Рациональные уравнения и неравенства

Содержание

I. Рациональные уравнения.

1. Линейные уравнения.
2. Системы линейных уравнений.
3. Квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
4. Возвратные уравнения.
5. Формула Виета для многочленов высших степеней.
6. Системы уравнений второй степени.
7. Метод введения новых неизвестных при решении уравнений и систем уравнений.
8. Однородные уравнения.
9. Решение симметрических систем уравнений.
10. Уравнения и системы уравнений с параметрами.
11. Графический метод решения систем нелинейных уравнений.
12. Уравнения, содержащие знак модуля.
13. Основные методы решения рациональных уравнений

II. Рациональные неравенства.

1. Свойства равносильных неравенств.
2. Алгебраические неравенства.
3. Метод интервалов.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.
6. Неравенства с параметрами.
7. Системы рациональных неравенств.
8. Графическое решение неравенств.

III. Проверочный тест.

Рациональные уравнения

Функция вида

P(x) = a0xn + a1xn – 1 + a2xn – 2 + … + an – 1x + an,

где n — натуральное, a0, a1,…, an — некоторые действительные числа, называется целой рациональной функцией.

Уравнение вида P(x) = 0, где P(x) — целая рациональная функция, называется целым рациональным уравнением.

Уравнение вида

P1(x) / Q1(x) + P2(x) / Q2(x) + … + Pm(x) / Qm(x) = 0,

где P1(x), P2(x), … ,Pm(x), Q1(x), Q2(x), …, Qm(x) — целые рациональные функции, называется рациональным уравнением.

Решение рационального уравнения P (x) / Q (x) = 0, где P (x) и Q (x) — многочлены (Q (x) ≠ 0), сводится к решению уравнения P (x) = 0 и проверке того, что корни удовлетворяют условию Q (x) ≠ 0.

Линейные уравнения.

Уравнения вида ax+b=0, где a и b — некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Если a≠0, то линейное уравнение имеет единственный корень: x = -b /a.

Если a=0; b≠0, то линейное уравнение решений не имеет.

Если a=0; b=0, то, переписав исходное уравнение в виде ax = -b, легко видеть, что любое x является решением линейного уравнения.

Уравнение прямой имеет вид: y = ax + b.

Если прямая проходит через точку с координатами X0 и Y0, то эти координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е. Y0 = aX0 + b.

Пример 1.1. Решить уравнение

2x – 3 + 4(x – 1) = 5.

Решение. Последовательно раскроем скобки, приведём подобные члены и найдём x: 2x – 3 + 4x – 4 = 5, 2x + 4x = 5 + 4 + 3,

6x = 12, x = 2.

Ответ: 2.

Пример 1.2. Решить уравнение

2x – 3 + 2(x – 1) = 4(x – 1) – 7.

Решение. 2x + 2x – 4x = 3 +2 – 4 – 7, 0x = – 6.

Ответ: ∅.

Пример 1.3. Решить уравнение.

2x + 3 – 6(x – 1) = 4(x – 1) + 5.

Решение. 2x – 6x + 3 + 6 = 4 – 4x + 5,

– 4x + 9 = 9 – 4x,

-4x + 4x = 9 – 9,

0x = 0.

Ответ: Любое число.

**Системы линейных уравнений.**

Уравнение вида

a1x1 + a2x2 + … + anxn = b,

где a1, b1, … ,an, b —некоторые постоянные, называется линейным уравнением с n неизвестными x1, x2, …, xn.

Система уравнений называется линейной, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными. Если система из n неизвестных, то возможны следующие три случая:

1. система не имеет решений;
2. система имеет ровно одно решение;
3. система имеет бесконечно много решений.

Пример 2.4. решить систему уравнений

2x + 3y = 8,

3x + 2y = 7.

Решение. Решить систему линейных уравнений можно способом подстановки, который состоит в том, что какого-либо уравнения системы выражают одно неизвестное через другие неизвестные, а затем подставляют значение этого неизвестного в остальные уравнения.

Из первого уравнения выражаем: x= (8 – 3y) / 2. Подставляем это выражение во второе уравнение и получаем систему уравнений

x = (8 – 3y) / 2,

3(8 – 3y) / 2 + 2y = 7.

Из второго уравнения получаем y = 2. С учётом этого из первого уравнения x = 1.

Ответ: (1; 2).

Пример 2.5. Решить систему уравнений

x + y = 3,

2x + 2y = 7.

Решение. Система не имеет решений, так как два уравнения системы не могут удовлетворяться одновременно (из первого уравнения x + y = 3, а из второго x + y = 3,5).

Ответ: Решений нет.

Пример 2.6. решить систему уравнений

x + y = 5,

2x + 2y = 10.

Решение. Система имеет бесконечно много решений, так как второе уравнение получается из первого путём умножения на 2 (т.е. фактически есть всего одно уравнение с двумя неизвестными).

Ответ: Бесконечно много решений.

Пример 2.7. решить систему уравнений

x + y – z = 2,

2x – y + 4z = 1,

* x + 6y + z = 5.

Решение. При решении систем линейных уравнений удобно пользоваться методом Гаусса, который состоит в преобразовании системы к треугольному виду.

Умножаем первое уравнение системы на – 2 и, складывая полученный результат со вторым уравнением, получаем – 3y + 6z = – 3. Это уравнение можно переписать в виде y – 2z = 1. Складывая первое уравнение с третьим, получаем 7y = 7, или y = 1.

Таким образом, система приобрела треугольный вид

x + y – z = 2,

y – 2z = 1,

y = 1.

Подставляя y = 1 во второе уравнение, находим z = 0. Подставляя y =1 и z = 0 в первое уравнение, находим x = 1.

Ответ: (1; 1; 0).

Пример 2.8. при каких значениях параметра a система уравнений

2x + ay = a + 2,

(a + 1)x + 2ay = 2a + 4

имеет бесконечно много решений?

Решение. Из первого уравнения выражаем x:

x = – (a / 2)y + a / 2 +1.

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

(a + 1)( – (a / 2)y + a / 2 +1) + 2ay = 2a + 4.

Далее умножим обе части уравнения на 2 и упростим его:

(a + 1)(a + 2 – ay) + 4ay = 4a + 8,

4ay – a(a + 1)y = 4(a + 2) – (a + 1)(a + 2),

ya(4 – a – 1 ) = (a + 2)(4 – a – 1),

ya(3 – a) = (a + 2)(3 – a).

Анализируя последнее уравнение, отметим, что при a = 3 оно имеет вид 0y = 0, т.е. оно удовлетворяется при любых значениях y.

Ответ: 3.

Квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.

Уравнение вида ax2 + bx + c = 0, где a, b и c — некоторые числа (a≠0);

x — переменная, называется квадратным уравнением.

**Формула решения квадратного уравнения.**

Сначала разделим обе части уравнения ax2 + bx + c = 0 на a — от этого его корни не изменятся. Для решения получившегося уравнения

x2 + (b / a)x + (c / a) = 0

выделим в левой части полный квадрат

x2 + (b / a) + (c / a) = (x2 + 2(b / 2a)x + (b / 2a)2) – (b / 2a)2 + (c / a) =

= (x + (b / 2a))2 – (b2) / (4a2) + (c / a) = (x + (b / 2a))2 – ((b2 – 4ac) / (4a2)).

Для краткости обозначим выражение (b2 – 4ac) через D. Тогда полученное тождество примет вид

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a))2 – (D / (4a2)).

Возможны три случая:

1. если число D положительно (D > 0), то в этом случае можно извлечь из D квадратный корень и записать D в виде D = (√D)2. Тогда

D / (4a2) = (√D)2 / (2a)2 = (√D / 2a)2, потому тождество принимает вид

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a))2 – (√D / 2a)2.

По формуле разности квадратов выводим отсюда:

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a) – (√D / 2a))(x + (b / 2a) + (√D / 2a)) =

= (x – (( -b + √D) / 2a)) (x – (( – b – √D) / 2a)).

Теорема: Если выполняется тождество

ax2 + bx + c = a(x – x1)(x – x2),

то квадратное уравнение ax2 + bx + c = 0 при X1 ≠ X2 имеет два корня X1 и X2, а при X1 = X2 — лишь один корень X1.

В силу этой теоремы из, выведенного выше, тождества следует, что уравнение

x2 + (b / a)x + (c / a) = 0,

а тем самым и уравнение ax2 + bx + c = 0, имеет два корня:

X1=(-b + √ D) / 2a; X2= (-b - √ D) / 2a.

Таким образом x2 + (b / a)x + (c / a) = (x – x1)(x – x2).

Обычно эти корни записывают одной формулой:

где b2 – 4ac = D.

1. если число D равно нулю (D = 0), то тождество

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a))2 – (D / (4a2))

принимает вид x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a))2.

Отсюда следует, что при D = 0 уравнение ax2 + bx + c = 0 имеет один корень кратности 2: X1 = – b / 2a

3) Если число D отрицательно (D < 0), то – D > 0, и потому выражение

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x + (b / 2a))2 – (D / (4a2))

является суммой двух слагаемых, одно из которых неотрицательно, а другое положительно. Такая сумма не может равняться нулю, поэтому уравнение

x2 + (b / a)x + (c / a) = 0

не имеет действительных корней. Не имеет их и уравнение ax2 + bx + c = 0.

Таким образом, для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант

D = b2 – 4ac.

Если D = 0, то квадратное уравнение имеет единственное решение:

X=-b / (2a).

Если D > 0, то квадратное уравнение имеет два корня:

X1=(-b + √D) / (2a); X2= (-b - √D) / (2a).

Если D < 0, то квадратное уравнение не имеет корней.

Если один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение можно решать, не вычисляя дискриминанта:

1. b = 0; c ≠ 0; c / a <0; X1,2 = ±√(-c / a )
2. b ≠ 0; c = 0; X1 = 0, X2= -b / a.

Корни квадратного уравнения общего вида ax2 + bx + c = 0 находятся по формуле



Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x2 равен 1, называется приведённым. Обычно приведённое квадратное уравнение обозначают так:

x2 + px + q = 0.

**Теорема Виета.**

Мы вывели тождество

x2 + (b / a)x + (c / a) = (x – x1)(x – x2),

где X1 и X2 — корни квадратного уравнения ax2 + bx + c =0. Раскроем скобки в правой части этого тождества.

x2 + (b / a)x + (c / a) = x2 – x1x – x2x + x1x2 = x2 – (x1 + x2)x +x1x2.

Отсюда следует, что X1 + X2 = – b / a и X1X2 = c / a. Мы доказали следующую теорему, впервые установленную французским математиком Ф. Виетом (1540 – 1603):

Теорема 1 (Виета). Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при X, взятому c противоположным знаком и делённому на коэффициент при X2; произведение корней этого уравнения равно свободному члену, делённому на коэффициент при X2.

Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства

X1 + X2 = – b / a и X1X2 = c / a,

то числа X1 и X2 являются корнями квадратного уравнения ax2 + bx + c = 0.

Замечание. Формулы X1 + X2 = – b / a и X1X2 = c / a остаются верными и в случае, когда уравнение ax2 + bx + c = 0 имеет один корень X1 кратности 2, если положить в указанных формулах X2 = X1. Поэтому принято считать, что при D = 0 уравнение ax2 + bx +c = 0 имеет два совпадающих друг с другом корня.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, полезно использовать соотношения

(1 / X1) + (1/ X2)= ( X1 + X2)/ X1X2 ;

X12 + X22 = (X1 + X2)2 – 2 X1X2;

X1 / X2 + X2 / X1 = (X12 + X2 2) / X1X2 = ((X1 + X2)2 – 2X1X2) / X1X2;

X13 + X23 = (X1 + X2)(X12 – X1X2 + X22) =

= (X1 + X2)((X1 + X2)2 – 3X1X2).

Пример 3.9. Решить уравнение 2x2 + 5x – 1 = 0.

Решение. D = 25 – 42(– 1) = 33 >0;

X1 = (- 5 + √33) / 4; X2 = (- 5 -√33) / 4.

Ответ: X1 = (- 5 + √33) / 4; X2 = (- 5 -√33) / 4.

Пример 3.10. Решить уравнение x3 – 5x2 + 6x = 0

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители x(x2 – 5x + 6) = 0,

отсюда x = 0 или x2 – 5x + 6 = 0.

Решая квадратное уравнение, получаем X1 = 2 , X2 = 3.

Ответ: 0; 2; 3.

Пример 3.11.

x3 – 3x + 2 = 0.

Решение. Перепишем уравнение, записав –3x = – x – 2x, x3 – x – 2x + 2 = 0, а теперь группируем

x(x2 – 1) – 2(x – 1) = 0,

(x – 1)(x(x + 1) – 2) = 0,

x – 1 = 0, x1 = 1,

x2 + x – 2 = 0, x2 = – 2, x3 = 1.

Ответ: x1 = x3 = 1, x2 = – 2.

Пример 3.12. Решить уравнение

7(x – 1)(x – 3)(x – 4)

= – 2.

(2x – 7)(x + 2)(x – 6)

Решение. Найдём область допустимых значений x:

X + 2 ≠ 0; x – 6 ≠ 0; 2x – 7 ≠ 0 или x ≠ – 2; x ≠ 6; x ≠ 3,5.

Приводим уравнение к виду (7x – 14)(x2 – 7x + 12) = (14 – 4x)(x2 – 4x – 12), раскрываем скобки.

7x3 – 49x2 + 84x – 14x2 + 98x – 168 + 4x3 – 16x2 – 48x – 14x2 + 56x + 168 = 0,

11x3 – 93x2 + 190x = 0,

x(11x2 – 93x + 190) = 0,

x1 = 0

11x2 – 93x + 190 = 0,

93±√(8649 – 8360) 93 ± 17

x2,3 = = ,

22 22

т.е. x1 = 5; x2 = 38 / 11.

Найденные значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: x1 = 0; x2 = 5; x3 = 38 / 11.

Пример 3.13. Решить уравнение x6 – 5x3 + 4 = 0

Решение. Обозначим y = x3, тогда исходное уравнение принимает вид

y2 – 5y + 4 = 0, решив которое получаем Y1 = 1; Y2 = 4.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности

уравнений: x3 = 1 или x3 = 4, т. е. X1 = 1 или X2 = 3√4

Ответ: 1; 3√4.

