Некоторые главы мат анализа

ГЛАВА 1 РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Основные сведения

Функция *f*(*x*)*,* определенная на всей числовой оси называется *периодической*, если существует такое число , что при любом значении *х* выполняется равенство . Число *Т* называется *периодом функции.*



Отметим некоторые с в о й с т в а этой функции:

1) Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода *Т* есть периодическая функция периода *Т*.

2) Если функция *f*(*x*) период *Т* , то функция *f*(*ax*)имеет период .



3) Если *f*(*x*)- периодическая функция периода *Т* , то равны любые два интеграла от этой функции, взятые по промежуткам длины *Т* (при этом интеграл существует), т. е. при любых *a* и *b* справедливо равенство .



Тригонометрический ряд. Ряд Фурье

Если *f*(*x*) разлагается на отрезке в равномерно сходящийся тригонометрический ряд:



(1)



,то это разложение единственное и коэффициенты определяются по формулам:



, где *n*=1,2, . . .



Тригонометрический ряд (1) рассмотренного вида с коэффициентами называется *тригонометрическим рядом Фурье*, а коэффициентами ряда Фурье.



Достаточные признаки разложимости функции в ряд Фурье

Точка разрыва функции называют точкой разрыва первого рода, если существует конечные пределы справа и слева этой функции в данной точке.



ТЕОРЕМА 1 (Дирихле). Если периодическая с периодом функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1-ого рода на отрезке [] и этот отрезок можно разбить на конечное число частей, в каждом из которых *f*(*x*) монотонна, то ряд Фурье относительно функции сходится к *f*(*x*) в точках непрерывности и к среднеарифметическому односторонних пределов в точках разрыва рода (Функция удовлетворяющая этим условиям называется кусочно-монотонной).



ТЕОРЕМА 2. Если *f*(*x*) периодическая функция с периодом , которая на отрезке [] вместе со своей производной непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, то ряд Фурье функции *f*(*x*) в точках разрыва к среднему арифметическому односторонних пределов (Функция удовлетворяющая этой теореме называется кусочно-гладкой).



Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Пусть *f*(*x*) - четная функция с периодом 2*L* , удовлетворяющая условию *f*(-*x*) = *f*(*x*) *.*

Тогда для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы:

=



=



= 0 , где *n*=1,2, . . .



Таким образом, в ряде Фурье для четной функции отсутствуют члены с синусами, и ряд Фурье для четной функции с периодом 2*L* выглядит так:



Пусть теперь  *f*(*x*) - нечетная функция с периодом 2*L*, удовлетворяющая условию  *f*(-*x*) = - *f*(*x*)*.*

Тогда для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы:

, где *n*=1,2, . . .



Таким образом, в ряде Фурье для нечетной функции отсутствует свободный член и члены с косинусами, и ряд Фурье для нечетной функции с периодом 2*L* выглядит так:



Если функция *f*(*x*) разлагается в тригонометрический ряд Фурье на промежутке то



, где,



,



,



Если *f*(*x*) разлагается в тригонометрический ряд Фурье на [0*,L*], то доопределив заданную функцию *f*(*x*) соответствующим образом на [-*L,*0]; далее периодически продолжив на (*T*=2*L*), получим новую функцию, которую разлагаем в тригонометрический ряд Фурье.

Для разложения в ряд Фурье непериодической функции, заданной на конечном произвольном промежутке [*a*,*b*], надо : доопределить на [*b*,*a*+2*L*] и периодически продолжить, либо доопределить на [*b*-2*L*,*a*] и периодически продолжить.

Ряд Фурье по любой ортогональной системе функций

Последовательность функций непрерывных на отрезке [*a*,*b*], называется *ортогональной системой функции на отрезке* [*a*,*b*], если все функции последовательности попарно ортогональны на этом отрезке, т. е. если



Система называется ортогональной и нормированной (ортонормированной) на отрезке [a,b],

если выполняется условие



Пусть теперь *f*(*x*) - любая функция непрерывная на отрезке [*a*,*b*]. *Рядом Фурье* такой функции *f*(*x*) на отрезке [*a*,*b*] *по ортогональной системе* называется ряд:



коэффициенты которого определяются равенством:

n=1,2,...



