**Математическая интуиция**

**Введение.**

Еще древних интересовали вопросы: как создается новое, откуда берется то, чего еще не было вчера, кто или что является его источником? И уже древние пытались на него ответить, создавая грандиозные мифологические, потом религиозно-философские, а затем и научные картины мира. Однако в отношении творений человека этот вопрос приобретал особую остроту. Ибо, во-первых, пути поиска нового, даже в одной области, зачастую очень сильно разнятся, а во-вторых, способность создавать новое присуща далеко не всем людям.

Деятельность человека, порождающая качественно новое, оригинальное и уникальное, получила название творчество. По-видимому, первые попытки рациональной реконструкции творческого процесса начались в античности, причем тогдашние мыслители имели в своем распоряжении достаточно развитую математику. Поэтому практически все их исследования так или иначе касались ее. Уже античные авторы заметили специфичность математики, которая заключалась в воплощении принципов логической последовательности выводов из принятых постулатов. В таком подходе они увидели идеал, к которому нужно было привести остальные области знания - философию, физику, астрономию и др. Но в последствии от этого отказались и на смену математическому идеалу пришли другие.

Дальнейшие исследования только подчеркнули обособленность математики, уникальность ее методов и выводов, что позволяет говорить нам об особом виде творчества - математическом творчестве. Нас будет интересовать вопрос, как осуществляется это творчество, т.е. появляется новое в математике, и какова роль интуиции в появлении этого нового. Кроме того, мы рассмотрим некоторые вопросы взаимоотношений математической интуиции и гуманитарного знания.

**Интуиция в математическом творчестве.**

“Чистая логика всегда приводила бы нас только к тавтологии; она не могла бы создать ничего нового…”

А. Пуанкаре [17, стр.210]

**Виды интуиции.**

Во введении мы отметили, что процесс открытия одного и того же может протекать у разных людей по-разному. Это не удивительно, т.к. в каждом таком случае мы имеем дело с творческой индивидуальностью, которая во многом определяется работой уникального органа – человеческого мозга. Раскрытие механизмов его работы могло бы дать точный ответ на наши вопросы. Но до сих пор эти механизмы остаются загадкой. Более того, современные исследования подчеркивают сложность их раскрытия. Так, И. Пригожин и И. Стенгерс приводили следующие интересные сведения: “В стадии глубокого сна в <электрической> активности головного мозга обнаруживается детерминистический хаос с фрактальным аттрактором в шестимерном пространстве<…> С другой стороны, в состоянии бодрствования конечномерный аттрактор не был идентифицирован. С точки зрения электрической активности мы имеем дело с истинной случайностью” [16, стр. 78]. Это говорит о том, что исследование процесса творчества через изучение функционирования головного мозга не может сегодня существенно помочь в достижении наших целей. Казалось бы, на этом можно ставить точку в попытке изучения творчества вообще и математического – в частности, объявив эту задачу пока неразрешимой. Такая негативная реакция вполне естественна. Однако, там где мы доходим до границ специального знания, где мы осознаем принципиальную ограниченность этого знания и где у нас возникает потребность перешагнуть эти границы, там у нас остается одно средство – это гипотеза и философский анализ проблемы. Здесь мы встаем на этот путь. Его суть заключается в изучении свидетельств субъектов творчества и его продуктов. Как мы увидим, такой путь позволит хотя бы частично ответить на заявленные вопросы.

Исследователи давно заметили два совершенно различных магистральных пути в понимании математики: геометрический (или топологический) и алгебраический. Геометрический способ понимания включает в себя оперирование наглядными идеями, привлечение чертежей и рисунков, отказ, хотя бы на этапе самого творения, от формул и вычислений, огрубляя, можно сказать так: геометрическое понимание – это сначала наглядное представление, потом формула. Под алгебраическим способом понимают полную противоположность геометрическому. Несмотря на то, что оба подхода можно достаточно четко идентифицировать, они не являются самодостаточными. Т. е. не всегда задача может быть сведена только к геометрии или только к алгебре. Заметим, что в истории были попытки такого сведения.

В VI в. до н. э. пифагорейцы выдвинули философский принцип – “все есть число”. И попытались все известные им закономерности свести к числовым соотношениям. Однако открытие проблемы несоизмеримости отрезков привело к отказу от этого принципа и переходу к геометрическому способу рассуждений. Такой подход просуществовал довольно долго. Например, Д. Кардано (1501-1576) при выводе своих знаменитых формул рассуждал примерно так: “… если куб со стороной β=α+*х* разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной α и куб со стороной *х,* получается, кроме двух кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами α, α, *х* и три – со сторонами α, *х, х;* соотношение между объемами дает

*х*3+3*х*2α+ 3*х*α2 +α3 = β3 ;

для перехода к

*х*3+3αβ*х* = β3-α3

параллелепипеды разных типов попарно объединяются.” [9, стр. 27]

Т. о. выглядела привычная нам выкладка 3*х*2α +3*х*α2=3*х*α (*х+*α)= 3*х*αβ (с учетом того, что *х*+α=β).