Пример 3.14. Решить уравнение (x3 – 27) / (x – 3) = 27

Решение. Разложим числитель на множители (по формуле разности кубов):

(x – 3)(x2 + 3x + 9) / (x – 3) = 27 . Отсюда:

x2 + 3 x + 9 = 27,

x – 3 ≠ 0;

x2 + 3 x – 18 = 0,

x ≠ 3.

Квадратное уравнение x2 + 3 x – 18 = 0 имеет корни X1 = 3; X2 = -6

(X1 не входит в область допустимых значений).

Ответ: -6

Пример 3.15. Решить уравнение

(x2 + x –5) / x + (3x) / (x2 + x – 5) = 4.

Решение. Обозначим y= (x2 + x – 5) / x, тогда получаем уравнение y + 3 / y = 4.

Преобразуем его: y + 3 / y – 4 = 0, (y2 – 4y + 3) / y = 0, отсюда

y2 – 4y + 3 = 0,

y ≠ 0

Квадратное уравнение y2 – 4y + 3 = 0 имеет корни Y1 = 1; Y2 = 3 (оба корня входят в область допустимых значений).

Таким образом корни, исходное уравнение эквивалентно (равносильно) совокупности уравнений

(x2 + x – 5) / x = 1 или (x2 + x – 5) / x = 3.

Преобразуем их:

(x2 + x – 5) / x – 1 = 0 или (x2 + x – 5) / x – 3 = 0;

x2 – 5 = 0,

x ≠ 0

или

x2 – 2x – 5 = 0,

x ≠ 0;

X1 = √5; X2 = – √5 или X3 = 1 + √6; X4 = 1 – √6

(все найденные корни уравнения входят в область допустимых значений).

Ответ: √5; – √5; 1 + √6; 1 – √6 .

Пример 3.16. Решить уравнение x(x + 2)(x + 3)(x + 5) = 72.

Решение. Перегруппируем сомножители и преобразуем полученное уравнение

(x + 2)(x + 3)(x + 5)x = 72, (x2 + 5x + 6)(x2 + 5x) = 72.

Обозначим y = x2 + 5x, тогда получим уравнение (y + 6)y = 72, или

y2 + 6y – 72 = 0.

Корни этого уравнения: Y1 = 6; Y2 = – 12.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

x2 + 5x = 6 или x2 + 5x = – 12.

Первое уравнение имеет корни X1 = 1; X2 = – 6. Второе уравнение корней не имеет, так как D = 26 – 48 = – 23 < 0.

Ответ: – 6; 1.

Пример 3.17. Решить уравнение 4x2 + 12x + 12 / x + 4 / x2 = 47.

Решение. Сгруппируем слагаемые: 4(x2 + 1 / (x2)) + 12(x + 1 / x) = 47.

Обозначим y = x + 1 / x, при этом заметим, что

y2 = (x +1 / x)2 = x2 +2 + 1 / (x2),

отсюда x2 + 1 / (x2) = y2 – 2. С учётом этого получаем уравнение

4(y2 – 2) + 12y = 47, или 4y2 + 12y - 55 = 0.

Это квадратное уравнение имеет корни Y1 = 5 / 2; Y2 = – 11 / 2.

Исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

x + 1 / x = 5 / 2 или x + 1 / x = – 11 / 2.

Решим их:

x + 1 / x – 5 /2 = 0 или x + 1 / x + 11 / 2 = 0;

2x2 – 5x + 2 = 0,

x ≠ 0

или

2x2 + 11x + 2 = 0,

x ≠ 0;

X1 = 2; X2 = 1 / 2 или X3 = ( - 11 + √105) / 4; X4 = ( -11 - √105) / 4

(все найденные корни уравнения входят в область допустимых значений).

Ответ: 2; 0,5; ( - 11 + √105) / 4; (-11 - √105) / 4.

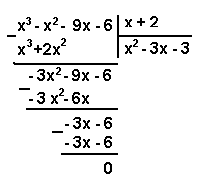
Пример 3.18. Решить уравнение x3 – x2 – 9x – 6 = 0.

Решение. Угадаем хотя бы один корень данного уравнения. “Кандидатами” в целочисленные корни (а только их есть надежда отгадать) являются числа

±1, ±2, ±3, ±6.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что X = -2 является его корнем.

Разделим многочлен x3 – x2 – 9x – 6 на двучлен x + 2



x3 – x2 – 9x – 6 = (x + 2)(x2 – 3x – 3) = 0.

Решив теперь уравнение x2 – 3x – 3 = 0,

получаем X2 = (3 - √21) / 2, X3 = (3 + √21) / 2.

Ответ: x∈ {-2; (3 - √21) / 2; (3 + √21) / 2}.

Пример 3.19.

x3 – x2 – 8x + 6 = 0.

Решение. Здесь an = 1, a0 = 6. Поэтому, если данное уравнение имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: ±1, ±2, ±3, ±6. Проверкой убеждаемся, что x = 3, т.к. 27 – 9 – 24 + 6 = 0.

Делим (x3 – x2 – 8x + 6) на (x – 3)

Получаем: x3 – x2 – 8x + 6 = (x – 3)(x2 + 2x – 2), т.е. данное уравнение можно представить в виде (x – 3)(x2 + 2x – 2) = 0. Отсюда находим, что x1 = 3 — решение, найденное подбором, x2,3 = – 1 ± √3 — из уравнения x2 + 2x – 2 = 0.

Ответ: x1 = 3; x2,3 = – 1 ± √3.

Пример 3.20.

4x4 + 8x3 + x2 – 3x – 1 = 0.

Решение. Здесь an = 4, a0 = –1. Поэтому рациональные корни уравнения следует искать среди чисел: ± 1; ± 0,5; ± 0,25 (делители 4 есть ±1; ±2; ±4, делители (– 1) есть ± 1). Если x = +1, то 4 + 8 + 1 – 3 – 1 ≠ 0; если x = – 0,5, то

4 / 16 – 8 / 8 + 1 / 4 + 3 / 2 – 1 = 0, т.е. x = – 0,5 корень уравнения. Делим

(4x4 + 8x3 + x2 – 3x – 1) на (x + 0,5):

Данное уравнение можно представить в виде: (x + 0,5)(4x3 + 6x2 – 2x – 2) = 0.

Отсюда x1 = – 0,5 (решение, найденное подбором) и 4x3 + 6x2 – 2x – 2 = 0, т.е. 2x3 + 3x2 – x – 1 = 0. Аналогично находим корень этого уравнения: x = – 0,5. Снова делим.

Имеем: (x + 0,5)(2x2 + 2x – 2) = 0. Отсюда x2 = – 0,5 и x3,4 = (– 1 ± √5) / 2.

Ответ: x1 = x2 = – 0,5; x3,4 = (– 1 ± √5) / 2.

Замечание: зная, что x = – 0,5, можно не заниматься делением, а просто выделить за скобки множитель (x + 0,5). Из 2x3 + 3x2 – x – 1 = 0 следует:

2x3 + 3x2 – x – 1 = 2x3 + x2 +2x2 + x – 2x – 1 = 2x2(x + 0,5) + 2x(x + 0,5) – 2(x+0,5) =

= (x +2)(2x2 + 2x – 2) = 0.

x1 = – 0,5; x3,4 = (– 1 ± √5) / 2.

**Возвратные уравнения.**

Уравнение вида

anxn + an – 1 xn – 1 + … +a1x + a0 = 0

называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, равны, то есть если

an – 1 = ak, при k = 0, 1, …, n.

Рассмотрим возвратное уравнение четвёртой степени вида

ax4 + bx3 + cx2 + bx + a = 0,

где a, b и c — некоторые числа, причём a ≠ 0. Его удобно решать с помощью следующего алгоритма:

* разделить левую и правую части уравнения на x2. При этом не происходит потери решения, так как x = 0 не является корнем исходного уравнения при a ≠ 0;
* группировкой привести полученное уравнение к виду

a(x2 + 1 / x2) + b(x + 1 / x) + c = 0;

* ввести новую переменную t = x + 1 / x, тогда выполнено

t2 = x2 + 2 + 1 / x2, то есть x2 + 1 / x2 = t2 – 2;

в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным:

at2 + bt + c – 2a = 0;

* решить его относительно t, возвратиться к исходной переменной.

Для возвратных уравнений более высоких степеней верны следующие утверждения.

Возвратное уравнение чётной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени подстановкой

x + 1 / x = t.

Возвратное уравнение нечётной степени обязательно имеет корень x= -1 и после деления многочлена, стоящего в левой части этого уравнения, на двучлен x + 1, приводится к возвратному уравнению чётной степени.

Пример 4.21. Рассмотрим, например, возвратное уравнение пятой степени

ax5 + bx4 + cx3 + cx2 + bx + a = 0

Легко видеть, что x = – 1 является корнем этого уравнения, а потому по теореме Безу многочлен в левой части уравнения делится на x + 1. В результате такого деления получится возвратное уравнение четвёртой степени.

Довольно часто в процессе решения задач вступительных экзаменов возникают рациональные уравнения степени выше второй, которые не удаётся решить с помощью очевидной замены переменной. В этом случае попытайтесь отгадать какой-нибудь корень уравнения. Если попытка окажется успешной, то Вы воспользуетесь следствием 1 теоремы Безу и понизите на единицу степень исходного уравнения. “Кандидатов” в корни многочлена с целочисленными коэффициентами следует искать среди делителей свободного члена этого многочлена. Если же попытка угадать корни не удалась, то, возможно, Вы избрали “не тот” метод решения, и существует иной метод, реализация которого не требует решения уравнения третьей или большей степени.

Формулы Виета для многочленов высших степеней.

Пусть многочлен P (x) = a0xn + a1xn – 1 + … + an

имеет n различных корней X1, X2, …, Xn. В этом случае он имеет разложение на множители вида

a0xn + a1xn – 1 + … + an = a0(x – x1)(x – x2)…(x – xn).

Разделим обе части этого равенства на a0 ≠ 0 и раскроем скобки. Получим равенство

Xn + (a1 / a0)xn – 1 + … + (an / a0) =

= xn – (x1 + x2 + … +xn)xn – 1 + (x1x2 +x1x3 + … +xn-1xn)xn – 2 +

+ … + (-1)nx1x2…xn.

Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняются равенства

x1 + x2 + … + xn = -a1 / a0,

x1x2 + x1x3 + … + xn – 1xn = a2 / a0,

…………………….

x1x2⋅ … ⋅xn = (-1)nan / a0­.

Пример 5.22. Напишем кубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней уравнения x3 – 3x2 + 7x + 5 = 0.

Решение. Обозначим корни заданного уравнения через x1, x2 и x3. Тогда по формулам Виета имеем

σ1 = x1 + x2 +x3 = 3,

σ2 = x1x2 + x1x3 + x2x3 = 7,

σ3 = x1x2x3 = – 5.

Корни искомого уравнения обозначим буквами y1, y2, y3, а его коэффициенты — буквами b1, b2, b3, положив коэффициент при y3 равным 1. По условию должны выполняться равенства y1 = x12, y2 = x22, y3 = x32 и поэтому

b1 = – (y1 + y2 + y3) = – (x12 + x22 + x32),

b2 = y1y2 + y1y3 + y2y3 = x12x22 + x12x32 + x22x32,

b3 = – y1y2y3 = – x12x22x32 .

Но имеем

x12 + x22 + x32 = (x1 + x2 +x3)2 – 2(x1x2 + x1x3 + x2x3) = σ12 - 2σ2 = 32 – 2⋅7 = – 5,

x12x22 + x12x32 + x22x32 = (x1x2 + x1x3 + x2x3)2 – 2x1x2x3(x1 + x2 +x3)= σ22 – 2σ1σ3 = = 72 – 2⋅3⋅(– 5)= 79,

x12x22x32 = (x1x2x3)2 = σ32 = 25.

Значит, b1 = 5, b2 = 79, b3 = – 25, и потому искомое уравнение имеет вид

y3 + 5y2 + 79y – 25 = 0.

Ответ: y3 + 5y2 + 79y – 25 = 0.

Системы уравнений второй степени.

В простейших случаях при решении систем уравнений второй степени удаётся выразить одно неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение.

При решении систем уравнений второй степени часто используется также способ замены переменных.

Пример 6.23. Среди решений (x; y) системы найти то, для которого сумма (x + y) максимальна. Вычислить значение этой суммы.

2x + y = 7,

xy = 6.

Решение. Из первого уравнения получаем y = 7 – 2x. Подставляя значение y во второе уравнение, получаем систему уравнений

y = 7 – 2x,

7x – 2x2 = 6.

Квадратное уравнение – 2x2 + 7x – 6 = 0 имеет корни X1 = 2; X2 = 3 / 2. Из первого уравнения получаем Y1 = 3; Y2 = 4.

Решения имеют вид (2; 3) и (1,5; 4). Наибольшая сумма x + y = 1,5 + 4 = 5,5.

Ответ: 5,5.

Пример 6.24. Решить систему уравнений

x + y + 2xy = 7,

xy + 2(x + y) = 8.

Решение. Обозначим a = x + y; b = xy.

Получаем систему уравнений

a + 2b = 7,

b + 2a = 8

или

a = 7 – 2b,

b + 14 – 4b = 8.

Отсюда

a = 3,

b = 2.

Возвращаясь к переменным x и y, получаем

x + y = 3,

xy = 2.

Решив эту систему:

x = 3 – y,

(3 – y)y = 2;

y2 – 3y + 2 = 0, Y1 = 1; X1 = 2; Y2 = 2; X2 = 1.

Ответ: (2; 1) , (1; 2).

Пример 6.25. Решить систему уравнений

y2 – xy = 12,

x2 – xy = – 3.

Решение. Разложим левые части уравнений на множители:

y(y – x) = 12,

x(x – y) = – 3.

Выразив из второго уравнения (x ≠ 0) x – y = – 3 / x, т.е. y – x = 3 / x, и подставив его в первое уравнение, получим

y / x = 4,

x(x – y) = – 3, откуда

y = 4x,

x(x – y) = – 3.