Если ортогональная система функций на отрезке [*a*,*b*] ортонормированная, то в этом случаи

где *n*=1,2,...



Пусть теперь *f*(*x*) - любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [*a*,*b*]. Рядом Фурье такой функции *f*(*x*) на томже отрезке

по ортогональной системе называется ряд:

,



Если ряд Фурье функции *f*(*x*) по системе (1) сходится к функции *f*(*x*) в каждой ее точке непрерывности, принадлежащей отрезку [*a*,*b*]. В этом случае говорят что *f*(*x*) на отрезке [*a*,*b*] разлагается в ряд по ортогональной системе (1).

Комплексная форма ряда Фурье

Выражение называется комплексной формой ряда Фурье функции *f*(*x*), если определяется равенством



, где



Переход от ряда Фурье в комплексной форме к ряду в действительной форме и обратно осуществляется с помощью формул:

(*n*=1,2, . . .)



Задача о колебании струны

Пусть в состоянии равновесия натянута струна длинной *l* с концами *x=*0 и *x*=*l*. Предположим, что струна выведена из состояния равновесия и совершает свободные колебания. Будем рассматривать малые колебания струны, происходящие в вертикальной плоскости.



При сделанных выше допущениях можно показать, что функция *u*(*x,t*) , характеризующая положение струны в каждый момент времени *t,* удовлетворяет уравнению

(1) , где а - положительное число.



Наша з а д а ч а - найти функцию *u*(*x,t*) , график которой дает форму струны в любой момент времени *t*, т. е. найти решение уравнения (1) при граничных:

(2)



и начальных условиях:

(3)



Сначала будем искать решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям(2). Нетрудно увидеть, что *u*(*x*,*t*)0 является решением уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям(2). Будем искать решения, не равные тождественно 0, представимые в виде произведения *u*(*x,t*)=*X*(*x*)*T*(*t*), (4) , где , .



Подстановка выражения (4) в уравнение (1) дает:



Из которого наша задача сводится к отысканию решений уравнений:



Используя это условие *X*(0)=0, *X*(*l*)=0, докажем, что отрицательное число, разобрав все случаи.



a) Пусть Тогда *X*”=0 и его общее решение запишется так:



откуда и ,что невозможно , так как мы рассматриваем решения, не обращающиеся тождественно в нуль.



б) Пусть . Тогда решив уравнение



получим , и, подчинив, найдем, что



в) Если то



Уравнения имеют корни :



получим:



где -произвольные постоянные. Из начального условия найдем:



откуда , т. е.



(*n*=1,2,...)



(*n*=1,2,...).



Учитывая это, можно записать:

(n=1,2,...).



и, следовательно

, (*n*=1,2,...),



но так как A и B разные для различных значений n то имеем

, (*n*=1,2,...),



где и произвольные постоянные, которые попытаемся определить таким образом, чтобы ряд удовлетворял уравнению (1), граничным условиям (2) и начальным условиям (3).



Итак, подчиним функцию *u*(*x,t*) начальным условиям, т. е. подберем и так , чтобы выполнялись условия



Эти равенства являются соответственно разложениями функций и на отрезки [0, *l*] в ряд Фурье по синусам. ( Это значит что коэффициенты будут вычисляться как для нечетной функций). Таким образом, решение о колебании струны с заданным граничными и начальными условиями дается формулой



где

(*n*=1,2,...)



Интеграл Фурье

Достаточные условия представимости функции в интеграл Фурье.

Для того, чтобы *f*(*x*) была представлена интегралом Фурье во всех точках непрерывности и правильных точках разрыва, достаточно:

1) абсолютной интегрируемости на



(т.е. интеграл сходится)



2) на любом конечном отрезке [-*L*, *L*] функция была бы кусочно-гладкой

3) в точках разрыва функции, ее интеграл Фурье определяется полусуммой левого и правого пределов в этих точках, а в точках непрерывности к самой функции *f*(*x*)

Интегралом Фурье функции f(x) называется интеграл вида:



, где ,



.