Переход на алгебраическую символику, в частности открытие аналитической геометрии, существенно упростили рассуждения. И позволил студентам-первокурсникам просто решать задачи, многие из которых потребовали бы значительных усилий у великих математиков древности.

Как видим, применение геометрического подхода в данной задаче затрудняло ее решение, а алгебраическая символизация существенно упростила ее понимание.

Более того, в любой содержательной задаче можно выделить как геометрическую, так и алгебраическую составляющие, причем составляющие независимые. Простой пример – это понятие действительного числа. Вот, что пишет по этому поводу Г. Вейль [8]: “Система действительных чисел подобна двуликому Янусу: с одной стороны – это совокупность алгебраических операций “+” и “” и им обратных, с другой – континуальное многообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел алгебраический, второй топологический.”

Необходимо отметить, что сочетание обоих подходов жизненно необходимо для развития математики. Мы частично продемонстрировали это на примере вывода формул Кардано. Приведем еще несколько свидетельств в пользу нашего вывода. Так, известно, что основную теорему алгебры невозможно доказать чисто алгебраическими методами. На каком-то этапе нам обязательно потребуется свойство непрерывности в той или иной геометрической интерпретации.

Или возьмем понятие группы Ли. Как отмечает выдающийся специалист в области группового анализа дифференциальных уравнений П. Олвер [12]:

“На первый взгляд группа Ли выглядит каким-то неестественным сочетанием алгебраического понятия группы, с одной стороны, и дифференциально- геометрического понятия многообразия <…>, однако <…> комбинация алгебры и анализа приводит к мощной технике для изучения симметрии … ” [12, стр. 37-38].

Итак, мы выделили два направления в понимании математики. Причем указали на их принципиальную взаимодополняемость или на то, что Г. Вейль называл “предустановленной гармонией между геометрией и алгеброй”. Изучение творчества реально действующих математиков показывает, что последние всегда тяготеют к какому-то одному из направлений. Классическим примером является школа теории функций К. Вейерштрасса с формально-алгебраической направленностью и топологическая теория алгебраических функций Г. Римана. Такое разделение скорее всего является не только действием окружающих факторов. Так, те же К. Вейерштрасс и Г. Риман творили в одно и то же время, в одной и той же культурной среде. Поэтому с большой долей вероятности можно утверждать, что в основе такого пристрастия лежат личные мотивы, основой которых является, при прочих равных условиях, физиологические особенности головного мозга конкретного ученого. В подтверждение сошлюсь на открытие, сделанное профессором Калифорнийского технического института Р. Сперри. Р. Сперри исследовал больных с перерезанным “мозолистым телом”, соединяющим два полушария мозга и доказал, что функции этих полушарий обладают определенной несимметричностью. За свои исследования Р. Сперри получил Нобелевскую премию по биологии и медицине в 1981 году. Коротко суть открытия Р. Сперри сформулировал академик В. И. Арнольд: “Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое – за пространственную ориентацию, интуицию и все необходимое для реальной жизни” [2, стр. 49].

Т. о., можно принять разделение математиков на “правополушарных” и “левополушарных”. “Левополушарных” будем еще называть аналитиками или алгебраистами. Рассмотрим более подробно “правополушарных” математиков. Эту категорию называют еще геометрами. Но в силу того, что “правополушарные” математики черпают свои идеи не только из пространственных представлений, такое название кажется слишком узким. Кроме, собственно, геометрических представлений к математическому открытию могут вести представления из смежных областей знания. Наиболее ярко это проявляется во взаимоотношениях математики и физики. Причем физика не только ставит задачи, она так же является поставщиком новых понятий и методов. Так, основные факты теории обобщенных функций появились исходя из чисто физических абстракций и были сформулированы и использованы задолго до строгих математических обоснований. А упоминавшийся выше В. И. Арнольд вообще указывает на “фундаментальное единство математики и физики” [6, стр. 10].

Физика долгое время была монопольным поставщиком задач, идей и методов в математику, и даже сегодня попытки отнять эту привилегию другими науками достаточно слабы на ее фоне. Поэтому математиков, исходящих в своем творчестве из представлений смежных наук, мы условно будем называть “физиками”.

Кроме этих двух типов, среди “правополушарных” математиков следует выделить математиков - “философов”, которые в своих исследованиях обращаются к философским представлениям. Потребность в таком подходе обычно проявляется в переломные моменты истории науки, за которыми лежат новые теории и целые направления в науке. История математики изобилует примерами такого рода. Философскими установками в своем творчестве пользовались И. Ньютон, Г. Лейбниц, Н.И. Лобачевский, Л. Брауэр, Д. Гильберт и др.

Итак, мы разделили всех действующих математиков на четыре типа – аналитики, геометры, физики и философы. И вплотную подошли к ответу на вопрос, что же лежит в основе акта творения?