Подставив значение y во второе уравнение последней системы, имеем

- 3x2 = – 3, X1 = 1; X2 = – 1, тогда Y1 = 4; Y2 = – 4.

Ответ: (1; 4), (– 1; – 4).

Пример 6.26. Решим задачу.

Задача. Найдём длины сторон прямоугольника, если его периметр равен 16 м, а площадь равна 15 м2.

Решение. Обозначим длины сторон прямоугольника буквами х и у. По условию задачи должны выполнятся равенства 2х + 2у = 16, т.е. х + у = 8 и ху = 15

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений

х + у = 8,

ху = 15,

т.е. к отысканию значений х и у, подстановка которых в оба уравнения системы обращает их в верные числовые равенства.

Из первого уравнения находим, что у = 8 – у. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем х(8 − у) = 15, т.е. 8х − х2 = 15 или

х2 − 8х + 15 = 0.

Решим это уравнение: D = (−8)2 − 4⋅1⋅15 = 64 − 60 = 4,

Х1,2 = (8 ± √4) / 2 = (8 ± 2) / 2.

Значит, х1 = 5, х2 = 3. Поскольку у = 8 − х, то получаем у1 = 3, а у2 = 5. В обоих случаях получаем один и тот же прямоугольник, длины сторон которого равны 3 м и 5 м.

Замечание: уравнение х2 − 8х + 15 = 0 можно вывести быстрее, используя теорему, обратную теореме Виета: так как сумма чисел х и у равна 8, а их произведение равно 15, то эти числа являются корнями уравнения z2 − 8z + 15 = 0.

Рассмотрим системы, состоящие из двух уравнений с двумя неизвестными. Если в одно из них какое−нибудь неизвестное входит лишь в первой степени, то из этого уравнения можно выразить это неизвестное через другое и подставить полученное выражение во второе уравнение системы. Получится уравнение с одним неизвестным. Решая его, находим значения этого неизвестного, а потом по ним находим значения оставшегося неизвестного.

Пример 6.27. Решим систему уравнений

2х + у = 11,

х2 + у2 = 53.

Решение. Из первого уравнения находим, что у = 11 − 2х. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем: х2 + (11 − 2х)2 = 53.

Раскроем скобки и приведём подобные члены:

х2 + 121 − 44х + 4х2 = 53

и потому 5х2 − 44х + 68 = 0. Значит, для нахождения х надо решить уравнение

5х2 − 44х + 68 = 0.

Решая его, находим D = (−44)2 − 4⋅5⋅68 = 1936 − 1360 = 576,

Х1,2 = (44 ± 24) / 10.

Итак х1 = 6,8; х2 = 2, ⇒ у1 = 11 − 2⋅6,8 = −2,6; у2 = 11 − 2⋅2 = 7.

Ответ: х1 = 6,8; у1 = −2,6; х2 = 2; у2 = 7.

Метод введения новых неизвестных при решении уравнений и систем уравнений.

При решении биквадратных и возвратных уравнений мы вводили новые неизвестные (у = х2 для биквадратных уравнений и у = х + 1 / х для возвратных уравнений). Введение новых неизвестных применяется также при решении уравнений иного вида и систем уравнений.

Пример 7.28. Решим уравнение 12 / (х2 + 2х) − 3 / (х2 + 2х − 2) = 1.

Решение. Если попробовать привести дробь в левой части уравнения к одному знаменателю, то получим уравнение четвёртой степени, которое мы умеем решать. Чтобы решить заданное уравнение, заметим, что в обе дроби входит одно и то же выражение х2 + 2х. Поэтому введём новое неизвестное у, положив, что у = х2 + 2х. Тогда уравнение примет вид

12 / у − 3 / (у − 2) = 1 или (у2 − 11у + 24) / (у(у − 2)) = 0,

откуда y1 = 3; y2 = 8. Осталось решить уравнения х2 + 2х = 3 (его корни х1 = 1, х2 = −3) и х2 + 2х = 8 (его корни х3 = 2, х4 = −4).

Применённый метод называется методом введения новых неизвестных, и его полезно применять, когда неизвестное входит в уравнение всюду в виде одной и той же комбинации (особенно если эта комбинация содержит степени неизвестного выше первой).

Пример 7.29. Решим систему уравнений

2 / х + 3 / у = 8,

5 / х − 2 / у = 1.

Решение. Обозначим 1 / х через U, а 1 / у через V. Тогда система примет вид

2U + 3V = 8,

5U − 2V = 1,

т.е. получится система двух линейных уравнений с двумя неизвестными U и V. Из первого уравнения выражаем U через V: U = 4 − 3V / 2, и подставляя во второе: 5(4 − 3V / 2) −2V = 1, откуда V = 2. Теперь находим U = 1 и решаем уравнения 1 / x = 1, 1 / y = 2.

Ответ: x = 1, y = 0,5.

Пример 7.30.

(x – 4)(x – 5)(x – 6)(x – 7) = 1680.

Решение. (x – 4)(x – 7)⋅(x – 5)(x – 6) = 1680, т.е.

(x2 – 11x + 28)(x2 – 11x + 30) = 1680.

Обозначим x2 – 11x + 28 = t, тогда t(t + 2) = 1680, t2 + 2t – 1680 = 0, t1 = – 42; t2 = 40. Поэтому

x2 – 11x + 28 = – 42; x2 – 11x + 70 = 0; D = 121 – 280 < 0 ⇒ x1,2 ∈ ∅.

x2 – 11x + 28 = 40; x2 – 11x – 12 = 0; x1 = 12; x2 = – 1.

Ответ: x1 = 12; x2 = – 1.

Пример 7.31.

2x4 + 3x3 – 16x2 + 3x + 2 = 0.

Решение. Это возвратное уравнение. Разделим обе части уравнения на x2 ≠ 0, получим

2x2 + 3x – 16 +3 / x + 2 / x2 = 0, т.е.

2(x2 + 1 / x2) + 3(x + 1 / x) – 16 = 0,

обозначим x + 1 / x = t, тогда x2 + 2 + 1 / x2 = t2, т.е. x2 + 1 / x2 = t2 – 2, получаем 2(t2 – 2) + 3t – 16=0, т.е. 2t2 + 3t – 20 = 0, t1 = – 4; t2 = 5 / 2 = 2,5. Следовательно, имеем

x + 1 / x = – 4; x2 + 4x + 1 = 0; x1,2 = –2 ± √3,

x + 1 / x = 2,5; 2x2 – 5x + 2 = 0; x3 = 2; x4 = 1 / 2.

Ответ: x1,2 = –2 ± √3; x3 = 2; x4 = 1 / 2.

Пример 7.32.

(x + 3)4 + (x + 5)4 = 16.

Решение. Сделаем подстановку x = t – 4. Тогда получаем (t – 1)4 + (t + 1)4 = 16, т.е.

t4 – 4t3 + 6t2 – 4t + 1 + t4 + 4t3 + 6t2 + 4t + 1 = 16,

т.е. 2t4 + 12t2 – 14 = 0, или t4 + 6t2 – 7 = 0. Положим t2 = z ≥ 0, тогда

z2 +6z – 7 = 0, z1 = – 7; z2 = 1.

С учётом t2 = z ≥ 0 отбрасываем z1. Итак, z = 1, т.е. t2 = 1, отсюда t1 = –1; t2 = 1. Следовательно, x1 = – 1 – 4 = – 5 и x2 = 1 – 4 = – 3.

Ответ: x1 = – 5 и x2 = – 3.

Пример 7.33.

13x / (2x2 + x +3) + 2x / (2x2 – 5x + 3) = 6.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дробей на x ≠ 0:

13 / (2x + 1 + 3 / x) + 2 / (2x – 5 +3 / x) = 6,

обозначим 2x + 3 /x = t. Получаем 13 / (t + 1) + 2 / (t – 5) = 6, т.е.

13t – 65 + 2t + 2 = 6t2 – 24t – 30, т.е.

6t2 – 39t + 33 = 0, т.е. 2t2 – 13t + 11 = 0,

t1 = 1; t2 = 5,5.

Следовательно:

2x + 3 / x = 1; 2x2 – x + 3 = 0; D = 1 – 24 < 0 ⇒ x ∈ ∅.

2x + 3 / x = 5,5; 4x2 – 11x + 6 = 0; x1 = 2; x2 = 0,75.

Ответ: x1 = 2; x2 = 0,75.

Пример 7.34.

x4 – 2x3 + x – 0,75 = 0.

Решение. Выделим полный квадрат, прибавив и вычтя в левой части уравнения x2:

x4 – 2x3 + x2 – x2 + x – 0,75 = 0, т.е.

(x2 – x)2 – (x2 – x) – 0,75 = 0.

Пусть x2 – x = t, тогда t2 – t – 0,75 = 0, x1 = – 0,5; x2 = 1,5.

Возвращаясь к старой переменной, получаем:

x2 – x = – 0,5; x2 – x + 0,5 = 0; D = 1 – 2 < 0 ⇒ x ∈ ∅.

x2 – x = 1,5; x2 – x – 1,5 = 0; x1,2 = (1 ± √7) / 2.

Ответ: x1,2 = (1 ± √7) / 2.

Пример 7.35.

x2 + 81x2 / (9 + x)2 = 40.

Решение. Воспользуемся формулой: a2 + b2 = (a – b)2 + 2ab ((a − b)2 = a2 − 2ab + b2⇒ ⇒ a2 + b2 = (a − b)2 + 2ab). Получаем:

(x – 9x / (9 + x))2 + 2x⋅9x / (9 + x) = 40, или

(x2 / (9 + x))2 + 18x2 / (9 + x) = 40.

Пусть: (x2 / (9 + x)) = t. Тогда t2 + 18t – 40 = 0, t1 = – 20; t2 = 2. Получаем два уравнения:

(x2 / (9 + x)) = 2; x2 – 2x – 18 = 0; x1,2 = 1 ± √19,

(x2 / (9 + x)) = – 20; x2 + 20x + 180 = 0; D = 400 – 720 < 0, ⇒ x ∈ ∅.

Ответ: x1,2 = 1 ± √19.

Однородные уравнения.

Пример 8.36. Решим систему уравнений

8х2 − 6ху + у2 = 0,

х2 + у2 = 5.

Решение. заметим, что для решения системы выполняется условие у ≠ 0. В самом деле, из первого уравнения следует, что если у = 0, то и х = 0, а числа х = 0 и у = 0 не удовлетворяют второму уравнению системы. Разделим первое уравнение на у2. Получится уравнение

8х2 / у2 − 6ху / у2 + у2 / у2 = 0 или 8х2 / у2 − 6х / у + 1 = 0.

Введём вспомогательное неизвестное U = х / у. Уравнение примет вид

8U2 − 6U + 1 = 0.

Это квадратное уравнение, имеющее корни U1 = 0,5; U2 = 0,25. Таким образом, из первого уравнения мы получаем что либо x / y = 1 / 2, либо x / y = 1 / 4. Осталось подставить выражения у =2х и у = 4х (рассмотрев оба случая) во второе уравнение системы. В первом случае получается уравнение 5х2 = 5, откуда х1 = 1, х2 = − 1; соответственно у1 = 2, у2 = − 2. Во втором случае получается уравнение17х2 = 5, откуда х3 = √(5 / 17), x4 = −√(5 / 17); соответственно y3 = 4√(5 / 17), y4 = − 4√(5 /17).

Первое уравнение системы нам удалось представить как уравнение относительно x / y благодаря тому, что степень всех членов, входящих слагаемыми в это уравнение (8x2, 6xy, y2), одна и та же — она равна двум. Поэтому после деления на y2 каждое слагаемое выразилось через x / y.

Многочлен от двух переменных x и y такой, что степень каждого его члена равна одному и тому же числу k, называется однородным многочленом степени k.

Уравнение вида P (x, y) = 0 называется однородным уравнением степени k относительно x и y, если P (x, y) — однородный многочлен степени k. Однородное уравнение относительно x и y делением на yk (если y = 0 не является корнем уравнения) превращается в уравнение относительно неизвестного x / y. Это свойство однородного уравнения помогает решать многие задачи.

Пример 8.37. Решить систему уравнений

y2 − xy = −12,

x2 − xy = 28.

Решение. Ни одно из уравнений системы не является однородным. Но если умножить первое уравнение на 7 и прибавить к нему почленно второе уравнение, умноженное на 3, то получится уравнение 7y2 − 10xy + 3x2 = 0, являющееся следствием исходной системы. Разделим обе части уравнения на x2 и решим уравнение 7U2 − 10U + 3 = 0 (здесь U = y / x, причём из второго уравнения системы следует, что x ≠ 0). Находим, что y = x или y = 3x / 7. Подставляя это выражение во второе уравнение и, рассмотрев оба случая, найдём решения:

x1 = 7, y1 = 3; x2 = −7, y2 = −3.

Ответ: x1 = 7, y1 = 3; x2 = −7, y2 = −3.

Мы получили решения системы путём выведения из заданных уравнений вспомогательного следствия. Такой способ решения систем в некоторых случаях приводит к появлению “посторонних” корней — значений x и y, не удовлетворяющих исходной системе. Поэтому найденные корни надо проверить, подставив их исходную систему и убедившись, что уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Пример 8.38. Решим уравнение (x − 1)4 + 9(x + 1)4 = 10(x2 − 1)2.

Решение. Если раскрыть все скобки и привести подобные члены, то получится уравнение четвёртой степени. Попробуем другой путь: введём новые неизвестные U и V:

U = (x − 1)2, V = (x + 1)2.

Уравнение примет вид U2 + 9V2 = 10UV.

Это уравнение однородное, и после деления на V2 оно становится уравнением относительно неизвестного W:

W = U / V = (x − 1)2 / (x + 1)2.

Решим вспомогательное уравнение

W2 − 10W + 9 = 0.

Его корни W1 = 1, W2 = 9. Осталось решить уравнения

(x − 1)2 / (x + 1)2 = 1 и (x − 1)2 / (x + 1)2 = 9.