**Интеграл Фурье для четной и нечетной функции**

Пусть *f*(*x*)-четная функция, удовлетворяющая условиям представимости интегралом Фурье.

Учитывая, что , а также свойство интегралов по симметричному относительно точки *x*=0 интервалу от четных функций, из равенства (2) получаем:



(3)



Таким образом, интеграл Фурье четной функции *f*(*x*) запишется так:

,



где *a*(*u*) определяется равенством (3).

Рассуждая аналогично, получим, для нечетной функции *f*(*x*) :

(4)



и, следовательно, интеграл Фурье нечетной функции имеет вид:

,



где *b*(*u*) определяется равенством (4).

**Комплексная форма интеграла Фурье**

, (5)



где

.



Выражение в форме (5) является комплексной формой интеграла Фурье для функции *f*(*x*).

Если в формуле (5) заменить *c*(*u*) его выражением, то получим:

, где правая часть формулы называется *двойным интегралом*



Фуpье в комплексной форме. Переход от интеграла Фурье в комплексной форме к интегралу

в действительной форме и обратно осуществим с помощью формул:



**Формулы дискретного преобразования Фурье**

Обратное преобразование Фурье.



где *n*=1,2,... , *k*=1,2,...

Дискретным преобразованием Фурье - называется *N*-мерный вектор



при этом, .



Разложение четной функции в ряд

Данную выше функцию сделаем четной(см. теорию), и рассмотрим ее на промежутке от 0 до смотри рис.2



**Рис.2**

поэтому разложение по косинусу имеет вид:



Из разложения видим что при *n*=2 дробь теряет смысл поэтому отдельно рассмотрим разложения первого и второго коэффициента суммы:



На основе данного разложения запишем функцию в виде ряда:



и вообще

.



Найдем первые пять гармоник для найденного ряда:

1-ая гармоника



2-ая гармоника



3-я гармоника



4-ая гармоника



5-ая гармоника



А теперь рассмотрим сумму этих гармоник F(x):



Комплексная форма ряда по косинусам

Для рассматриваемого ряда получаем коэффициенты (см. гл.1)

,



но при не существует, поэтому рассмотрим случай когда *n*=+2 :



(т.к. см. разложение выше)



и случай когда *n*=-2:

( т.к. )



И вообще комплексная форма:



или



или



Разложение нечетной функции в ряд

Аналогичным образом поступаем с данной функцией F(x), продлевая ее как нечетную, и рассматриваем на промежутке от 0 до смотри рис.3



**Рис.3**

поэтому разложение по синусам имеет вид:



Из данного разложения видно, что при *n*=2 произведение неопределенно (можно не учесть часть суммы), поэтому рассмотрим два отдельных случая.

При *n*=1:

,



и при *n*=2:



Учитывая данные коэффициенты имеем разложения в виде



и вообще



Найдем первые пять гармоник для данного разложения:

1-ая гармоника



2-ая гармоника



3-ая гармоника



4-ая гармоника



5-ая гармоника



И просуммировав выше перечисленные гармоники получим график функции *F*(*x*)

Вывод:



На основании главы 2, разложение функции в тригонометрический ряд(рис.1), разложение в ряд по косинусам(рис.2), разложение по синусам(рис.3), можно заключить, что данная функция разложима в тригонометрический ряд и это разложение единственное. И проанализировав суммы первых пяти гармоник по каждому разложению можно сказать, что наиболее быстрее к заданному графику достигается при разложении по синусам.

Комплексная форма ряда по синусам

Основываясь на теорию (см. гл.1) для ряда получаем:

, (т.к. )



тогда комплексный ряд имеет вид:



**ГЛАВА 3 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ**

Проверка условий представимости

Данную ранее функцию (см. гл. 2) доопределим на всей прямой от до как равную нулю(рис.4).