А. Пуанкаре как-то заметил: “… для того, чтобы создать геометрию или какую бы то ни было науку, нужно нечто другое, чем чистая логика. Для обозначения этого другого у нас нет иного слова, кроме слова “интуиция” [17, стр. 210]. Принимая эту точку зрения, попытаемся показать, что каждому из четырех типов математиков присуща своя интуиция.

Сегодня под интуицией принято понимать способность мышления к непосредственным умозаключениям путем мысленного схватывания (“озарения”) без промежуточных обоснований и доказательств. По-видимому, ей принадлежит решающая роль в творчестве, поэтому остановимся на этом феномене и его роли в математическом открытии.

Обратимся снова к нашей классификации математиков. Мы разделили их по способу возникновения у них новых представлений, т. е. по способу понимания математики. Резонно предположить, что этот способ диктуется особым видом интуиции, присущим тому или иному типу математиков, т. е. существует четыре типа интуиции – аналитическая, геометрическая, физическая и философская.

Начнем с аналитиков. Обычно им отказывают в использовании интуиции в творчестве, полагая, что они идут к открытию умело оперируя логическим выводом и формулами. Подробно изучая этот вопрос, А. Пуанкаре отмечает, что оставаясь “искусными мастерами силлогизмов”, они “не смогли бы расширить границы науки” [17, стр. 216]. И для них он вводит особый вид интуиции – интуиции чистого числа, которая лежит в основе аналогий. Такая интуиция позволяет не выходить за рамки логического знания и поэтому избавляет его обладателя от логических ошибок. К математикам, которые обладают таким видом интуиции А. Пуанкаре отнес Ш. Эрмита. Но, наверное, самым ярким представителем аналитиков был Сринивада Рамануджан. С. Рамануджан родился в 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Свой путь в математике он начал с двухтомного руководства по тригонометрии Лони, которое он получил от студента из Мадраса в 14 лет. Затем в 16 лет он начал осваивать двухтомное руководство английского математика Карра. В этой книге было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств и с минимальными пояснениями. Эта книга оказала огромное влияние на его стиль творчества. Не имея представления о том, как проводить строгие доказательства, он формулировал совершенно нетривиальные утверждения. Ряд из них он отправил в Англию профессору Кембриджского университета Г.Г. Харди, который получил их в самом начале 1913 года. Увидев присланные формулы, Харди полагал, что человек, написавший их, владеет очень мощной техникой доказательств и может доказывать более общие результаты. Однако, когда по ходатайству того же Харди Рамануджан приехал в Лондон, оказалось, что никаких доказательств нет, есть только совершенно туманные объяснения. Оказалось, что Рамануджан просто “живет в мире формул”. Причем каждое, буквально, каждое число было его “другом”! Показателен случай, описанный Ч.П. Сноу: “Харди часто навещал Рамануджана, когда тот, умирая, находился в больнице в Патни. Именно в одно из таких посещений произошел “инцидент” с номером такси. Харди приехал в Патни на такси, воспользовавшись своим излюбленным транспортным средством. Он вошел в палату, где лежал Рамануджан. Начинать разговор Харди было мучительно трудно, и он произнес свою первую фразу: “Если не ошибаюсь, то номер такси, на котором я приехал, 1729. Мне кажется, это скучное число”. На что Рамануджан тотчас же ответил: “Нет, Харди! О нет! Это интересное число. Это самое малое из чисел, представимых в виде суммы двух кубов двумя различными способами”. [22, стр. 26].

Будучи в Англии и работая в тандеме с Г. Харди, С. Рамануджан сформулировал свои самые сильные результаты. Причем многие из них нашли свое доказательство уже после его смерти. Как видно, С. Рамануджан обладал уникальным даром. Вообще, появление математика с интуицией чистого числа очень редкое явление. И большинству математиков нужно привлекать к решению своих задач воображение, т. е. более наглядные виды интуиции. Рассмотрим их.

Геометрические интуиции привлекают к решению задач пространственные представления – непрерывность пространства, его связность, замкнутость, открытость и т. д. Замечательно, что воспитание геометрической интуиции начинают с демонстраций макетов фигур, чертежей, преобразующихся компьютерных рисунков. Это направление в преподавании математики обычно называют наглядной геометрией. Внутри нее, как мне кажется, уже сложилась некоторая система требований к подбору материала, способами и приемами его изображения. Причем освоение геометрии как таковой практически невозможно без этого базиса. Наиболее характерным примером здесь является книга В. В. Прасолова “Наглядная топология”.