Из первого уравнения следует, что либо (x − 1) / (x + 1) = 1, либо (x − 1) / (x + 1) = −1.

Из второго получаем, что либо (x − 1) / (x + 1) = 3, либо (x − 1) / (x + 1) = −3. Решая получившиеся уравнения, видим, что первое из них не имеет корней, а из трёх остальных получаем x1 = 0, x2 = − 2, x3 = −0,5.

Ответ: x1 = 0, x2 = − 2, x3 = −0,5.

Пример 8.39.

3(x2 – x + 1)2 – 5(x + 1)(x2 – x + 1) – 2(x + 1)2 = 0.

Решение. Это так называемое однородное уравнение, т.е. уравнение вида

ay2α + byαzα + cz2α = 0,

где a, b, c, α — заданные числа, отличные от нуля; y = y(x), z = z(x) — некоторые функции от x. Разделим обе части уравнения на (x2 – x + 1)2 ≠ 0:

3 – 5(x + 1) / (x2 – x + 1) – 2((x + 1) / (x2 – x + 1))2 = 0.

Пусть (x + 1) / (x2 – x + 1) = t, тогда 3 – 5t – 2t2 = 0, т.е. t1 = – 3; t2 = 0,5. Следовательно:

(x + 1) / (x2 – x + 1) = 0,5 = 1 / 2; 2x + 2 = x2 – x + 1; x2 – 3x – 1 = 0; x1,2 = (3 ± √13) / 2,

(x + 1) / (x2 – x + 1) = – 3; x + 1 = – 3x2 + 3x – 3; 3x2 – 2x + 4 = 0; D = 4 – 48 < 0, ⇒ x ∈ ∅.

Ответ: x1,2 = (3 ± √13) / 2.

Решение симметрических систем уравнений.

Напомним, что многочлен P (x, y) называется симметрическим, если P (x , y) = P (y, x).

При решении систем уравнений вида

P1 (x, y) = 0,

P2 (x, y) = 0,

где P1 (x, y) и P2 (x, y) — симметрические многочлены, полезной оказывается такая замена неизвестных: x + y = U, xy = V. Напомним, что любой симметрический многочлен P (x, y) можно представить как выражение от U и V.

Пример 9.40. Решить систему уравнений

x2 + xy + y2 = 49,

x + y + xy = 23.

Решение. Заметим, что:

x2 + xy + y2 = x2 + 2xy + y2 − xy = (x + y)2 − xy.

Сделаем замену неизвестных: x + y = U, xy =V. Система примет вид:

U2 − V = 49,

U + V = 23.

Сложив эти уравнения, получим уравнение U2 + U − 72 = 0 с корнями U1 = 8,U2 = −9. Соответственно V1 = 15, V2 = 32. Остаётся решить системы уравнений:

x + y = 8,

xy = 15,

x + y = − 9,

xy = 32.

Система x + y = 8, имеет решения: x1 = 3, y1 = 5; x2 = 5, y2 = 3.

xy = 15.

Система x + y = − 9, действительных решений не имеет.

xy = 32.

Ответ: x1 = 3, y1 = 5; x2 = 5, y2 = 3.

Пример 9.41. Решить систему

1 / x + 1 / y = 5,

1 / x2 + 1 / y2 = 13.

Решение. Сначала введём неизвестные X и Y:

X = 1 / x, Y = 1 / y,

а затем U и V: U = X + Y = 1 / x + 1 / y, V = XY = 1 / xy.

Получается система:

U = 5,

U2 − 2V = 13,

из которой U = 5, V = 6. Далее решая систему

X + Y = 5,

XY = 6,

находим X1 = 2, Y1 = 3; X2 = 3, Y2 = 2, откуда получаем x1 = 1 / 2, y1 = 1 / 3; x2 = 1 /3, y2 = 1 / 2. Можно сразу ввести неизвестные U = x + y, V = xy, получится система

U = 5V,

U2 − 2V = 13V2,

Приводящая к тем же решениям исходной системы.

Ответ: x1 = 1 / 2, y1 = 1 / 3; x2 = 1 /3, y2 = 1 / 2.

Уравнения и системы уравнений с параметрами.

Иногда в уравнениях некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения, т.е. одно уравнения с параметрами задаёт множество уравнений (для всех возможных значений параметров).

Например, линейное уравнение ax + b = c с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a, b, и c. Его решением при a ≠ 0 является x = (c − b) / a. Если a = 0, то получается “уравнение” b = c, и если действительно b = c, то корнями данного уравнения являются все действительные числа. Если же b ≠ c, при этом a = 0, то данное уравнение корней не имеет.

Так, с параметрами учащиеся встречаются при введении некоторых понятий. Не приводя подробных определений, рассмотрим случай в качестве примеров следующие объекты:

* функция прямая пропорциональность: y = kx (x и y — переменные; k — параметр,k ≠ 0);
* линейная функция: y = kx + b (x и у — переменные, k и b —параметры);
* линейное уравнение: ax + b = 0 (x — переменная; a и b —параметры);
* уравнение первой степени: ax + b = 0 (x — переменная; a и b — параметры, a ≠ 0);
* квадратное уравнение: ax2 + bx + c = 0 (x — переменная; a, b и c — параметры, a ≠ 0).

Решить уравнение с параметрами означает следующее:

1. исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров.
2. Найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Ответ к задаче “решить уравнение с параметрами” должен выглядеть следующим образом: уравнение при таких−то значениях параметров имеет корни …, при таких−то значениях параметров — корни …, при остальных значениях параметров уравнение корней не имеет.

Пример 10.42. Решим уравнение px = 6 с неизвестным x и параметром p. Если p ≠ 0, то можно разделить обе части уравнения на p, и тогда мы находим корень уравнения x = 6 /p. Если p = 0, то уравнение корней не имеет, потому что 0⋅x = 0 для любого x.

Ответ: при p ≠ 0 уравнение имеет единственный корень x = 6 / p; при p = 0 уравнение корней не имеет.

Пример 10.43. Сравнить: −a и 3a.

Решение. Естественно рассмотреть три случая:

Если a < 0, то −a > 3a;

Если a = 0, то −a = 3a;

Если a > 0, то −a < 3a.

Пример 10.44. Решить уравнения ax = 1.

Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: x = 1 / a. Однако при a = 0 данное уравнение решений не имеет, и верный ответ выглядит так:

Ответ: Если a = 0, то нет решений; если a ≠ 0, то x = 1 / a.

Пример 10.45. Решить уравнение (a2 − 1)x = a + 1.

Решение. Нетрудно сообразить, что при решении этого уравнения достачно рассмотреть такие случаи:

1. a = 1; тогда уравнение принимает вил 0x = 2 и не имеет решений;
2. a = −1; получаем 0x = 0, и очевидно x — любое.
3. a ≠ ±1; имеем x = 1 / (a − 1).

Сделаем одно замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы “ветвится” в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа — это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

В только что разобранном примере запись ответа практически повторяет решение. Тем не менее, мы считаем целесобразным привести

Ответ: Если a = −1, то x — любое число; a = 1, то нет решений; если a ≠ ±1, то x = 1 / (a − 1).

Пример 10.46. При каких a уравнение ax2 − x + 3 = 0 имеет единственное решение?

Решение. Прежде всего обратим внимание на распространённую ошибку: считать исходное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени, не выше второй. Пользуясь этим соображением, естественно начать решение, рассмотрев случай, когда a = 0, то очевидно данное уравнение имеет единственное решение. Если же a ≠ 0, то имеем дело с квадратным уравнением. Его дискриминант 1 − 12a принимает значение, равное нулю, при a = 1 / 12.

Ответ: a = 0 или a = 1 / 12.

Пример 10.47. при каких a уравнение (a − 2)x2 + (4 − 2a)x + 3 = 0 имеет единственное решение?

Решение. Понятно, что надо начинать со случая a = 2. Но при a = 2 исходное уравнение вообще не имеет решений. Если a ≠ 2, то данное уравнение — квадратное, и, казалось бы, искомые значения параметра — это корни дискриминанта. Однако дискриминант обращается в нуль при a = 2 или a = 5. Поскольку мы установили, что a = 2 не подходит, то

Ответ: a = 5.

Вероятно, в двух последних примерах ничего сложного нет (тем более, ели они уже решены). Однако, на наш взгляд, параметр в этих задачах проявляет своё “коварство”, особенно для начинающих. Поэтому полезно рассмотреть ещё несколько примеров, где параметр “расставляет ловушки”.

Пример 10.48. При каких значениях a уравнение ax2 + 4x + a + 3 = 0 имеет более одного корня?

Решение. При a = 0 уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию. При a≠0 исходное уравнение, будучи квадратным, имеет два корня, если его дискриминант 16 − 4a2 − 12a — положительный. Отсюда получаем −4 < a < 1. Однако в полученный промежуток (−4; 1) входит число 0, которое, как мы уже проверили, неприемлемо.

Ответ: −4 < a < 0 или 0 < a < 1.

Пример 10.49. При каких a уравнение a(a + 3)x2 + (2a + 6)x − 3a − 9 = 0 имеет более одного корня?

Решение. Стандартный шаг — начать со случаев a = 0 и a = −3. При a = 0 уравнение имеет единственное решение. Любопытно, что при a = −3 решением уравнения служит любое действительное число. При a = −3 решением уравнения служит любое действительное число. При a ≠ −3 и a ≠ 0, разделив обе части данного уравнения на a + 3, получим квадратное уравнение ax2 + 2x − 3 = 0, дискриминант которого 4(1 + 3a) положителен при a > −1 / 3. Опыт предыдущих примеров подсказывает, что из промежутка (−1 / 3; ∞) надо исключить точку a = 0, а в ответ не забыть включить a = −3.

Ответ: a = −3 или −1 / 3 < a < 0, или a > 0.

Пример 10.50. При каких значениях a уравнение (x2 − ax + 1) / (x + 3) = 0 имеет единственное решение?

Решение. Данное уравнение равносильно системе

x2 − ax + 1 = 0,

x ≠ −3.

Наличие квадратного уравнения и условие единственности решения, естественно приведут к поиску корней дискриминанта. Вместе с тем условие x ≠ −3 должно привлечь внимание. И “тонкий момент” заключается в том, что квадратное уравнение системы может иметь два корня! Но обязательно только один из них должен равняться −3. Имеем D = a2 − 4, отсюда D = 0, если a = ±2; x = −3 — корень уравнения x2 − ax + 1 = 0 при a = −10 / 3, причём при таком значении a второй корень квадратного уравнения отличен от −3.

Ответ: a = ±2 или a = − 10 / 3.

Пример 10.51. При каких a уравнение ax2 = a2 равносильно неравенству

|x − 3| ≥ a?

Решение. При a ≠ 0 уравнение имеет единственное решение, а неравенство — бесконечно много. Если a = 0, то решением как уравнения, так и неравенства является всё множество действительных чисел. Следовательно, требованию задачи удовлетворяет только a = 0.

Ответ: a = 0.

Пример 10.52. Решить уравнение с параметрами

(a2 − 9)x = a2 + 2a − 3.

Решение. Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра. Запишем уравнение в виде:

(a − 3)(a + 3)x = (a + 3)(a − 1).

Если a = −3, то уравнение принимает вид: 0x = 0. Отсюда следует, что при x ∈ R, т.е. решением уравнения является любое действительное число. Если a ≠ −3, то уравнение принимает вид: (a −3)x = a −1.При a = 3 имеем 0x = 2. Уравнение решения не имеет. При a ≠ −3 имеем x = (a − 1) / (a − 3). Уравнение имеет единственное решение (например, x = 3 при a = 4, x = 3 / 5 при a= − 2 и т.д.)

Ответ: a = −3, x ∈ R; a = 3, x ∈ ∅; a ≠ ±3, x = (a − 1) / (a − 3).

Пример 10.53.

(x − 4) / (x + 1) − 1 / a(x + 1) = −2 / a.

Решение. Очевидно, (x + 1)a ≠ 0, т.е. x ≠ −1, a ≠ 0. Преобразуем данное уравнение, умножив обе его части на a(x + 1) ≠ 0:

(x − 4)a − 1 = −2(x + 1), т.е. (a + 2)x = 4a −1.

Если a = −2, то имеем 0х = −9. Следовательно, x∈ ∅. Если a ≠ −2, то x = (4a +1) / (a + 2). Но, как мы уже отметили, x ≠ −1. Поэтому надо проверить, нет ли таких значений a при которых найденное значение x равно −1.

(4a − 1) / (a + 2) = −1, т.е. 4a − 1 = −a − 2, т.е. 5a = −1, a= −1 / 5.

Значит, при a ≠ 0, a ≠ −2, a ≠ −1 / 5 уравнение имеет единственное решение (4a − 1) / (a + 2).

Ответ: x ∈ ∅ при a ∈ {−2, 0, −1 / 5}; x = (4a − 1) / (a + 2) при a∉ {−2, 0, −1 / 5}.

Пример 10.54.

(a − 5)x2 + 3ax − (a − 5) = 0.

Решение. При (a − 5) = 0, т.е. a = 5 имеем 15x − 0 = 0, т.е. x = 0. При a − 5 ≠ 0, т.е. a ≠ 5 уравнение имеет корни

X1,2 = (−3a ± √(9a2 + 4(a − 5)2)) / (2(a − 5)).

Ответ: x = 0 при a = 5; x = (−3a ± √(9a2 + 4(a − 5)2)) / (2(a − 5)) при a ≠ 5.

Пример 10.55.

1 / (x − 1) + 1 / (x − a) = (a + 1) / a.

Решение. Отмечаем, что a(x − 1)(x − a) ≠ 0, т.е. x ≠ 1, x ≠ a, a ≠ 0. При этих условиях данное уравнение после упрощений принимает вид

(a + 1)x2 − (a2 + 4a + 1)x + (2a2 + 2a) = 0.

Если a +1 = 0, т.е. a = −1, имеем, 2x = 0, т.е. x = 0.