**Рис.4**

а) f(x)-определенна на R;

б) f(x) возрастает на , f(x) убывает на - кусочнo-монотонна.



f(x) = const на и .



< .



Интеграл Фурье

В соответствии с теорией (см. гл. 1) найдем *a*(*u*) и *b*(*u*):



;



.



И в конечном варианте интеграл Фурье будет выглядеть так:



Интеграл Фурье в комплексной форме

Теперь представим интеграл Фурье в комплексной форме. На основе выше полученных разложений имеем:

,



,



а теперь получим интеграл в комплексной форме:

.



**ГЛАВА 4 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМОМ ЛЕЖАНДРА**

Основные сведения

Функцию можно разложить в ортонормированной системе пространства X=[-1,1] , причем полиномы получим, если проинтегрируем выражение:



Соответственно получим для n=0,1,2,3,4,5, ... :



. . . . . . . . . .

Для представления функции полиномом Лежандра необходимо разложить ее в ряд:

,



где и разлагаемая функция должна быть представлена на отрезке от -1 до 1.



Преобразование функции

Наша первоначальная функция имеет вид (см. рис. 1):



т. к. она расположена на промежутке от 0 до необходимо произвести замену, которая поместит функцию на промежуток от -1 до 1.



Замена:



и тогда F(t) примет вид



или



Вычисление коэффициентов ряда

Исходя из выше изложенной формулы для коэффициентов находим:



Далее вычисление коэффициентов осложнено, поэтому произведем вычисление на компьютере в системе MathCad и за одно проверим уже найденные:



Рассмотрим процесс стремления суммы полинома прибавляя поочередно - слагаемое:



А теперь рассмотрим график суммы пяти полиномов *F*(*t*) на промежутки от -1 до 0 (рис.5):



**Рис. 5**

т.к. очевидно, что на промежутке от 0 до 1 будет нуль.

Вывод:

На основе расчетов гл.2 и гл.4 можно заключить, что наиболее быстрое стремление из данных разложений к заданной функции достигается при разложении функции в ряд.

**ГЛАВА 5 ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

Прямое преобразование

Для того, чтобы произвести прямое преобразование, необходимо задать данную функцию (гл. 1, рис. 1) таблично. Поэтому разбиваем отрезок от 0 до на *N*=8 частей, так чтобы приращение:



В нашем случае , и значения функции в *k*-ых точках будет:



для нашего случая (т.к. *a*=0).



Составим табличную функцию:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 0.785 | 1.571 | 2.356 | 3.142 | 3.927 | 4.712 | 5.498 |
|  | 0 | 0.707 | 1 | 0.707 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Табл. 1**

Прямым дискретным преобразованием Фурье вектора называется . Поэтому найдем :



, *n*=0,1,...,*N*-1



Сумму находим только до 3 слагаемого, т.к. очевидно, что от 4 до 7 к сумме суммируется 0 (т.к. значения функции из таблицы равны нулю).

Составим таблицу по прямому дискретному преобразованию:

зная, , где



, где



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 2,4 | 2 | 1 | 0 | 0.4 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0.318 | 0.25 | 0.106 | 0 | 0.021 | 0 | 0.009 | 0 |

**Табл. 2**

Амплитудный спектр



Обратное преобразование

Обратимся к теории гл.1. Обратное преобразование- есть функция :



В нашем случаи это:



А теперь найдем модули и составим таблицу по обратным дискретным преобразованиям:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 0.785 | 1.571 | 2.356 | 3.142 | 3.927 | 4.712 | 5.498 |
|  | 0 | 0.707 | 1 | 0.707 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0.708 | 1 | 0.707 | 8e-4 | 5e-5 | 5e-4 | 3e-4 |

**Табл. 3**

Из приведенной таблицы видно, что приближенно равно .



Построим графики используя табл.3, где - это *F*(*k*), а - это *f*(*k*) рис. 6 :



**Рис. 6**

Вывод:

На основе проделанных расчетов можно заключить, что заданная функция представима в виде тригонометрического ряда Фурье, а также интеграла Фурье, полинома Лежандра и дискретных преобразований Фурье. О последнем можно сказать, что спектр (рис. 6) прямого и обратного преобразований совпадают с рассматриваемой функцией и расчеты проведены правильно.