Физические интуиции берут свое начало в образах окружающей действительности. Часто этот тип интуиции смешивают с геометрической, однако есть основания разделять их. Так, А. Пуанкаре, как пример геометрической интуиции, рассматривает решение Р. Клейном задачи о том, существует ли на данной поверхности Римана функция, допускающая данные сингулярности. При решении этой задачи Р. Клейн “заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам, и соединяет две точки ее с двумя полюсами элемента. Ток, говорит он, непременно пройдет, и распределение этого тока по поверхности определит функцию, особыми свойствами которой будут именно те, которые предусмотрены условием.”[17, стр. 206]. Как видно, Р. Клейн пользуется физическими представлениями, лежащими за пределами просто пространственного воображения.

Физические интуиции сыграли огромную роль в становлении математики. Мы уже отмечали, что физика долгое время была монопольным поставщиком содержательных задач для математики.

Уже первые попытки открыть законы движения дали математике множество задач и сформулировали много ее внутриматематических понятий. Например, Г. Галилей, изучая свободное падение, вначале предположил, что движение должно протекать по закону *v*=*c*·*S,* где *v* – скорость, *S* – путь, а *с* – постоянное число. Положив путь равным нулю в начальный момент времени, он неожиданно для себя обнаружил, что движение по такому закону происходить не может. И, отбросив этот вариант, он пришел к своим знаменитым уравнениям движения. Однако, уравнение *v*=*c*·*S* продолжило свою жизнь в исследованиях шотландца Д. Непера, который, посчитав путь в нулевой момент времени отличным от нуля, получил показательную функцию, число *е* и логарифмы.

Дальнейшее развитие механики породило дифференциальное и интегральное исчисление, теорию дифференциальных уравнений и топологию. Рождение же неклассической механики стимулировало теорию вероятностей и математическую статистику, функциональный анализ и теорию меры.

Интересно то, что, ставя задачи, физика одновременно предлагала математике пути их решения. Возьмем хотя бы теорию уравнений в частных производных. Сами названия и соотношения ее конструкций несут на себе печать физических представлений (потенциал двойного слоя, интеграл энергии, резонанс и т. д.). Более того, попытка формулировки в этой теории чисто математических задач, оторванных от реальности (в частности, попытка построить общую теорию уравнений в частных производных) – ведет к “вырождению важной общематематической теории в бесконечный поток работ “об одном свойстве одного решения одной краевой задачи для одного уравнения” [3, стр. IX].

Обратимся теперь к философским интуициям. Как уже отмечалось, они вступают в дело в переломные моменты истории. В силу того, что наличие таких интуиций практически не описано, я для большей убедительности приведу два, на мой взгляд, ярких примера из истории математики. Первый – это попытка создания интуиционистской программы обоснования математики.

Всего программ обоснования было три – логицизм, интуиционизм и формализм. История создания каждой потребовала от разработчиков незаурядных способностей в философии математики. Однако, по моему мнению, интуиционизм был наиболее экстравагантной программой, т. к. в центр ее ставился человек, что согласитесь, было и остается вызовом для математического знания.

Считается, что интуиционизм родился в 1907 году, когда появилась диссертация Л. Брауэра “Об основаниях математики”. В противовес этой точке зрения современный исследователь интуиционизма М. И. Панов полагает, что рождение его произошло несколько ранее – в 1905 году. Он связывает эту дату с выходом другой работы Л. Брауэра – “Жизнь, искусство и мистицизм”. На первый взгляд этот труд очень далек от математики. И если прочитать те немногие отрывки, которые доступны на русском языке и содержатся в нескольких работах М. И. Панова, то такое мнение только укрепляется. Но все это лишь на первый взгляд. Вот одна из выдержек: “Интеллект напрямую связан с языком. Жизнь приносит в интеллект невозможность самому непосредственным образом – при помощи жеста или взгляда инстинктивно (или более нематериально) через все препятствия – устанавливать отношения друг с другом”, и далее ”<…> никто никогда не смог при помощи языка передать свою душу <…>” [13] И вместе с этим вспомним, что в обосновании интуиционизма Л. Брауэр подчеркивал, что математические построения осуществляются на интуитивном уровне в доязыковой форме, причем “<…> истинным в математике может считаться лишь то, что является интуитивно ясным.” [14, стр. 144]. А необходимость общения и сохранения результатов, требующая их закрепления в языке вела к вычленению логического каркаса, т. е., другими словами, к появлению логики, и затем к потребности в конструировании математических объектов.

В своих исследованиях Л. Брауэр широко использовал интроспекцию – психологический метод, заключающийся в самонаблюдении человека за психологическими реакциями своего сознания. С его помощью он ввел в интуиционизм понятие “идеального математика” или “творящего субъекта”.

Так, одним из основных понятий интуиционизма является свободно становящаяся последовательность, которая предполагает свободный выбор “идеального математика” и формируется в соответствии со следующими правилами: “а) положение какого-либо члена последовательности, определенного актом свободного выбора, не изменяется от результатов последующих актов; б) выбор можно оборвать на любом шаге” [14, стр. 133].

Из всего сказанного видно, что Брауэр–философ предшествовал Брауэру-математику.