Если a + 1 ≠ 0, т.е. a ≠ −1, то находим, что

x1,2 = (a2 + 4a + 1 ± √(a4 + 2a2 + 1)) / (2(a +1) = (a2 + 4a + 1 ± (a2 + 1) ) / (2(a + 1))

т.е. x1 = a + 1, x2 = 2a / (a + 1). Найдём значения a, при которых x = 1 и x = a, чтобы исключить их.

a + 1 = 1 ⇒ a = 0 — недопустимо по условию;

a + 1 = a ⇒ 1 = 0 — невозможно;

2 / (a + 1) = 1 ⇒ 2a = a + 1, т.е. a = 1;

2 / (a + 1) = a ⇒ 2a = a2 + a, a = 1 и a = 0 — недопустимо.

Итак, если a ≠ −1, a ≠ 0, a ≠ 1, то x1 = a + 1, x2 = 2a / (a + 1).

Теперь рассмотрим, что происходит с уравнением при a = 1. Найдём корни уравнения: x1 = 1 и x2 = 2, причём x1 = 1 не подходит по условию. Теперь выписываем

Ответ: x1 = a + 1 и x2 = 2 при a ≠ 0, a ≠ ±1; x = 0 при a = −1; x = 2 при a = 1.

Пример 10.56. При каких значениях a система уравнений

axy + x − y + 1,5 = 0,

x + 2y + xy + 1 = 0.

Имеет единственное решение?

Решение. Умножим второе уравнение на a и вычтем его из первого уравнения. Получаем равносильную систему

axy + x − y + 1,5 − ax − 2ay −axy − a = 0,

x + 2y + xy + 1 = 0, т.е.

(1 − a)x − (2a + 1)y + 1,5 − a = 0,

x + 2y + xy + 1

1. Если a = 1, то −3y + 0,5 = 0, т.е. y = 1 /6. Подставив это значение во второе уравнение, находим единственное значение x. Система имеет единственное решение.
2. Если a = −0,5, то система имеет единственное решение.
3. При остальных значениях a сведём систему к квадратному уравнению; из первого уравнения системы находим

y = ((1 − a)x + 1,5 − a) / (2a + 1),

подставляем во второе уравнение:

x + ((2 − 2a)x + 3 − 2a) / (2a + 1) + ((1 − a)x2 + 1,5x − ax) / (2a + 1) +1 = 0, т.е.

2ax + 3x −2ax + 3 −2a + x2 − ax2 +1,5x − ax + 2a + 1 = 0,

(1 − a)x2 + (4,5 − a)x + 4 = 0.

Уравнение имеет единственное решение в том случае, когда дискриминант равен нулю:

(9 / 2 − a)2 − 4⋅ 4(1 − a) = 0, т.е. a2 + 7a + 17 / 4 = 0, т.е. a = (−7 ± 4√2) / 2.

Ответ: a = 1, a = −1 / 2, a = (−7 ± 4√2) / 2.

Пример 10.57.

x3 – (a + b + c)x2 + (ab + ac + bc)x – abc =0.

Решение. x3 – ax2 – bx2 – cx2 + abx + acx +bcx – abc = 0,

группируем: x2(x – a) – bx(x – a) – cx(x – a) – cx(x – a) + bc(x – a),

(x – a)(x2 – bc – cx + bc).

(x – a) = 0,

x1 = a.

x2 – bc – cx + bc = 0,

x(x – b) – c(x – b) = 0,

(x – b)(x – c) = 0,

x – b = 0, x2 = b

x – c = 0, x3 = c.

Ответ: x1 = a; x2 = b; x3 = c.

Замечание: корни уравнения можно было легко найти, пользуясь теоремой Виета для кубического уравнения:

если x3 + px2 + qx + r = 0, то

x1 + x2 + x3 = - p,

x1x2 + x1x3 + x2x3 = q,

x1x2x3 = - r .

В нашем случае:

x1 + x2 + x3 = a + b + c,

x1x2 + x1x3 + x2x3 = ab + bc +cd,

x1x2x3 = abc.

Отсюда следует, что x1 = a; x2 = b; x3 = c.

Графический метод решения систем нелинейных уравнений.

Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными можно решать графически. Для этого нужно начертить графики обоих уравнений и найти координаты точек их пересечения. Нам уже известны графики следующих уравнений:

1. ax + by + c = 0 — прямая линия.
2. xy = k — гипербола.
3. (x − a)2 + (y − b)2 = R2 — уравнение окружности с центром A(a, b) и радиусом R.

К этому виду приводятся с помощью выделения полных квадратов уравнения вида:

x2 + y2 − 2ax − 2by + c = 0.

1. ax2 + bx + c = 0 — парабола y = ax2  c вершиной в точке A(m, n), где m = −b / 2a, а n = (4ac − b2) / 4a.

Пример 11.58. Найдём графически корни системы:

x2 + y2 − 2x + 4y − 20 = 0,

2x − y = −1.

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:

x2 + y2 − 2x + 4y − 20 = (x2 − 2x +1) + (y2 + 4y + 4) −1 − 4 − 20 = (x − 1)2 + (y + 2)2 − 25.

Значит, систему уравнений можно записать так:

(x − 1)2 + (y + 2)2 = 25,

2x − y = −1.

Графиком первого уравнения является окружность с центром A(1; −2) и радиусом 5. А 2x − y = − 1 — уравнение прямой, проходящей через точки B(0; 1) и C(2; 5). Строим окружность радиуса 5 с центром в точке A и проводим прямую через точки B и C. Эти линии пересекаются в двух точках M(1; 3) и N(−3; −5). Значит решение системы таково: x1 = 1, y1 = 3; x2 = −3, y2 = −5.

Y

*C*

***5***

M

B

X

*0*

***2***

A

***−***2

*N*

Уравнения содержащие знак модуля.

Два числа, модули которых равны, либо равны между собой, либо отличаются лишь знаком: если |a| = |b|, то либо a = b, либо a = −b. Применим это замечание к решению уравнения

|3x − 1| = |2x + 3|.

В силу сказанного выше из этого уравнения вытекает, что либо 3х − 1 = 2х + 3, либо 3х − 1 = −(2х + 3). Корнем первого уравнения является число 4, а второго — число −2 / 5. Итак, решение уравнения имеет вид х1 = 4, х2 = −2 / 5.

В других случаях бывает полезно сначала установить, в каких точках обращаются в нуль выражения, стоящие под знаком модуля. Эти точки разбивают числовую ось на промежутки, внутри которых выражения сохраняют постоянный знак (промежутки знакопостоянства). Это позволяет освободиться на каждом из таких промежутков от знака модуля и свести задачу к решению нескольких уравнений — по одному на каждом промежутке.

При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов. Напомним, что

f (x), если f (x) ≥ 0,

| f (x) | =

– f (x), если f (x) < 0.

Пример 12.59. Решим уравнение.

|x| = |3 − 2x| − x − 1.

Решение. Выражение x обращается в нуль при x = 0, а выражение 3 − 2x — при x = 3 / 2. Точки 0 и 3 / 2 разбивают числовую ось на промежутки (−∞; 0),[0; 3 / 2], (3 / 2; ∞). При −∞ < x < 0 имеем x < 0 и 3 − 2x > 0. Поэтому на этом промежутке |x| = − x, |3 − 2x| = 3 − 2x и уравнение принимает вид −x = 3 − 2x − x − 1. Решая его, получаем, что x = 1. Но это значение x не лежит на (−∞; 0), и потому на этом промежутке уравнение корней не имеет. При 0 ≤ x ≤ 3/ 2 имеем x ≥ 0, 3 − 2x ≥ 0, поэтому |x| = x, |3 − 2x| = 3 − 2x. И уравнение принимает вид x = 3 − 2x − x − 1. Решая его, находим x = 0,5. Так как это значение x принадлежит промежутку [0; 3 / 2], то 1 / 2 является корнем заданного уравнения. Наконец, на промежутке (3 / 2; +∞) имеем x > 0, 3 − 2x < 0, а потому |x| = x, |3 − 2x| = −(3 − 2x) и уравнение принимает вид x = −(3 − 2x) − x − 1, т.е. 0 = − 4. Значит, на этом промежутке нет корней заданного уравнения.

Мы получили, таким образом, что уравнение имеет лишь один корень, а именно x = 0,5.

Ответ: x = 0,5.

В некоторых случаях уравнение со знаком модуля имеет бесконечно много решений.

Пример 12.60. |8 − 5x| = |3 + x| + |5 −6x|.

Выражения (8 − 5x), (3 + x) и (5 − 6x) обращаются в нуль соответственно в точках 8 /5, −3, 5 / 6. Эти точки разбивают числовую ось на 4 промежутка. При этом, в ходе решения, устанавливаем, что на промежутках (−∞; −3), (5 / 6; 8 /5], (8 / 5; +∞) уравнение корней не имеет, а на промежутке [−3; 5 / 6] оно обращается в тождество 8 − 5x = 3 + x + 5 − 6x. Поэтому ответ имеет вид [−3; 5 / 6].

Ответ: [−3; 5/ 6].

Несколько сложнее решаются уравнения, в которых встречается знак модуля под знаком модуля. Однако и в этом случае метод разбиения оси на промежутки знакопостоянства позволяет решить уравнение.

Пример 12.61. Решим уравнение |2x − 3 − |x + 2|| = 8x + 12.

Решение. Выражение (x + 2) обращается в нуль при x = −2. Если x < −2, то (x + 2) < 0 и потому |x + 2| = −(x + 2). Значит, на промежутке (−∞; − 2) заданное уравнение принимает вид |2x − 3 + (x + 2)| = 8x + 12, т.е. |3x − 1| = 8x + 12. Но при x < −2 имеем 3x − 1 < 0 и потому |3x − 1| = − (3x − 1). Получаем уравнение −(3x − 1) = 8x + 12, имеющее корень x = −1. Так как это число не лежит на промежутке (−∞; − 2), то заданное уравнение не имеет на это промежутке корней.

Пусть теперь x ≥ − 2. Тогда |x + 2| = x + 2, и мы получаем уравнение |2x − 3 − (x + 2)| =8x + 12, т.е. |x − 5| = 8x + 12. Здесь надо рассмотреть два случая: x < 5 и x ≥ 5. В первом случае ⏐x − 5| = −(х − 5), и потому получаем уравнение −(x − 5) = 8x + 12. Его корень равен −7 / 9. Поскольку −2 ≤ (−7 / 9) ≤ 5, то −7 / 9 является корнем заданного уравнения. Если же x ≥ 5, то |x − 5| = x − 5 и уравнение принимает вид x − 5 = 8x + 12. Корнем полученного уравнения является число −17 / 7. Поскольку оно не лежит на луче [5; +∞), оно не является корнем заданного уравнения. Итак, решение имеет вид x = − 7 / 9.

Ответ: x = −7 / 9.

Пример 12.62.

|1 – 2x| + |3x + 2| + |x| = 5.

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнения в каждом из полученных интервалов:

***X***

0,5

– 2 / 3

0

А) если x < – 2 / 3, то 1 – 2x > 0, 3x + 2 < 0, x < 0 и уравнение переписывается так:

1 – 2x – 3x – 2 – x = 5, т.е. – 6x = 6, x = – 1 ∈(–∞; – 2 / 3).

Б) если – 2 / 3 ≤ x < 0, то 1 – 2x > 0, 3x + 2 ≥ 0, x < 0 и поэтому имеем:

1 – 2x + 3x + 2 – x = 5, и т.к. 3 ≠ 5, то в промежутке [– 2 / 3; 0) корней нет.

В) если 0 ≤ x < 0,5, то получаем: 1 – 2x + 3x + 2 + x = 5, т.е. 2x = 2; x = 1 ∉[0; 0,5).

Г) если 0,5 ≤ x, то – 1 +2x + 3x + 2 + x = 5, 6x = 4, x = 2 / 3 ∈(0,5; ∞).

Ответ: x1 = – 1; x2 = 2 / 3.

Пример 12.63.

| x | + | x – 1 | = 1.

Решение. (x – 1) = 0, x = 1; ⇒ получаем интервалы:

X

0

1

A) x ∈(−∞; 0), тогда – x – x +1 = 1; – 2x = 0; x = 0 ∉(−∞; 0).

Б) x ∈[0; 1), тогда x – x +1 = 1; 1 = 1 ⇒ x — любое число из [0; 1).

В) x ∈[1; ∞), тогда x + x – 1 = 1; 2x = 2; x = 1 ∈[1; ∞).

Ответ: x ∈[0; 1].

Основные методы решения рациональных уравнений.

1) Простейшие: решаются путём обычных упрощений — приведение к общему знаменателю, приведение подобных членов и так далее. Квадратные уравнения ax2 + bx + c = 0 решаются по выведенной нами формуле



Также используется теорема Виета: x1 + x2 = – b / a; x1x2 = c / a.

2) Группировка: путём группировки слагаемых, применения формул сокращённого умножения привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких сомножителей, а справа — ноль. Затем приравниваем к нулю каждый из сомножителей.

3) Подстановка: ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно обозначить. Например, уравнение

(x2 + x – 5) / x + 3x / (x2 + x – 5) + 4 = 0,

легко решается с помощью подстановки (x2 + x – 5) / x = t, получаем t + (3 / t) + 4 = 0.

Или: 21 / (x2 – 4x + 10) – x2 + 4x = 6. Здесь можно сделать подстановку x2 – 4 = t. Тогда 21 / (t + 10) - t = 6 и т.д.

В более сложных случаях подстановка видна лишь после нескольких преобразований. Например, дано уравнение

(x2 + 2x)2 – (x +1)2 = 55.

Переписав его иначе, а именно (x2 + 2x)2 – (x2 + 2x + 1) = 55, сразу увидим подстановку x2 + 2x=t.

Имеем t2 – t – 56 = 0, t1 = – 7, t2 = 8. Осталось решить x2 + 2x = – 7 и x2 + 2x = 8.

В ряде других случаев удобную подстановку желательно знать “заранее”. Например

1. Уравнение (x + a)4 + (x + b)4 = c сводится к биквадратному, если сделать подстановку

x = t – (a + b) / 2.

1. Симметрическое уравнение (возвратное) a0xn + a1xn – 1 + … + a1x + a0 = 0 (коэффициенты членов, равностоящих от концов, равны) решается с помощью подстановки x + 1 / x = t, если n —чётное; если n — нечётное, то уравнение имеет корень x = – 1.
2. Уравнение вида (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = l сводится к квадратному, если a + b = c + d и т.д.