Этап I

**1 Постановка задачи**

Дана основная (рис. 1.1а) и резервная (рис. 1.1б) схемы. Рассмотреть два способа повышение надежности основной схемы до уровня 0.95



а) б)

Рис. 1.1

Первый способ

- каждому элементу основной схемы подключаются параллельно по *N* резервных элементов имеющих надежность в два раза меньше, чем надежность элемента к которому подключают.

Второй способ

- подключить к основной схеме параллельно по *N* резервной схеме.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № элемента | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Надежность | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.3 | 0.7 | 0.4 | 0.3 | 0.5 | 0.1 |
| Надеж.(резер.) | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.15 | 0.35 |  |  |  |  |

**2 Теоретическая часть**

Ввиду важности операций сложения и умножения над событиями дадим их определение:

*Суммой двух событий А и В* называется событие С, состоящее в выполнении события *А* или события *В*, или обоих событий вместе.

*Суммой нескольких событий* называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.

*Произведением двух событий А и В* называется событие *D*, состоящее в совместном выполнении события *А* и события *В*.

*Произведением нескольких событий* называется событие, состоящее в совместном выполнении всех этих событий.

А к с и о м ы т е о р и и в е р о я т н о с т е й :

1. Вероятность любого события находится в пределах:

.



2. Если *А* и *В* несовместные события , то



3. *Если имеется счетное множество несовместных событий* *А1*, *А2*, ... *Аn*, ... при , то



Следствие: *сумма вероятностей полной группы несовместных событий равна единице*, т.е. если

; при



то

.



*Сумма вероятностей противоположных событий ровна единице*:



Правило умножения вероятностей: *вероятность произведения* (пересечения, совмещения) *двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого*

.



Для независимых событий правило умножения принимает вид:

, или



Основываясь на теорию выведем некоторые формулы для решения поставленной задачи.

Схема состоит из нескольких *n* блоков (рис. 2.1), каждый из которых (независимо от других) может выйти из строя. Надежность каждого блока равна *p*. Безотказная работа всех без исключения блоков необходима для безотказной работы в целом. Найти вероятность безотказной работы всей схемы.



Рис. 2.1

Событие *A*={безотказная работа прибора} есть произведение *n* независимых событий *А*1, *А*2, ... *Аn*, где *Ai*={безотказная работа *i* -го блока}. По правилу умножения для независимых событий имеем

.



Схема состоит из 2 блоков (рис. 2.2), каждый из которых (независимо от друг от друга) может выйти из строя. Надежность каждого блока равна *p*. Найти вероятность безотказной работы всей системы.



Рис. 2.2

От события *В*={система будет работать} перейдем к противоположному:={система не будет работать}. Для того чтобы система не работала, нужно, чтобы отказали оба блока. Событие есть произведение двух событий:



={блок 1 отказал}x{блок 2 отказал}.



По правилу умножения для независимых событий:



**3 Практическая часть**

Воспользовавшись выше изложенными формулами рассчитаем надежность основной схемы (рис. 1а), она составит :



, а также резервной схемы (рис. 1б) :



Рассмотрим первый способ подключения (смотри рис. 3.1), когда подключаем по N элементов до тех пор, пока



Рис. 3.1

Тогда формула вероятности для схемы на рис. 2 будет выглядеть так :



, где

,



,



,



,



.



Увеличивая *N* дополнительных элементов пошагово добиваемся значения :



Шаг первый, при *N*=1

< 0.95



Шаг второй, при *N*=2

< 0.95



Шаг третий, при *N*=3

< 0.95



Шаг четвертый, при *N*=4

< 0.95



Шаг пятый, при *N*=5

> 0.95



Из рассмотренных вычислений можно заключить, что для достижения заданной вероятности 0.95 необходимо пяти добавочных элементов.

