref-1)