4) Подбор: при решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения anxn + an – 1xn – 1 + …+ a1x + a0 = 0 ищем в виде p / q, где p — делитель a0, q — делитель an, p и q взаимно просты, p∈Z, q∈N.

5) “Искусство”, т.е. решать пример нестандартно, придумать “свой метод”, догадаться что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д.

6) Уравнения с модулем: при решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов. Напомним, что

f (x), если f (x) ≥ 0,

| f (x) | =

– f (x), если f (x) < 0.

Рациональные неравенства.

Пусть ƒ(χ) ⎯ числовая функция одного или нескольких переменных (аргументов). Решить неравенство

ƒ(χ) < 0 (ƒ(χ) > 0) (1)

⎯ это значит найти все значения аргумента (аргументов) функции ƒ, при которых неравенство (1) справедливо. Множество всех значении аргумента (аргументов) функции ƒ, при которых неравенство (1) справедливо, называется множеством решении неравенства или просто решением неравенства.

Множество решении нестрого неравенства

ƒ(χ) ≤ 0 (ƒ(χ) ≥ 0) (2)

представляет собой объединение множества решении неравенства (1) и множества решении уравнения ƒ(χ) = 0.

Два неравенства считаются эквивалентными, если множества их решении совпадают.

Под множеством допустимых значении неизвестных, входящих в неравенство, понимают область определения функции ƒ(χ).

Неравенства вида (1) или (2), составленные для различных функции ƒi(χ), могут быть сведены в систему неравенств. Решить систему неравенств ⎯ это значит найти множество всех значении аргументов функции ƒi(χ), при которых справедливы все неравенства системы одновременно.

Говорят, что системы неравенств эквивалентны, если множества их решении совпадают.

Свойства равносильных неравенств.

При решении неравенств используют свойства равносильности.

Неравенства с одной переменной называются равносильными, если множества их решении совпадают.

Например, неравенства 3х > 6 и х – 2 > 0 имеют одинаковые множества решении х∈[2; +∞]. Эти неравенства – равносильные.

Неравенства х > 0 и х2 > 0 – неравносильные, так как решение первого неравенства есть множество х∈[0; +∞], а решение второго неравенства есть множество х∈[-∞; 0]∪[0; +∞]. Эти множества не совпадают.

При решении неравенств выполняются только такие преобразования, при которых получаются более простые равносильные неравенства. Эти преобразования возможны при выполнении следующих свойств равносильных неравенств.

Свойство 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, которое имеет смысл при всех значениях переменной, то получим неравенство, равносильное данному.

Дано. Р(х) > Q(x) – неравенство, Т(х) – выражение, которое имеет смысл при всех действительных значениях х, х∈R.

Доказать. Неравенства Р(х) > Q(x) и Р(х) + Т(х) > Q(x) + T(x) – равносильные.

Доказательство. а) Пусть при х = а неравенство Р(а) > Q(a) – верное числовое равенство, т.е. х =а – одно из решении неравенства Р(х) > Q(x), Т(а) – значение Т(х) при х =а.

По свойству числовых неравенств Р(а) + Т(а) > Q(a) + T(a) – верное числовое неравенство.

Следовательно, х = а – одно из решений неравенства Р(х) + Т(х) > Q(x) + T(x). Поэтому, если х =а есть решение первого неравенства, то это значение есть также решение второго неравенства.

б) Пусть х = b – одно из решений неравенства Р(х) + Т(х) > Q(x) + T(x), т.е. P(b) + T(b) > Q(b) + T(b) –верное числовое неравенство. По свойству числовых неравенств P(b) > Q(b) – тоже верное числовое неравенство. Следовательно, х = b – решение неравенства P(x) > Q(x).

Так как множества решений неравенства P(x) > Q(x) и P(x) + T(x) > > Q(x) + T(x) совпадают, то эти неравенства равносильные.

Свойство 2. Если в неравенстве любое слагаемое, которое имеет смысл при вех х∈R, перенести из одно части в другую с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильно данному.

Дано. P(x) + T(x) > Q(x) – неравенство, Т(х) – слагаемое, которое имеет смысл при всех х∈R.

Доказать. Неравенства P(x) + T(x) > Q(x) и P(x) > Q(x) – T(x) – равносильные.

Доказательство. По свойству 1 можно к обеим частям неравенства P(x) + T(x) > Q(x) прибавить слагаемое (-Т(х)), так как это слагаемое имеет смысл при всех х∈R; получим равносильное неравенство:

P(x) + T(x) – T(x) > Q(x) – T(x), отсюда P(x) > Q(x) – T(x).

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или на одно и то же выражение, положительное при всех значениях переменной, то получим неравенство, равносильное данному.

Дано. P(x) > Q(x) – неравенство (1),

T(x) > 0, x∈R,

P(x)⋅T(x) > Q(x)⋅T(x) – неравенство (2).

Доказать. Неравенства (1) и (2) равносильные.

Доказательство. Пусть при х = а P(a) > Q(a) – верное числовое неравенство, т.е. х = а – одно из решении первого неравенства. T(a) – значение Т(х) при х = а Т(а) > 0.

По свойству числовых неравенств P(a)⋅T(a) > Q(a)⋅T(a) – тоже верное числовое неравенство, т.е. х = а –одно из решении первого неравенства. Следовательно, если х= а – решение первого неравенства, то х = а – также решение второго неравенства.

Пусть при х = b неравенство P(b)⋅T(b) > Q(b)⋅T(b) – верное числовое неравенство, т.е. х = b – одно из решении второго неравенства.

По свойству числовых неравенств P(b) > Q(b) – тоже верное числовое неравенство, так как T(b) > 0. Следовательно, х = b – одно из решении первого неравенства.

Поскольку множества решении первого и второго неравенств совпадают, то они равносильные.

Свойство 4. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или на одно и то же выражение, отрицательное при всех значениях переменной, и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Это свойство доказывается аналогично 3 свойству.

Алгебраические неравенства.

Линейными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b ≥ 0, ax + b ≤ 0, a ≠ 0,

решениями которых будут:

при a > 0

x∈(- ; ∞ ), x∈( -∞; - ), x∈[ - ; ∞ ), x∈( -∞; - ],

при а < 0

x∈( -∞; - ), x∈( - ; ∞ ), x∈( -∞; - ], x∈[ - ; ∞ ).

Квадратными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

ax2 + bx + c > 0, ax2 + bx + c < 0,

ax2 + bx + c ≥ 0, ax2 + bx + c ≤ 0,

где a, b, c ⎯ некоторые действительные числа и а ≠ 0.

Квадратное неравенство ax2 + bx + c > 0 в зависимости от значении своих коэффициентов a, b и c имеет решения:

при а > 0 и D = b2 – 4ac ≥ 0

x∈( -∞; )∪(; ∞);



при а > 0 и D < 0 x ⎯ любое действительное число;

при а < 0 и D ≥ 0

x∈( ; );

при а < 0 и D < 0

x = ∅ (т. е. решении нет ).

Решение неравенства ax2 + bx + c < 0 сводится к решению рассмотренного неравенства, если обе части неравенства умножить на (-1).

Метод интервалов.

Пусть Рn(x) ⎯ многочлен n-й степени с действительными коэффициентами, а c1, c2, … , ci ⎯ все действительные корни многочлена с кратностями k1, k2, … , ki соответственно, причем с1 > c2 > … > ci. Многочлен Pn(x) можно представить в виде

Рn(x) = (x - c1)k1(x - c2)k2 … (x – ci)ki Qm(x), (3)

где многочлен Qm(x) действительных корней не имеет и либо положителен, либо отрицателен при всех х∈R. Положим для определенности, что Qm(x) > 0. Тогда при х > c1 все сомножители в разложении (3) положительны и Рn(х) > 0. Если с1 ⎯ корень нечетной кратности (k1 ⎯ нечетное), то при х∈(с2; с1) все сомножители в разложении (3), за исключением первого, положительны и Рn(х)<0. В этом случае говорят, что многочлен Рn(х) меняет знак при переходе через корень с1. Если же с1 ⎯ корень четной кратности (k1 ⎯ четное), то все сомножители (в том числе и первый) при х∈(с2; с1) положительны и, следовательно, Рn(х) > 0 при х∈(c2; с1). В этом случае говорят, что многочлен Рn(х) не меняет знак при переходе через корень с1.

Аналогичным способом, используя разложение (3), нетрудно убедится, что при переходе через корень с2 многочлен Рn(х) меняет знак, если k2 ⎯ нечетное, и не меняет знака, если k2 ⎯ четное. Рассмотренное свойство многочленов используется для решения неравенств методом интервалов. Для того чтобы найти все решения

Рn(х) > 0, (4)

достаточно знать все действительные корни многочлена Рn(х) их кратности и знак многочлена Рn(х) в произвольно выбранной точке, не совпадающей с корнем многочлена.

Пример: Решить неравенство

х4 + 3х3 – 4х > 0. (\*)

Решение. Разложим на множители многочлен Р4(х), стоящий в левой части неравенства (\*). Вынося множитель х за скобку, получаем

Р4(х) = х(х3 + 3х2 – 4).

Второй сомножитель, представляющий собой кубический многочлен, имеет корень х = 1. Следовательно, он может быть представлен в виде

х3 + 3х2 – 4 = (х-1)(х2 + 4х + 4) = (х-1)(х + 2)2.

Таким образом, Р4(х) = х(х - 1)(х + 2)2 и неравенство (\*) может быть записано в виде

х(х –1)(х + 2)2 > 0. (\*\*)

Решим неравенство (\*\*) методом интервалов. При х > 1 все сомножители, стоящие в левой части неравенства, положительны.

Будем двигаться по оси Ох справа налево. При переходе через точку х = 1 многочлен Р4(х) меняет знак и принимает отрицательные значения, так как х = 1 ⎯ простой корень (корень кратности 1); при переходе через точку х = 0 многочлен также меняет знак и принимает положительные значения, так как х = 0 ⎯ также простой корень; при переходе через точку х = -2 многочлен знака не меняет, так как х = -2 ⎯ корень кратности 2. Промежутки знакопостоянства многочлена Р4(х) схематически представлены на рис 1. Используя этот рисунок, легко выписать множество решений исходного неравенства.

•

-2

•

0

•

1

***x***

+

+

⎯

+

Рис. 1

Ответ. х ∈ (-∞; -2) ∪ (-2; 0) ∪ (1; ∞).

Пример: Решить неравенство

(х2 – 3х – 2)(х2 – 3х + 1) < 10.

Решение: Пусть х2 – 3х – 2 = y. Тогда неравенство примет вид y(y +3) < 10, или y2 + 3y – 10 < 0, откуда (y + 5)(y – 2) < 0. Решением этого неравенства служит интервал –5<y<2. Таким образом, получаем систему неравенств

x2 – 3x – 2 < 2, x2 – 3x – 4 < 0,

или

x2 – 3x –2 > -5, x2 – 3x + 3 > 0,

откуда

(x – 4)(x + 1) < 0,

(x + )2 + > 0.

Поскольку второе неравенство выполняется при всех х, решение этой системы есть интервал (-1; 4).

Ответ: (-1; 4).

Пример: Решить неравенство

х4 – 34х2 + 225 < 0.

Решение. Сначала решим биквадратное уравнение х4 – 34х2 + 225 < 0. Полагая х2 = z, получаем квадратное уравнение z2 – 34z + 225 = 0, из которого находим: z1 = 9 и z2 = 25. Решая уравнения х2 = 9 и х2 = 25, получаем 4 корня биквадратного уравнения: -3, 3, -5, 5. Значит, х4 – 34х2 + 225 = (х + 5)(х + 3)(х – 3)(х – 5), и поэтому заданное неравенство иммет вид:

(х + 5)(х + 3)(х – 3)(х – 5) < 0.

-5

5

3

-3

⎯

***x***

+

+

**+**

**⎯**

**⎯**

Изображаем на координатной прямой точки –5, -3, 3, 5 и проводим кривую знаков. Решение неравенства является объединение интервалов (-5; -3) и (3; 5).

Ответ: (-5; -3)∪(3; 5).

Пример: Решить неравенство

х4 – 3 < 2х(2х2 – х – 2).

Решение. Дано целое рациональное неравенство. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем многочлен к стандартному виду. Получим равносильное неравенство

х4 – 4х3 + 2х2 + 4х – 3 < 0.

Решая уравнение х4 – 4х3 + 2х2 + 4х – 3 = 0, находим корни х1 = -1, х2,3 = 1, х4 = 3. Тогда неравенство можно переписать в виде

(х – 1) 2(х + 1)(х – 3) < 0.

Найденные корни разбивают числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых левая часть неравенства, а значит, и исходного неравенства сохраняет знак. Выбирая пробные точки в каждом из промежутков (достаточно значения х подставлять только в последний два сомножителя), получаем знаки, указанные на рисунке. Видим, что неравенство выполняется на промежутках (-1; 1) и (1; 3).

3

***x***

+

+

1

-1

**⎯**

**⎯**

Так как неравенство строгое, то числа –1, 1, 3 не входят в решение неравенства.

Ответ: (-1; 1)∪(1; 3).

Дробно-рациональные неравенства.

Решение рационального неравенства

> 0 (5)

где Рn(х) и Qm(х) ⎯ многочлены, сводится к решению эквивалентного неравенства (4) следующим образом: умножив обе части неравенства (5) на многочлен [Qm(x)]2, который положителен при всех допустимых значениях неизвестного х (т.е. при тех х, при которых Qm(x) ≠ 0), получим неравенство

Рn(х) ⋅ Qm(x) > 0,

эквивалентное неравенству (5).

Дробно-линейным называется неравенство вида

> k

(6)

где a, b, c, d, k ⎯ некоторые действительные числа и с ≠ 0, (если с = 0, то дробно-линейное неравенство превращается в линейное, неравенство (6) не содержит аргумента). К дробно-линейным неравенствам относятся и неравенства вида (6), где вместо знака > стоят знаки <, ≥, ≤. Решение дробно-линейного неравенства сводится к решению квадратного неравенства. Для этого необходимо умножить обе части неравенства (6) на выражение (сх + d)2, положительное при всех х∈R и x ≠ -d/c.