Успешность интуиционистской программы обоснования математики позже была поставлена под сомнение Д. Гильбертом. Его философская составляющая так же вызывала много споров [см., например: 15, Глава 4]. Однако, интуиционизм как математическая теория доказал свою жизненность и необходимость в трудах ученика Л. Брауэра А. Гейтинга и нашего соотечественника А. А. Маркова.

Второй пример необходимости философских интуиций в математике мы возьмем из несколько другой области, описав появление неевклидовой геометрии. Честь создания этой геометрии принято делить между тремя учеными в неравной пропорции – между Н.И. Лобачевским, К. Гауссом, Я. Бойяи. До них основным руководством по геометрии на протяжении двух тысяч лет служили “Начала” Евклида. Естественно, что они были детально изучены. И на протяжении двух столетий геометров привлекала особая роль пятого постулата Евклида. Во-первых, он формулировался очень длинно: “если прямая, пересекая две другие прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекаются с той стороны от третьей прямой, с которой лежат упомянутые выше углы”. Во-вторых, Евклид впервые воспользовался своим постулатом лишь в 28 предложении.

Все это вело к попыткам доказать пятый постулат, исходя из первых четырех, но все они оказывались безуспешными. Первым, кто усомнился в необходимости этого доказательства, был К. Гаусс. Однако король математики, опасаясь за свою репутацию, не высказал своих идей публично. И впервые они были опубликованы в трудах нашего соотечественника Н.И. Лобачевского, который пришел к ним самостоятельно и, кроме того, развил их в достаточно стройную теорию.

Вначале, он как и все пытался доказать пятый постулат. В сохранившихся записях его лекций от 1816-1817 г.г., содержится такая попытка. Но вскоре ученый понимает тщетность усилий в этом направлении.

Следующим этапом к осознанию новой геометрии послужил труд «Геометрия». В нем он четко проследил какие утверждения не зависят от пятого постулата (их он собрал в первых пяти главах) и какие зависят, т.е. не могут быть получены ни каким образом без его использования. Другими словами он четко выделил то, что сегодня называют абсолютной геометрией. Такое разделение послужило отправной точкой дальнейших размышлений. Которые были реализованы в сочинении «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Оно было представлено научной общественности 11 февраля 1826 года на заседании Отделения физико-математических наук. Основой труда служило допущение, что через точку С, лежащую вне прямой АВ, плоскости АВС проходит несколько прямых, не встречающих АВ. Это короткое высказывание переворачивало все прежние интуитивные представления. И закономерно, что открытие Н.И. Лобачевского было понято лишь по истечении 12 лет после смерти математика. Тот факт, что поворотное допущение столь просто, но влечет за собой большие следствия, свидетельствует о глубоком философском анализе, которому он подверг предшествовавшею ему геометрию. Очевидно, что этот анализ не мог протекать в рамках самой математики и потребовал привлечения внешних, по отношению к ней, соображений.

Из приведенных примеров видно, что философские представления, а если угодно, интуиции, являются необходимыми и крайне полезными на этапе создания новых теорий, причем там им принадлежит решающая роль.

Итак, мы выделили четыре типа интуиции. Можно подумать, что их применение ограничивается только теми областями, названия которых они наследуют в своих именах. Но это далеко не так! Более того, история математики показывает, что как раз вторжение ученых в смежные области может быть очень продуктивным и для этих областей и для самих ученых.

Ж. Дьедоне [11] называет этот процесс переносом интуиции. В своем исследовании он рассматривает взаимодействие теории многообразий, теории аналитических многообразий и теории чисел. И уже на примере работ Римана доказывает всю не очевидность и в то же время эффективность этого взаимодействия. Так, Риман, применив математический анализ к алгебраической геометрии, создал новую теорию, называемую бирациональной алгебраической геометрией кривых. Затем, используя учение о мероморфных функциях на римановой поверхности, он переходит “к понятию из чистой алгебры – полю рациональных функций кривой, которое является попросту конечным расширением поля рациональных дробей над комплексными числами” [11]. Далее, Ж. Дьедоне разворачивает поистине грандиозную картину взаимодействия трех теорий, в которую кроме Римана были вовлечены Дедекинд, Вебер, Куммер, Гендель и др. Такие же процессы наблюдаются не только внутри математики (т. е. не только по линиям аналитическая интуиция – геометрия, геометрическая интуиция - алгебра). Так, в уже цитированном интервью В. И. Арнольда, последний замечает: “топология полезна в квантовой теории, а методы квантовой теории поля приводят иногда к трудным топологическим результатам” [6]. Т. е. здесь мы имеем дело с линиями геометрическая интуиция – физика, физическая интуиция – геометрия.

“Я возлагал на ночь большие надежды <…>. Правильное решение было теперь настолько близко, что мой разум мог совершить последний шаг и во сне. Я счел полезным еще раз мысленно перебрать основные пункты своих рассуждений.”

