**Математические понятия**

Термин "понятие" обычно применяется для обозначения мысленного образа некоторого класса вещей, процессов, отношений объективной реальности или нашего сознания.

Математические понятия отражают в нашем мышлении определенные формы и отношения действительности, абстрагированные от реальных ситуаций.

Каждое понятие объединяет в себе класс объектов (вещей, отношений) - объем этого понятия - и характеристическое свойство, присущее всем объектам этого класса, и только им, - содержание этого понятия. Например, понятие "треугольник" соединяет в себе класс .всевозможных треугольников (объем этого понятия) и характеристическое свойство - наличие трех сторон, трех вершин, трех углов (содержание понятия); понятие "уравнение" соединяет в себе класс всевозможных уравнений (объем понятия) и характеристическое свойство - равенство, содержащее одну или несколько переменных (содержание понятия).

Содержание понятия раскрывается с помощью определения, объем - с помощью классификации. Посредством определения и классификации отдельные понятия организуются в систему взаимосвязанных понятий.

Формирование понятий - сложный психологический процесс, начинающийся с образования простейших форм познания - ощущений - и протекающий часто по следующей схеме: ощущения - восприятие - представление - понятие.

Обычно разделяют этот процесс на две ступени: чувственную, состоящую в образовании ощущений, восприятия и представления, и логическую, заключающуюся в переходе от представления к понятию с помощью обобщения и абстрагирования.

Чувственная ступень в процессе формирования понятий соответствует первому этапу пути познания вообще, т. е. "живому созерцанию", и поэтому ее осуществление требует широкого применения наглядности. Если ученику никогда не показывали модель куба или предметы, имеющие форму куба, то у него не может образоваться представления, а следовательно, и понятия куба.

Процесс формирования понятий будет эффективным, если он ориентирует учащихся на обобщение и абстрагирование существенных признаков (характеристического свойства) формируемого понятия.

Рассмотрим процесс формирования понятий на примере понятия куба.

Детям (6-7лет) показывают много предметов, отличающихся формой, размерами, окраской, материалом, из которого они сделаны, причем таких, что одни из них имеют форму куба, а другие нет. Дети, после того как им показывают на одно из этих тел и говорят, что это куб, безошибочно отбирают все те тела, которые имеют такую же форму, пренебрегая различиями, касающимися размера, окраски, материала. Здесь выделение из класса предметов подкласса, отождествление тел производится по одному еще недостаточно проанализированному признаку - внешней форме. Дети еще не знают свойств куба, они распознают его только по форме.

Дальнейшая работа по формированию понятия куба состоит в анализе этой формы с целью выяснения ее свойств. Учащимся предлагают путем наблюдения найти, что есть общего у всех отобранных тел, имеющих форму куба, чем они отличаются от остальных. Устанавливается, что у каждого куба 8 вершин, 6 граней. Но у некоторых тел, которые мы не отнесли к кубам, тоже 8 вершин и 6 граней. Оказывается, у куба все грани - квадраты (эта работа обычно проводится после аналогичной работы по выделению класса квадратов из множества плоских фигур).

Остается один шаг к образованию понятия куба - переход от представления к понятию путем абстрагирования, т. е. отделения общих свойств от г^рочих, несущественных. Разумеется, на начальном этапе обучения нельзя еще говорить о полном абстрагировании этих свойств, у детей еще не образовывается понятие куба в чистом виде, они еще не определяют куб и противопоставляют его прямоугольному параллелепипеду с различными измерениями. В дальнейшем же, когда будет сконструирована логически упорядоченная система геометрических понятий (в рамках систематического курса геометрии), учащиеся узнают, что куб - это вид прямоугольного параллелепипеда. В этом - диалектика развития понятий.

Приведенный пример показывает, что процесс формирования понятий, как правило, длительный процесс, способствующий развитию обобщающей и абстрагирующей деятельности учащихся.

Однако формирование математических понятий не всегда протекает по приведенной выше схеме, начинающейся с ощущений. В частности, когда формируемое понятие связано, в той или иной форме, с категорией бесконечности (как, например, понятия прямой, плоскости, плотности множества рациональных чисел, предела и др.), то чувственная ступень играет меньшую роль, так как мы не в состоянии воспринимать бесконечное (ни в какой форме), и наглядность из средства, способствующего формированию понятия, иногда становится тормозящим фактором.

Например, бесконечность множества рациональных чисел, лежащих между любыми двумя рациональными числами, не подкрепляется, а, наоборот, "опровергается" конкретным восприятием конечного отрезка, содержащего это множество. Свойство плотности множества рациональных чисел нельзя обнаружить опытным путем, оно не подтверждается наглядными геометрическими представлениями, а устанавливается логически. Этот и другие многочисленные примеры подтверждают выводы наших психологов о том, что восприятие наглядного материала в силу объективных особенностей этого материала может играть не только положительную, но и отрицательную роль.