Пример: Решить неравенство

< -1.

Решение: Прибавляя к обеим частям неравенства 1, получим неравенство вида (5).

< 0,

которое эквивалентно неравенству

х2(х2 – х – 2) < 0.

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов: х∈( -1;0)∪(0;2).

Ответ: х∈(-1;0)∪(0;2).

Пример: Решить неравенство

≤ .

Решение: Перенеся все члены неравенства в левую часть, получим

- - ≤ 0, или ≤ 0, откуда ≤ 0.

Пользуясь методом интервалов и учитывая знак неравенства, заключаем, что решением неравенства является объединение полуинтервалов: [-4; -3)∪(-1; 1].

Ответ: [-4; -3)∪(-1; 1].

Пример: Решить неравенство:

≤ 0.

Решение: Полагая х ≠ 0 и х ≠ 3, разделим обе части неравенства на положительную дробь и получим и сразу заметим, что х = 0 удовлетворяет заданному неравенству, а х = 3 не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех х≠0 и х≠3:

≤ 0.

Начертив кривую знаков, заштрихуем промежутки удовлетворяющие этому неравенству, и отметим на той же оси точки х = 0 и х = 3. Учитывая, что значение х = 0 является решением заданного неравенства, но не принадлежит заштрихованному промежутку, его следует дополнительно включать в ответ. Значение х = 3 не является решением неравенства, но принадлежит заштрихованному промежутку; следовательно, это значение нужно исключить. Итак, получаем ответ: (-∞; -4)∪[1; 3)∪ ∪(3; 4,5]U0.

Ответ: (-∞; -4)∪[1; 3)∪(3; 4,5]U0.

Пример: Решить неравенство

< 0.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, переписываем данное неравенство в виде

< 0.

Точками, в которых множители меняют знаки, являются –5, 1, 2, 6. Они разбивают числовую ось не интервалы (-∞; -5), (-5; 1), (1; 2), (2; 6),(6; +∞). С помощью кривой знаков находим интервалы, где выполняется неравенство: (-5; 1) и (2; 6). При этом из (-5; 1) надо удалить точку 0, так как в этой точке выражение обращается в нуль. Итак, получаем ответ в виде (-5; 0)∪(0; 1)∪(2; 6).

+

***x***

+

•

-4

**⎯**

**⎯**

ο

0

•

1

ο

3

•

5

Ответ: (-5; 0)∪(0; 1)∪(2; 6).

Пример: Решить неравенство

< 0.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, перепишем данное неравенство в виде

< 0.

Нанесем числа 0, 1, 2, 5, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, на числовую ось. Они разбивают числовую ось на пять промежутков.

С помощью “пробных” точек найдем знак выражения в каждом промежутке.

+

5

***x***

+

+

0

**⎯**

**⎯**

1

2

Выпишем интервалы, где выполняется неравенство: (-∞; 0), (0; 1), (2; 5).

Ответ: (-∞; 0)∪(0; 1)∪(2; 5).

Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины.

При решении неравенства, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величены, используется тот же прием, что и при решении уравнении, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величены, именно: решение исходного неравенства сводится к решению нескольких неравенств, рассматриваемых на промежутках знакопостоянства выражений, стоящих под знаков абсолютной величены.

Пример: Решить неравенство

⏐х2 - 2⏐ + х < 0. (\*)

Решение: Рассмотрим промежутки знакопостоянства выражения х2 – 2, стоящего под знаком абсолютной величены.

1. Предположим, что

х2 – 2 ≥ 0,

тогда неравенство (\*) принимает вид

х2 + х –2 < 0.

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства х2 –2 ≥ 0 представляет собой первое множество решений исходного неравенства (рис 1): х∈(-2; -].

2) Предположим, что х2 – 2 < 0, тогда согласно определению абсолютной величены имеем ⏐х2 - 2⏐= 2 – х2, и неравенство (\*) приобретает вид

2 – х2 + х < 0.

***x***

•

-

•

-1

•

-

•

2

***x***

•

-2

•

-

•

-1

•

***Рис. 2***

Рис. 1

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства х2 – 2 < 0 дает второе множество решений исходного неравенства (рис. 2): х∈(-; -1).

Объединяя найденные множества решений, окончательно получаем х∈(-2; -1)

Ответ: х∈(-2; -1).

В отличие от уравнений неравенства не допускают непосредственной проверки. Однако в большинстве случаев можно убедиться в правильности полученных результатов графическим способом. Действительно, запишем неравенство примера в виде

⏐х - 2⏐ < -х.

Построим функции y1 =⏐х2 - 2⏐ и y2 = -х, входящие в левую и правую часть рассматриваемого неравенства, и найдем те значения аргумента, при которых y1<y2.

На рис. 3 заштрихованная область оси абсцисс содержит искомые значения х.

Рис. 3

Решение неравенств, содержащих знак абсолютной величены, иногда можно значительно сократить, используя равенство ⏐х⏐2= х2.

y2 = -x

y1 = |x2 - 2|

√2

-√2

-1

-2

x

y

Пример: Решить неравенство

⏐⏐ > 1. (\*)

Решение: Исходное неравенство при всех х ≠­ -2 эквивалентно неравенству

⏐­х - 1⏐> ⏐х + 2⏐. (\*\*)

Возведя обе части неравенства (\*\*) в квадрат, после приведения подобных членов получаем неравенство

6х < -3,

т.е. х < -1/2.

Учитывая множество допустимых значений исходного неравенства, определяемого условием х ≠ -2, окончательно получаем, что неравенство (\*) выполняется при всех х∈(-∞; -2)∪(-2; -1/2).

Ответ: (-∞; -2)∪(-2; -1/2).

Пример: Найти наименьшее целое х, удовлетворяющее неравенству:

⏐⏐ > 1.

Решение: Так как ⏐х +1⏐ ≥ 0 и, по условию, ⏐х +1⏐ ≠ 0, то данное неравенство равносильно следующему: 2х + 5 > ⏐х +1⏐. Последнее в свою очередь, эквивалентно системе неравенств –(2х + 5) < х + 1 < 2х + 5,

**х > -4,**

**x > -4/3.**

-(***2х + 5) < х + 1***

***2х + 5 > х +1,***

откуда

Наименьшим целым числом х удовлетворяющей этой системе будет неравенств, является 0. Заметим, что х ≠ -1, иначе выражение в левой части данного неравенства не имеет смысла.

Ответ: 0.

Пример: Решить неравенство:

⏐⏐ ≥ ⏐х⏐ - 2 .

Решение: Пусть ⏐х⏐ = y. Заметим далее, что ⏐х⏐ + 1 > 0. Поэтому данное неравенство эквивалентно следующему: -2 ≥ (y –2)(y + 1), или y2 – y ≤ 0, или 0 ≤y≤ 1, или 0 ≤⏐х⏐≤ 1. Отсюда -1≤ х ≤ 1.

Ответ: [-1; 1].

Пример: Решить неравенство

⏐х2 – 3х + 2⏐+ ⏐2х + 1⏐ ≤ 5.

Решение. х2 – 3х + 2 отрицателен при 1 < x < 2 и неотрицателен при остальных х, 2х + 1 меняет знак при х = -½. Следовательно, нам надо рассмотреть четыре случая.

1. х < -½. В этом случае х2 – 3х + 2 > 0, 2х +1 < 0. Получаем неравенство х2 – 3х + 2 – 2х – 1 ≤ 5, х2 – 5х – 4 ≤ 0. С учетом условия х < -½ находим ≤ х ≤ -½.
2. – ½ ≤ х ≤ 1. Имеем неравенство х2 – х – 2 ≤ 0. Его решение –1 ≤ х ≤ 2. Следовательно, весь отрезок –½ ≤ x ≤ 1удовлетворяет неравенству .
3. 1 < x < 2. Получаем х2 – 5х + 6 ≥ 0; х ≤ 2 или х ≥ 3. Вновь подходит весь интервал.
4. х ≥ 2. Неравенство то же, что и в случае 2. Подходит лишь х = 2.

Ответ: ≤ х ≤ 2.

Пример: Решить неравенство.

⏐⏐х3 + х - 3⏐- 5⏐≤ х3 – х + 8.

Решение. Решим это неравенство не стандартным образом.

⏐х3 + х - 3⏐ - 5 ≤ х3 – х + 8, ⏐х3 + х - 3⏐ ≤ х3 – х + 13

⏐х3 + х - 3⏐ - 5 ≤ -х3 + х – 8 ⏐х3 + х - 3⏐ ≥ - х3 + х – 3

х3 + х – 3 ≤ х3 – х + 13 х ≤ 8,

х3 + х – 3 ≥ -х3 + х – 13, х3 ≥ -5,

х3 + х – 3 ≥ -х3 + х – 3, х3 ≥ 0,

х3 + х – 3 ≤ х3 – х + 3 х ≤ 3

-≤ х ≤ 8, -≤ х ≤ 8.

х – любое

Ответ: -≤ х ≤ 8.

Неравенства с параметрами.

Неравенства с параметрами являются наиболее трудными задачами курса элементарной математики. Это объясняется тем, что их решения следует получать при всех допустимых значениях входящих в них параметров.

Пример: Для всех значений а решить неравенство

aх > 1/x.

Решение: Запишем неравенство в виде

> 0,

тогда исходное неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

ax2 – 1 > 0, ax2 – 1 < 0,

x > 0; x < 0.

Рассмотрим первую систему. Первое неравенство запишем в виде:

ax2 > 1.

При а > 0 оно эквивалентно неравенству х2 > 1/a, множество решений которого х < -1/ и x > 1/. В этом случае решения первой системы: х∈(1/; ∞). При а ≤ 0 левая часть неравенства ах2 –1 > 0 отрицательна при любом х и неравенство решений не имеет, а следовательно, не имеет решений и вся система неравенств.

Рассмотрим вторую систему. При а > 0 решениями неравенства ах2 – 1<0 будут значения х∈(-1/; 1/), а решениями системы ⎯ значения х∈(-1/; 0). При a≤ 0 левая часть неравенства ах2 –1 < 0 отрицательна при

любых значениях х, т.е. это неравенство выполняется при все х∈R и, следовательно, решениями системы будут значения х∈(-∞; 0).

***б***

***а***

x

y

y = ax

0

Приведем графическую иллюстрацию решения этого примера.

x

y

y = ax

a > 0

0

1/√a

- 1/√a

Для этого рассмотрим отдельно два случая а > 0 и а ≤ 0 и для каждого из них построим графики функций, стоящих в левой и правой частях исходного неравенства. Заштрихованные промежутки оси Ох представляют собой решение неравенства в рассматриваемых случаях.

Графическая иллюстрация облегчает решение уравнений и неравенств с параметрами.

Ответ: Если а ≤ 0, то х∈(-∞; 0); если а > 0, то х∈(-1/; 0)∪(1/; ∞).

Пример: Решить неравенство:

⎯ < .

Решение: Преобразуем данное неравенство: 3m2х + 3 – 2mx2 – 6 < m + 9x; mx2 – 9x < m + 3; (m – 3)(m + 3)x < m + 3. Далее находим решение неравенства при различных значения параметра m:

1. Пусть (m – 3)(m + 3) > 0, т.е. m < -3 или m > 3. Тогда неравенство имеет решение х < 1/(m – 3).
2. Пусть (m – 3)(m + 3) < 0, т.е. –3 < m < 3. Тогда неравенство имеет решение х > 1/(m – 3).
3. Пусть (m – 3)(m + 3) = 0, т.е. m = 3 или m = -3. Тогда если m = 3, то неравенство примет вид 0⋅х < 6 и, значит выполняется при любом х∈R. Если же m = -3, то неравенство примет вид 0⋅х < 0 и, следовательно, не имеет решении.

Пример: Для каждого неотрицательного значения параметра а решить неравенство

4а3х4 + 4а2х2 + 32х + а + 8 ≥ 0.

Решение. Левая часть неравенства представляет собой многочлен как относительно х, так и относительно параметра а. Степени соответственно равны 4 и 3. Однако если умножить многочлен на а, а затем сделать замену y = ax, то в новом многочлене максимальная степень параметра а будет равна 2. Случай а = 0 дает нам ответ х ≥ - ¼. Будем теперь считать, что а > 0. Умножив обе части неравенства на а и сделав замену y = ax, получим

4y4 + 4ay2 + 32y + a2 + 8a ≥ 0.

Левая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно а:

a2 + (4y2 + 8)a + 4y2 + 32y ≥ 0,

¼D = (2y2 + 4) 2 – 4y2 – 32y = 16(y – 1) 2.

Раскладывая левую часть неравенства на множители, получим

(а + 2y2 + 4y)(a + 2y2 – 4y + 8) ≥ 0,

или

(2y2 + 4y + a)(2y2 – 4y + 8 + a) ≥ 0.

Второй множитель положителен при всех y, если а > 0. Приходим к неравенству 2y2 + 4y + a ≥ 0, откуда, если 0 < a < 2, y ≤ ½(-2 -) или y ≥ ½(-2+); если а ≥ 2, y – любое. Возвращаясь к х, получим ответ.

Ответ: Если а = 0, то х ≥ - ¼; если 0 < a < 2, то х ≤ 1/2a\*(-2 - ) или х ≥ 1/2a(-2 + ); если а ≥ 2, то х – любое.

Пример: Решить систему неравенств

***Рис. 1, а***

х2 – 3х + 2 ≤ 0,

ах2 – 2(а + 1)х + а – 1 ≥ 0.

Решение: Поскольку решением первого неравенства является 1 ≤ х ≤ 2, то задача сводится (при а ≠ 0) к выяснению расположения корней квадратного трехчлена f(x) = ах2 – 2(а + 1)х + а –1 относительно отрезка [1; 2]. Имеем

¼D = (а + 1) 2 – а(а – 1) = 3а + 1, f(1) = -3, f(2) = а – 5.

Область изменения параметра а оказалось разделенной на 4 части (не считая граничных точек).