Рассмотрим второй способ подключения к основной резервной схемы (рис. 3) и найдем число *N* подключений при котором достигается заданная вероятность .



Рис. 3.2

Формула по которой будет вычисляться вероятность схемы на рис. 3 выглядит так :



, где



, а - смотри выше.



Увеличивая *N* дополнительных резервных схем пошагово добиваемся значения :



При *N*=1 : < 0.95



При *N*=2 : < 0.95



При *N*=3 : < 0.95



При *N*=4 : < 0.95



При *N*=5 : < 0.95



При *N*=6 : > 0.95



Из рассмотренных вычислений можно заключить, что для достижения заданной вероятности 0.95 необходимо шесть резервных схем.

Этап II

**1 Постановка задачи**

- найти неизвестную константу функции *f*(*x*);

- выписать функцию распределения, построить их графики;

- найти математическое ожидание и дисперсию;

- найти вероятность попадания в интервал (1;4).



**2 Теоретическая часть**

Под случайной величиной понимается величина, которая в результате измерения (опыта) со случайным исходом принимает то или иное значение.

Функция распределения случайной величины Х называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное *х*:

.



Основные свойства функции распределения:

1) *F*(*x*) - неубывающая функция своего аргумента, при .



2) .



3) .



Плотностью распределения непрерывной случайной величины Х в точке *х* называется производная ее функции распределения в этой точке. Обозначим ее *f*(*x*) :



Выразим функцию распределения *F*(*x*) через плотность распределения *f*(*x*):



Основные свойства плотности распределения *f*(*x*):

1. Плотность распределения - неотрицательная функция .



2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единицы:

.



Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений.



Перейдем от дискретной случайной величины *Х* к непрерывной с плотностью *f*(*x*).



Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины:



Для непосредственного вычисления дисперсии непрерывной случайной величины служит формула:



**3 Практическая часть**

Для нахождения неизвестной константы *c* применим выше описанное свойство:



, откуда



, или



Найдем функцию распределения основываясь на теоретической части:

- на интервале



- на интервале



- на интервале



Теперь построим график функций *f*(*x*)- плотности распределения (рис. 2.1 - кривая распределения) и *F*(*x*)- функции распределения (рис. 2.2)



Рис. 2.1



Рис. 2.2

Следуя постановке задачи найдем математическое ожидание и дисперсию для случайной величины *X* :



Производя еще одну замену приходим к первоначальной формуле из чего можно сделать вывод, что математическое ожидание с.в. *Х* равно :



Также находим дисперсию :



И последнее, вероятность попадания в интервал (1;4) находим как :



Этап III

**1 Постановка задачи**

Дана случайная выборка объема *n*=100 :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 104.6 | 95.2 | 82.0 | 107.7 | 116.8 | 80.0 | 100.8 | 124.6 | 99.4 | 101.4 |
| 100.6 | 86.3 | 88.2 | 103.8 | 98.5 | 111.8 | 83.4 | 94.7 | 113.6 | 74.7 |
| 114.3 | 86.9 | 106.6 | 94.9 | 105.9 | 88.6 | 96.6 | 93.7 | 90.8 | 96.5 |
| 110.2 | 100.0 | 95.6 | 102.9 | 91.1 | 103.6 | 94.8 | 112.8 | 100.1 | 95.3 |
| 113.9 | 113.9 | 86.1 | 110.3 | 88.4 | 97.7 | 70.1 | 100.5 | 90.9 | 94.5 |
| 109.1 | 82.2 | 101.9 | 86.7 | 97.4 | 102.1 | 87.2 | 94.71 | 112.4 | 94.9 |
| 111.8 | 99.0 | 101.6 | 97.2 | 96.5 | 102.7 | 98.6 | 100.0 | 86.2 | 89.4 |
| 85.0 | 86.6 | 122.7 | 101.8 | 118.3 | 106.1 | 91.3 | 98.4 | 90.4 | 95.1 |
| 93.1 | 110.4 | 100.4 | 86.5 | 105.4 | 96.9 | 101.9 | 83.8 | 107.3 | 107.5 |
| 113.7 | 102.8 | 88.7 | 112.5 | 79.4 | 79.1 | 98.1 | 103.8 | 107.2 | 102.3 |

**2 Теоретическая часть**

Под случайной выборкой объема *n* понимают совокупность случайных величин , не зависимых между собой. Случайная выборка есть математическая модель проводимых в одинаковых условиях независимых измерений.