Шестиугольник. [5, стр. 282]

**Механизмы интуиции**

После того, как мы выделили основные типы интуиции и обосновали их существование, естественным желанием является попытка вскрыть механизмы их работы. Тут мы должны быть благодарны А. Пуанкаре за то, что он оставил уникальный самоанализ собственного процесса математического открытия в статье “Математическое творчество”. В ней он привел рассказ о том, как был написан мемуар о фуксовых функциях. Вкратце эта история выглядит так. В течение двух недель он пытался доказать, что функций, подобных тем, которые он впоследствии назвал фуксовыми, не существует. Каждый день он тратил один – два часа и безрезультатно перебирал большое число комбинаций. Но однажды вечером он выпил чашку черного кофе и не мог заснуть. И затем с ним произошло следующее: “<…> идеи возникали во множестве и мне казалось, что я чувствую, как они сталкиваются между собой, пока, наконец, две из них, как бы сцепившись друг с другом, не образовали устойчивого объединения. Наутро я установил существование класса функций Фукса <…> мне оставалось лишь сформулировать результат, что отняло у меня всего несколько часов”. [17, стр. 404-405] на этом он не обрывает своего повествования, однако для наших целей этого отрывка достаточно, тем более что дальнейшее лишь подтверждает общую схему.

В анализе творческого акта А. Пуанкаре указывает на большую роль бессознательного. Он считает, что в процессе так называемого “отдыха” между сеансами сознательной работы (часто безуспешной) бессознательное создает огромное число комбинаций, большая часть которых абсолютно бесполезна. Далее они все пропускаются через решето особенного эстетического чувства, знакомого каждому реально действующему математику. Это чувство отбирает лишь те математические предметы, “…элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали” [17, стр. 410] (вспомним, что интуиция – это способность к свернутым умозаключениям). Особенно важно, что это чувство может приводить к заблуждениям, на что также указывает А. Пуанкаре.

Анализируя процесс математического творчества, Ж. Адамар выделил следующий ряд его этапов [1]. (Интересно сравнить с приведенным выше рассказом А. Пуанкаре). Первый этап – это “подготовка”, когда происходит сознательное исследование проблемы; второй этап – “инкубация”, когда проблема как бы вытесняется в подсознание и исследователь может вообще забыть о ней; третий этап – “озарение”, когда решение проблемы вдруг неожиданно “прорывается” в сознание (иногда этот этап сопровождается психологическим предчувствием); и последний этап заключается в проверке и теоретическом оформлении результатов.

Наиболее загадочным из них является третий. Именно в этот момент по гипотезе Пуанкаре в дело вступает некое особенное эстетическое чувство. Что же лежит в основе этого чувства? На основании чего делается вывод о гармонии между исследуемыми математическими объектами? Эти вопросы, безусловно, сложны (даже само понятие эстетического чувства - гипотетично). Однако все же можно сделать некоторые предположения. По-видимому, в основе эстетического чувства лежат пласты априорного и неявного знания. К априорному знанию как основе математики и математического знания обращались многие философы и математики. Так, И. Кант в своем фундаментальном труде “Критика чистого разума” вопрос о том, как возможна математика, как наука, сводил к вопросу: как возможны синтетические суждения априори? Л. Э. Брауэр положил его в основу своей программы обоснования. А. Пуанкаре так же обращался к этой теме. Например, он считал: “<…> все мы обладаем интуицией непрерывности любого числа измерений, ибо мы имеем способность построить физическую и математическую непрерывности, что эта способность существует в нас до всякого опыта <…>” [17, стр. 580].

Априорное знание при этом у различных философов имеет разные истоки. Так, В.Я.Перминов выводит априоризм и его общезначимость из практической деятельностной ориентации познающего человека. Он полагает, что “представления, лежащие в основе математических понятий, - не абстракции и не теоретические идеализации, а интуиции, проистекающие из деятельностной ориентации познающего субъекта” [15, стр. 47].

Г.Фоллмер и с ним все последователи эволюционной эпистемологии считают, что априорные структуры – “продукт эволюции [и они] принадлежат к генетическому оснащению, когнитивному “инвентарю” индивида, они являются унаследованными и врожденными в широком смысле, поэтому не только независимы от всякого (индивидуального!) опыта, но имеются до опыта и делают вообще опыт возможным ” [20, стр. 157].. Т. о. видно, что вопрос об истоках существования априорного знания требует отдельного исследования. Однако нам достаточно того, что оно существует.

Кроме априорного мы указали на существование неявного знания. Под ним подразумевается то знание, “которым мы пользуемся неосознанно” [19, стр. 68]. Некоторые исследователи считают априорное знание частью неявного. Однако я полагаю, что их следует разделять. Так, априорное знание носит ярко выраженный интрсубъективный характер, тогда как неявное – изначально субъективно, либо зависимо от социокультурных факторов. Так вот, априорное и неявное знание служит тем базисом, с которым мышление соотносит результат работы бессознательного. И если объекты из бессознательного хорошо коррелируют с этим базисом, то это служит сигналом к “прорыву” и “озарению”.