1. Если а < - 1/3, второе неравенство, а следовательно и данная система не имеют решения. То же имеет место и при а = -1/3.
2. Если –1/3 < a < 0, то f(1) < 0, f(2) < 0. Для вершины параболы выполняется неравенство хв = < 0 (рис. 1,а ). Следовательно, множество решении второго неравенства не содержит точек отрезка [1; 2]. Система

***Рис. 1, б***

x

y

0

1

2

x

y

0

1

2

не имеет решения. То же имеет место и при а = 0.

1. Если 0 < a < 5, то f(1) < 0, f(2) < 0 (рис. 1, б). Значит, на всем отрезке [1; 2] f(x) < 0. Система вновь не имеет решения.
2. Если а ≥ 5, то f(1) < 0, f(2) ≥ 0 (рис. 1, в). Решением системы будет х2 ≤ х ≤ 2 где х2 – больший корень уравнения f(x) = 0.

x

y

0

1

2

Ответ: Если а < 5, система не имеет решения; если а ≥ 5, то 1/а(а + 1 +) ≤ х ≤ 2.

***Рис. 1, в***

Пример: Решить неравенство

⏐2х2 + х – а - 8⏐ ≤ х2 + 2х – 2а – 4.

Решить: Напомним, что неравенство ⏐а⏐ ≤ b эквивалентно двойному неравенству –b ≤ a ≤ b. В нашем случае после преобразования приходим к системе неравенств

а ≤ -х2 + х + 4,

а ≤ х2 + х – 4.

Изобразим на плоскости (х; а) множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. При конкретном значении параметра а = α решением нашего неравенства будут абциссы тех точек горизонтальной прямой а = α, которые находятся в заштрихованной области. Найдем точки пересечения А(2; 2), В(-2; -2) наших точек парабол и вершину С(-0,5; -4,25) параболы а = х2 +х – 4.

Далее получаем: если а > 2, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью.

Если –2 < a ≤ 2, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью по отрезку. Концами этого отрезка будут точки с абциссами ½(-1 + ) (больший корень уравнения а = х2 + х – 4 или х2 – х – 4 + а= 0).

Если –4¼ ≤ a ≤ -2, то горизонтальная прямая, соответствующая таким а, пересекается с заштрихованной областью по двум отрезкам. Решением неравенства будет

½(1 - ) ≤ х ≤ - ½(1 + ),

½(-1 + ) ≤ х ≤ -½(1 + ).

Если а < -4¼, то ½(1 - ) ≤ x ≤ ½(1 + ).

Системы рациональных неравенств.

Пусть надо найти числовые значения х, при которых превращаются в верные числовые неравенства одновременно несколько рациональных неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным х.

Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти все решения каждого неравенства системы. Тогда общая часть всех найденных решений и будет решением системы.

Пример: Решить систему неравенств

(х –1)(х – 5)(х – 7) < 0,

> 0.

Сначала решаем неравенство

(х – 1)(х – 5)(х – 7) < 0.

Применяя метод интервала (рис. 1), находим, что множество всех решении неравенства (2) состоит из двух интервалов: (-∞, 1) и (5, 7).

Теперь решим неравенство

> 0.

Применяя метод интервалов (рис. 2), находим, что множество всех решении неравенства (3) также состоит их двух интервалов: (2, 3) и (4, +∞).

Теперь надо найти общую часть решении неравенств (2) и (3). Нарисуем координатную ось х и отметим на ней найденные решения. Теперь ясно, что общей частью решении неравенств (2) и (3) является интервал (5, 7) (рис. 3).

***x***

•

1

•

5

•

7

*⎯*

*+*

*+*

Следовательно, множество всех решении системы неравенств (1) составляет интервал (5, 7).

Пример: Решить систему неравенств

х2 – 6х + 10 < 0,

> 0.

Решим сначала неравенство

х2 – 6х + 10 < 0.

Применяя метод выделения полного квадрата, можно написать, что

х2 – 6х + 10 = х2 - 2⋅х⋅3 + 32 - 32 + 10 = (х – 3) 2 +1.

Поэтому неравенство (2) можно записать в виде

(х – 3) 2+ 1 < 0,

откуда видно, что оно не имеет решении.

Теперь можно не решать неравенство

> 0,

так как ответ уже ясен: система (1) не имеет решении.

Пример: Решить систему неравенств

< 1,

x2 < 64.

Рассмотрим сначала первое неравенство; имеем

- 1 < 0, < 0.

С помощью кривой знаков (рис. 4) находим решения этого неравенства: х < -2; 0 < x < 2.

Решим теперь второе неравенство заданной системы. Имеем x2 - 64 < 0, или (х – 8)(х + 8) < 0. С помощью кривой знаков (рис. 5) находим решения неравенства: -8 < x < 8.

Отметив найденные решения первого и второго неравенства на общей числовой прямой (рис. 6), найдем такие промежутки, где эти решения совпадают (пресечение решении): -8 < x < -2; 0 < x < 2. Это и есть решение системы.

Пример: Решить систему неравенств

х2 ≥ 100х3;

≥ 0.

Преобразуем первое неравенство системы:

х3(х – 10)(х + 10) ≥ 0, или х(х – 10)(х + 10) ≥ 0

(т.к. множители в нечетных степенях можно заменять соответствующими множителями первой степени); с помощью метода интервалов (рис. 7) найдем решения последнего неравенства: -10 ≤ х ≤ 0, х ≥ 10.

Рассмотрим второе неравенство системы; имеем

≤ 0.

Находим (рис. 8) х ≤ -9; 3 < x < 15.

Объединив найденные решения, получим (рис. 9) х ≤ 0; х > 3.

Пример: Найти целочисленные решения системы неравенств:

х + y < 2,5,

x – y > -3,

y –1 > 0.

Решение: Приведем систему к виду

x + y < 2,5,

y – x < 3,

y > 1.

Складывая первое и второе неравенства, имеем y < 2, 75, а учитывая третье неравенство, найдем 1 < y < 2,75. В этом интервале содержится только одно целое число 2. При y = 2 из данной системы неравенств получим

х < 0,5,

x > -1,

откуда –1 < x < 0,5. В этом интервале содержится только одно целое число 0.

Ответ: х = 0, y =2.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Неравенства с одной или двумя переменными можно решать графически.

Неравенство с одной переменой можно записать так: f(x) > g(x), где f(x) и g(x) – выражения, содержащие переменную.

Построим в одной системе координат графики функций y = f(x) и у = g(x).

Решение неравенства есть множество значений переменой х, при которых график функций у=g(x), так как f(x)>g(x).Это показано на рисунках 1 и 2.

***а*** х

***0***

***y = g[x]***

***y = f[x]***

***y***

***с***

Решение неравенства с двумя переменными f(x,y)>0 есть множество

***y = g[x]***

***y = f[x]***

y

*х*

***а***

точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому неравенству. Рассмотрим на примерах решение некоторых неравенств с двумя переменными.

Пример 1. Решить графически неравенство

***0***

***y***

***x***

x + у > 0.

Решение. Запишем неравенство в виде у> -х. Построим прямую у= -х. Координаты точек плоскости, которые лежат выше этой прямой, есть решение неравенства ( на рисунке 3 – заштрихованная область).

Пример 2. Решить графически неравенство

***x2 – y = 0***

***y***

***x***

***0***

х2 – у > 0.

Решение. Запишем неравенство в виде у < x2 .

Построим кривую у = х2 (парабола) (рисунок 4).

Решение неравенства есть координаты точек плоскости, которые лежат в заштрихованной области (ниже построенной параболы).

При решении систем неравенств с двумя переменными находят пересечение областей решений этих неравенств.

***y = 0 x***

***y***

***x = 0***

***x2 + y2 = 0***

Пример 3.Решить графически систему неравенств

x2 + у2 – 4 > 0,

y > 0,

x > 0.

Решение. Решение первого неравенства системы есть координаты точек плоскости (рисунок 5), которые лежат вне окружности х+у=4; решение второго неравенства есть координаты точек верхней полуплоскости; решение третьего неравенства есть координаты точек правой полуплоскости.

Решением системы являются координаты точек, которые лежат в заштрихованной области.

ТЕСТ

1) Решить уравнение: = 1.

А) 0,

Б) 1,

В) Нет решений,

Г) x∈ (−∞; 1)∪(1; ∞).

2) Решить уравнение: = 0.

А ) Нет решений,

Б) −1,

В) −5,

Г) −1; −5.

3) Решить уравнение: + − = 0.

А) −2; ; 5,

Б) Нет решений,

В) x∈ (−∞; 3)∪(3; ∞),

Г) x ∈R.

4) Решить уравнение: ax = 1.

А) Если a ≠ 0, то x∈R; если a = 0, то нет решений,

Б) Если a = 0, то нет решений; если a ≠ 0, то x = ,

В) Если a = 0 , то x∈R; если a ≠ 0, то x = .

Г) Нет решений.

1. При каких a уравнение ax2 − 4x + a + 3 = 0 имеет более одного корня?

А) − 4 < a < 0,

Б) 0 < a < 1,

В) a∈(−∞; 0)∪(0; ∞),

Г) − 4 < a < 0; 0 < a < 1.

1. При каких a уравнение (a − 2)x2 + (4 − 2a)x + 3 = 0 имеет единственное решение?

А) 2,

Б) а∈(−∞; 2)∪(2; ∞),

В) 5,

Г) − 4.

1. Решить уравнение: |x2 − 1| + |a(x − 1)| = 0.

А) Если a ≠ 0, то x =1; если a = 0, то x = ±1,

Б) Если а ≠ 0, то нет решений; если a = 0, то x = 1.

В) x = ±1,

Г) Нет решений.

1. Решить систему:

− = ,

y2 − x − 5 = 0.

А) (4; 3), (4; − 3),

Б) (1; 2),

В) Нет решений,

Г) x∈R, y = ±3.

1. Решить систему:

x2 + y2 − 2x = 0,

x2 − 2xy + 1 = 0.

А) (1; −1), (5; 5)

Б) Нет решений,

В) (1;1),

Г) (−2; 3), (3; −2).

1. При каких a неравенство 2x + a > 0 является следствием неравенства x + 1 − 3a > 0?

А) ,

Б) а ≥ ,

В) при любых a,

Г) а ≤ .

11) Найти наибольшее целое х, удовлетворяющие неравенству:

- > 1.

а) х∈(-∞; -3,5),

б) –3,

в) –4,

г) нет решений.

1. Найти наибольшее целое х, удовлетворяющие неравенству:

- > -.

а)5,

б) –3,

в) 4,

г)нет решений.

1. Найти целочисленные решения неравенств:

< 0.

а) 0, 1, 2,

б) 4, 5,

в) 7,

г)нет решений.

1. Найти целочисленные решения неравенств:

17 – 4х < 0,

10х – 67 < 0.

а)5,

б) –3, -4, -5,

в) 5,6,

г)нет решений.

15) Решить неравенство:

- < 0.

а) (-∞; -3)∪(0; 3,

б) (–3, 0)∪(0; ∞),

в) (5; 7),

г) нет решений.

16) Решить неравенство:

< -.

а) (-∞; -3/25)∪(0; ∞),

б) (–12, 0)∪(7;9),

в) (-∞;)∪ ( ; 5),

г) нет решений.

1. Решить неравенство:

< -1.

а) (-9; -5)∪(0; 8),

б) (–8, -7)∪(1;3),

в) (-∞; -7)∪(1; 3),

г) нет решений.

18) Решить неравенство:

≤ .

а) [-4; -2)∪(0;5],

б) (–1, 0]∪[1;7),

в) (-4; -3)∪[5; 7],

г) нет решений.

19) Решить неравенство

⏐1,5 – 3х⏐ < 3.

а) (-2,5; -2)∪(0; 3,5],

б) (–0,5; 1,5),

в) (-4,5; -3,5),

г) нет решений.

20) Решить неравенство:

⏐⏐ > ⏐х + 2⏐.

а) (-3; -1),

б) (0; 1),

в) (-7; -10),

г) нет решений.

Ответы: 1 − Г; 2 − В; 3 − В; 4 − Б; 5 − Г; 6 − В; 7 − А; 8 − А; 9 − В;10 – Б;

11 – В; 12 – А; 13 – А; 14 – В; 15 – А; 16 – В; 17 – Б; 18 – В; 19 – Б; 20 – А.

**Список использованной литературы:**

1. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. Москва, изд. “Айрис”, 1997.
2. Тысяча и один пример. Равенства и неравенства. А. М. Назаренко, Л. Д. Назаренко. Сумы, изд. “Слобожанщина”, 1994.
3. Система тренировочных задач и упражнений по математике. А. Я. Симонов. Москва, изд. “Просвещение” 1991.
4. Алгебра 8 класс. Н. Я. Виленкин. Москва, изд. “Просвещение”, 1995.
5. Задачи по математике для поступающих во ВТУЗы. Р. Б. Райхмист. Москва, изд. “Высшая школа”, 1994.
6. Алгебраический тренажёр. А. Г. Мерзляк. Москва − Харьков, изд. “Илекса”, изд. “Гимназия”, 1998.
7. Готовимся к экзамену по математике. Д. Т. Письменный. Москва, изд. “Айрис”, 1996.
8. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Вавилов В. В., Мельников И. И. Москва, изд. “Наука”, 1987.
9. Алгебра и начала анализа. Издание второе, переработанное и дополненное. А. Г. Мордкович. Москва, изд. “Высшая школа”, 1987.
10. Алгебра. Пособие для самообразования. С. М. Никольский. Москва, изд. “Наука”, 1985.
11. Справочник по методам решения задач по математике. А. Г. Цыпкин. Москва, изд. “Наука”, 1989.
12. Решение задач. И. Ф. Шарыгин. Москва, изд. “Просвещение”, 1994.
13. Алгебра и математический анализ. 10 класс. Н. Я. Виленкин. Москва, изд. “Просвещение”, 1997.
14. Математика. Алгебра и начала анализа. А. И. Лобанова. Киев, изд. “Вища школа”, 1987.
15. Алгебра. 9 класс. Н. Я. Виленкин. Москва, изд. “Просвещение”, 1996.