Упорядоченной статистической совокупностью будем называть случайную выборку величины в которой расположены в порядке возрастания .



Размах выборки есть величина *r=Xn-X1*, где *Xn* - max , *X1* - min элементы выборки.

Группированным статистическим рядом называется интервалы с соответствующими им частотами на которые разбивается упорядоченная выборка, причем ширина интервала находится как :



тогда частота попадания в отрезок находим по формуле :



, где *Vi* - число величин попавших в отрезок , причем . Поделив каждую частоту на получим высоту для построения гистограммы.



Построив гистограмму мы получили аналог кривой распределения по которой можем выдвинуть гипотезу о законе распределения. Выровнять статистическое распределение с помощью закона о котором выдвинули гипотезу, для этого нужно статист. среднее *m*x\*  и статистическую дисперсию *D*x\* .

Которые находим как



Естественной оценкой для мат. ожидания является среднее арифметическое значение :

.



Посмотрим, является ли эта оценка не смещенной , для этого найдем ее мате-матическое ожидание :

,



то есть оценка для *m* является несмещенной.



Найдем дисперсию этой оценки :



Эффективность или неэффективность оценки зависит от вида закона распределения случайной величины *X* .Если распределение нормально, то оценка для мат. ожидания *m* является и эффективной.



Перейдем к оценке для дисперсии *D*. На первый взгляд наиболее естественной представляется статистическая дисперсия *D*\*, то есть среднее арифметическое квадратов отклонений значений *Xi* от среднего :

.



Проверим состоятельность этой оценки, выразив ее через среднее арифметическое квадратов наблюдений:

.



, где правая часть есть среднее арифметическое значений случайной величины *X2* сходится по вероятности к ее мат. ожиданию: . Вторая часть сходится по вероятности к ; вся величина сходится по вероятности к . Значит, оценка состоятельна.



Проверим ее на несмещенность, подставив в вместо его выражение и произведем действия:



.



Так как *D\** не зависит от выбора начала координат то отцентрируем все случайные величины . Тогда



.



Найдем мат. ожидание величины *D\**:

.



Но ,, и получаем:



.



Отсюда видно, что величина *D\** не является несмещенной оценкой для дисперсии *D*; ее мат. ожидание не равно *D*, а несколько меньше. Пользуясь оценкой *D\** вместо *D*, будет проходить систематическая ошибка в меньшую сторону, чтобы ее ликвидировать введем поправку тогда мы получим несмещенную оценку для дисперсии:



При больших *n* поправочный коэффициент становится близким к единицы, и его применение теряет смысл. Поэтому в качестве приближенных значени (оценок) этих характеристик нужно взять:



,



.



**3 Практическая часть**

Упорядоченная выборка где n=100 количество замеров :



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 70.1 | 74.7 | 79.1 | 79.4 | 80.0 | 82.0 | 82.2 | 83.4 | 83.8 | 85.0 |
| 86.1 | 86.2 | 86.3 | 86.5 | 86.6 | 86.7 | 86.9 | 87.2 | 88.2 | 88.4 |
| 88.6 | 88.7 | 89.4 | 90.4 | 90.8 | 90.9 | 91.1 | 91.3 | 93.1 | 93.7 |
| 94.5 | 94.7 | 94.7 | 94.8 | 94.9 | 94.9 | 95.1 | 95.2 | 95.3 | 95.6 |
| 96.5 | 96.5 | 96.6 | 96.9 | 97.2 | 97.4 | 97.7 | 98.1 | 98.4 | 98.8 |
| 98.6 | 99.0 | 99.4 | 100.0 | 100.0 | 100.1 | 100.4 | 100.5 | 100.6 | 100.8 |
| 101.4 | 101.6 | 101.8 | 101.9 | 101.9 | 102.1 | 102.3 | 102.7 | 102.8 | 102.9 |
| 103.6 | 103.8 | 103.8 | 104.6 | 105.4 | 105.9 | 106.1 | 106.6 | 107.2 | 107.3 |
| 107.5 | 107.7 | 109.1 | 110.2 | 110.3 | 110.4 | 111.8 | 111.8 | 112.4 | 112.5 |
| 112.8 | 113.0 | 113.6 | 113.9 | 113.9 | 114.3 | 116.8 | 118.3 | 122.7 | 124.6 |