“В ”Госпоже Ленин” хотел

найти “бесконечно малые”

художественные слова”

В. Хлебников.

**Математические интуиции и человеческая культура.**

Нет нужды доказывать, что математика имеет большое значение для человеческой культуры. Грандиозные достижения человечества – полеты в космос, вычислительная техника и др. не обходятся без применения математики. Т. о., опосредованно через нее и математическая интуиция оказывает большое влияние на окружающий нас мир. Но здесь речь пойдет не об этом вполне очевидном выводе. Поговорим о таких явлениях в человеческой культуре, когда математическая интуиция становится сама явлением культуры или порождает таковые.

Современный математик, публикуя результаты своих исследований, стремится сделать свой текст как можно более формальным. Основное внимание при этом уделяется логической строгости, и из публикуемой работы изгоняются все неявные и интуитивные установки. Такой подход позволяет самому математику и окружающему его математическому сообществу быть уверенными в правильности доказанных результатов. У этого явления есть и другая сторона медали. Зачастую такой текст понятен лишь небольшой группе специалистов в данном вопросе. Если же его захочет понять неспециалист, то ему необходимо затратить немало времени и усилий, чтобы по формальному тексту сформировать необходимые интуитивные представления и соотнести их между собой, либо ему необходимо получить эти представления от специалистов. Этот процесс передачи неформальных представлений можно часто наблюдать на лекциях и семинарах, когда преподаватель делает “лирические” отступления. Именно в нем по-видимому кроется секрет школы и традиции. Недаром А. Гротендик отметил, что “наука живет связью между людьми и преемственностью поколений” [10, стр. 137].

Необходимость передавать и формировать у обучающихся интуитивные представления привела к рождению целого пласта учебной литературы, авторы которой избегают чисто формальных выкладок и стремятся к наглядности изложения. Причем это в первую очередь книги по геометрии и математической физики (интересно, что в школьной программе именно геометрия адекватнее всего отражает современный взгляд на математическую строгость). Среди авторов таких учебников следует отметить В.И. Арнольда, В,В, Прасолова, А.Т. Фоменко и др. Попытки же донести математические идеи до более широкой публики ведут к рождению совершенно удивительных произведений. Человек не в силах наглядно представить себе искривленное пространство размерностью больше трех. Однако, в математике с большими размерностями встречаются сплошь и рядом. При этом используются специфические интуиции, стоящие далеко за рамками наглядности. Попытки доступно описать эти интуиции привели к рождению удивительных по своему качеству произведений, далеко выходящих за рамки методики обучения. Я имею ввиду особый жанр литературы и искусства, главным героем которых является математическая интуиция. Например, роман Э. Эбботта “Флатландия” [25] и его продолжение, написанное Д. Бюргером “Сферландия”, хотя и призваны выработать у читающего представления о связности, ориентации, размерности и кривизне пространств, читаются как увлекательные приключения. А читатели всемирно известного романа Л. Кэрролла “Алиса в Стране Чудес”, вообще часто забывают о его истинном предназначении.

Кроме попыток описать геометрические интуиции были попытки их нарисовать. Здесь, в качестве первого примера я сошлюсь на творчество голландского графика М.Эшера. Особенностью его творчества было виртуозное изображение на плоскости “невозможных” конструкций и пространственных построений, а также использование зрительных иллюзий, причем большинство мотивов так или иначе были взяты из геометрии.

Следующим примером являются графические листы нашего соотечественника выдающегося геометра А.Т. Фоменко. В своей книге “Наглядная геометрия и топология” [21] он дает этим изображениям чисто математическую интерпретацию, понятную специалистам, однако сами изображения сделали бы честь любой выставке современного искусства.

Большой потенциал в этой связи имеет компьютерная геометрия. Особенно это проявилось после удачных экспериментов по получению изображений множеств дробной размерности или по-другому фракталов. Группа западных ученых стала выставлять их на обозрение широкой публике. Причем публика восприняла это с большим энтузиазмом, и выставки пользовались неизменным успехом. Интересно, что людей не интересовала истинная природа фракталов, их привлекали и привлекают необычные яркие многоцветные изображения и только они. Т. о., можно говорить об особом направлении в изобразительном искусстве.

Еще один пример жизни математических интуиций в искусстве дает нам творчество русского поэта Велимира Хлебникова. Время его жизни пришлось на конец XIX – начало XX века – время бурных перемен в мировом политическом устройстве, науке, в частности, физике и, конечно, искусстве. И В. Хлебников оказался в этом водовороте. Широкое образование, способность быстро усваивать и перерабатывать новые идеи позволило создать ему творения, которые трудно с чем-либо спутать. И не последнюю роль в них играла математика. Чего стоит, например, такая фраза: “В “Госпоже Ленин” хотел найти “бесконечно малые” художественного слова” [23, стр. 7]. Он вжился в мир математических абстракций и заставил их жить нематематической жизнью. Вот как он сам описывает процесс осмысления геометрии Лобачевского:

“Мир с непоперечными кривыми”

Во дни “давно” и весел

Сел в первые ряды кресел

Думы моей,

Чей занавес уже поднят.” [цит., по: 24].