Размах выборки *r=Xn-X1*=124.6-70.1= 54.5

На основе выше изложенной теории для исследования статистики составляем табл. 3.1.

Табл. 3.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Интервалы | Число попаданий в интервал | Частота попаданий в интервал | Высоты интервалов для гистограммы |
| 1. 70.10 - 75.55 2. 75.55 - 81.00 3. 81.00 - 86.45 4. 86.45 - 91.90 5. 91.90 - 97.35 6. 97.35 - 102.80 7. 102.80 - 108.25 8. 108.25 - 113.70 9. 113.70 - 119.15 10. 119.15 - 124.60 | 2  3  8  15  17  23.5  13.5  11  5  2 | 0.020  0.030  0.080  0.150  0.170  0.235  0.135  0.110  0.050  0.020 | 0.0036697  0.0055045  0.0146788  0.0275229  0.0311926  0.0431192  0.0247706  0.0201834  0.0091743  0.0036697 |
|  |  | Сумма 1.000 |  |

По построенной гистограмме (рис. 3.1) можно предположить, что данное распределение подчиняется нормальному закону. Для подтверждения выдвинутой гипотезы проведем оценку неизвестных параметров, для мат. ожидания

,



для оценки дисперсии

.



Полагая в выражении нормальной плотности

, где



и пользуясь, либо приложением 4 в учебнике Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.” Прикладные задачи теории вероятностей.” - М.: Радио и связь, 1983, либо как в нашем случае воспользоваться системой MathCad , получим значения на границах разрядов табл. 3.2 :

Табл. 3.2

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *f(x)* |
| 1. 70.10 2. 75.55 3. 81.00 4. 86.45 5. 91.90 6. 97.35 7. 102.80 8. 108.25 9. 113.70 10. 119.15 11. 124.60 | 0.0010445  0.0036354  0.0097032  0.0198601  0.0311717  0.0375190  0.0346300  0.0245113  0.0133043  0.0055377  0.0017676 |

и построим выравнивающую ее нормальную кривую рис. 3.1

Рассчитаем вероятность (табл. 3.3) попадания с. в. *Х* в *k*-й интервал по формуле



Табл. 3.3

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. 70.10 - 75.55 2. 75.55 - 81.00 3. 81.00 - 86.45 4. 86.45 - 91.90 5. 91.90 - 97.35 6. 97.35 - 102.80 7. 102.80 - 108.25 8. 108.25 - 113.70 9. 113.70 - 119.15 10. 119.15 - 124.60 | 0.0115694  0.0344280  0.0790016  0.1398089  0.1908301  0.2009057  0.1631453  0.1021833  0.0493603  0.0183874 |

Для проверки правдоподобия гипотезы воспользуемся критерием согласия для этого возьмем данные из табл. 3.1 и 3.3 и подставим в формулу :



Рис. 3.1

Определяем число степеней свободы (10-1-*l*)=7, где *l* - число независимых условий (количество параметров подлежащих оценки в нашем случаи их *l=*2, это *mx*, *Dx* - для нормального распределения). По приложению 3 в учебнике Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. ”Теория вероятностей и ее инженерные приложения.” - М.: Наука, 1988 находим при r=7, p=0.95 =2.17 для уровня значимости и видим, что , но даже меньше.



Это свидетельствует о том, что выдвинутая нами гипотеза о нормальности распределения не противоречит опытным данным.