Обнаружив большую значимость в естествознании числа , он придал ему в своих литературных поисках всеобщий характер: “Пора научить людей извлекать вторичные корни из себя и из отрицательных людей. Пусть несколько искр больших искусств упадет в умы современников.” [23, стр. 51]. Творчество Хлебникова не просто литературная пеленица с математическим уклоном. Исследователи отмечают глубину его проникновения в интуитивный мир науки. И фраза “Хлебников – с одной стороны, Вавилов, Планк, Эйнштейн – с другой, питались одной и той же мифологией, почерпая из нее исходные интуиции” [24] не лишена оснований. В заключение предпринятого обзора рассмотрим проявления математических интуиций во взаимоотношениях математики и гуманитарных наук. Нас не будет интересовать математическое моделирование в этих науках. Хотя, бесспорно, при составлении и изучении модели используется широкий набор математических интуиций. Однако, здесь они “живут” внутри модели, подчиняются математическим закономерностям. Для нас же сейчас интересна ситуация, когда представления, рожденные в математике, отрываются от нее, переносятся в другую науку и начинают жить по законам этой науки. Причем переносится само представление без сопутствующих определений, формул и т. д. Поясним сказанное на примере. Вот выдержка из современной монографии, посвященной самоорганизации в социальных системах: “… траектория социального цикла имеет как буфуркационные зоны стохастического выбора <…>, так и более устойчивые <…> участки развития…” [7, стр.287]. Итак, в одном предложении мы встречаем по крайней мере три математических термина – траектория, бифуркация, стохастический. Первые два заимствованы из качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, третий является синонимом случайности. Как и указывалось выше, они используются сами по себе, без какого-либо соотнесения с породившей их математической теорией. Но самое интересное состоит в том, что их определения в этой книге соответствуют тем интуитивным представлениям, которые обычно формируются при изучении соответствующего математического определения. Происходит своего рода неформальная вербализация интуитивного образа математического объекта. Этот процесс напоминает своеобразную математизацию, отличную от классического ее понимания. Так, классическая математизация накладывает жесткие требования на объект моделирования. По мнению Г.И. Рузавина, “объективной основой применения математических методов <…> служит качественная однородность изучаемых <…> классов явлений” [18, стр. 189]. Он же указывает, что “в социальных и гуманитарных науках выделение однородного качества и его математического изучения сопряжены с большим числом трудностей, так как при этом приходится учитывать и такие субъективные факторы, как воля, цели, ценностные ориентировки и мотивации людей” [18, стр. 191]. В нашем же случае условия диктует гуманитарная наука. Она органично вплетает в себя математические представления. Причем целесообразность такого “вплетения” определяется на интуитивном уровне. Такая математизация сейчас очень популярна. Многие работы по философии, социологии, экологии пестрят терминами – нелинейность, бифуркация, флуктуация, диссипативная система, стохастический, фракталы и т. д. Об эффективности этого подхода судить пока еще трудно. Но для нас важно, что он есть.



**Выводы.**

В работе вопрос о механизме математического творчества сведен к изучению видов математической интуиции и раскрытию ее механизмов. Выделяется четыре типа интуиций: аналитическая, геометрическая, физическая и философская. Конечно, это разделение условное. В реальности математики почти никогда не пользуются только одним типом интуиции. Так, “правополушарные” математики могут быть одновременно геометрами, физиками и философами. Примерами таких математиков могут служить А. Пуанкаре, Н.И. Лобачевский и др.

Надо также отметить, что важную роль в творчестве играет перенос интуиции. В работе это хорошо показано на примере переноса физической интуиции в геометрическую, когда Р. Клейн “…заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам… ”.

На мой взгляд, очень важно выделение философской интуиции. Она проявляется в предельных ситуациях и способствует возникновению новых теорий и направлений в науке.

Математическая интуиция применяется как напрямую, в таких областях науки, как экономика, так и косвенно – в искусстве, музыке, литературе и т. д. Поэтому важно развивать математическую интуицию не только у математиков. Это необходимый багаж для любого образованного человека. К слову, премьер-министр России Витте был по образованию математиком. Жизнь его сложилась так, что он не стал заниматься математикой, но применял математическую интуицию в жизни. Вот что пишет о нем В.И. Арнольд [2, стр. 28]: “Конечно, сила Витте заключалась вовсе не в применении какой-либо математики (“исчисления”), а в том способе мышления, который он называет “математикой-философией” и который заставляет человека с математическим образованием думать о всех реалиях окружающего мира с помощью (сознательного или бессознательного) мягкого математического моделирования.”