Заключительным этапом формирования понятия, как правило, является его определение.

В математике и в обучении математике применяются различные способы определения понятий.

Наиболее часто, особенно в обучении геометрии, встречается определение "через ближайший род и видовое отличие". Примером такого определения является следующее: Прямоугольник есть параллелограмм с прямым углом. Как видно, это определение состоит из двух частей: "прямоугольник" - определяемое понятие и "параллелограмм с прямым углом" - определяющее понятие. Связка "есть" (иногда вместо "прямоугольник есть..." говорят "прямоугольником называется...") означает здесь, что термин "прямоугольник" (вновь введенный) обозначает то же понятие, что и выражение "параллелограмм с прямым углом", составленное из ранее уже известных терминов ("параллелограмм", "прямой угол").

Анализируя определяющее понятие "параллелограмм с прямым углом", выделяем понятие "параллелограмм" (ближайший род) и свойство "наличие прямого угла" (видовое отличие). Название "ближайший род" оправдано тем, что не выделено другое понятие, объем которого включается в множество параллелограммов и включает множество прямоугольников. Если бы мы определили прямоугольник как четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и имеется прямой угол, то мы получили бы, как видно, более громоздкое определение именно потому, что понятие "четырехугольник" не является ближайшим родом для прямоугольника (имеется понятие "параллелограмм", объем которого включается в множество четырехугольников и включает множество прямоугольников), и поэтому усложнилось характеристическое свойство (видовое отличие).

Общая схема определения "через ближайший род и видовое отличие" может быть записана на языке множеств (классов).:

В={х | х А и Р(х)}



(класс В состоит из объектов х, принадлежащих А - ближайшему роду - и обладающих свойством Р - видовым отличием).

В нашем примере В - определяемый класс прямоугольников (или свойство "быть прямоугольником"), А - класс параллелограммов (или свойство "быть параллелограммом"), Р - свойство "наличие прямого угла".

Такое определение является явным определением, в котором четко (явно) выделены определяемое и определяющее понятия. Оно позволяет нам заменить при необходимости одно понятие другим. Очень часто такой заменой пользуемся в доказательствах теорем.

Однако не все математические понятия могут определяться таким образом. Процесс формально-логического определения, как видно из приведенного выше примера, есть процесс сведения одного понятия к другому, с более широким объемом, второго - к третьему, с еще более широким объемом, и т. д. Процесс сведения не может быть бесконечным. Должны быть некоторые исходные, первоначальные понятия, которые неопределяемы через другие понятия данной теории, так как им не предшествуют никакие другие понятия этой теории. В процессе обучения должны создаваться такие педагогические ситуации, которые помогли бы учащимся открыть характерную особенность системы математических понятий, связанную с дедуктивным построением теории. Для этой цели можно использовать различный конкретный материал. Например, можно построить такую последовательность определений:

П1: квадрат - ромб с прямым углом;

П2: ромб - параллелограмм с равными смежными сторонами;

П3: параллелограмм - четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны;

П4: четырехугольник - многоугольник с четырьмя сторонами;

П5: многоугольник - фигура, ограниченная замкнутой ломаной линией;

П6: фигура - множество точек.

Как видно, этот процесс сведения одних понятий к другим доходит до понятий "множество" и "точка", которые принимаются за первоначальные и именно поэтому не определяются через другие понятия.

Итак, первоначальные, исходные понятия не определяются явным образом через другие понятия данной теории. Это, однако, не означает, что они никак не определяются. В аксиомах выражаются основные свойства исходных понятий и отношений между ними, которыми пользуются при развертывании теории на базе этих аксиом, т. е. при доказательстве теорем и определении других (определяемых) понятий. Поэтому системы аксиом можно рассматривать как неявные, косвенные определения исходных понятий. Таким образом, когда говорят, например, что понятия "точка" и "прямая" - исходные понятия и поэтому не определяются, надо это понимать точнее: "не определяются явно через другие понятия".

Один и тот же раздел школьного курса математики может строиться с помощью различных систем понятий, различающихся между собой порядком введения понятий или самими понятиями. Выбор исходных понятий не определяет однозначно последовательность изучения понятий системы. Система понятий оказывается лишь частично упорядоченной. Например, в традиционной системе понятий стереометрии такие понятия, как "угол скрещивающихся прямых" и "перпендикулярность прямых и плоскостей", могут изучаться в любом порядке. В учебнике А. П. Киселева угол скрещивающихся прямых изучался после перпендикулярности и поэтому перпендикулярность прямых в пространстве, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах формировались лишь в частных случаях. В результате такого расположения материала учащиеся изучали теорему о трех перпендикулярах лишь для случая, когда прямая на плоскости проходит через основание наклонной, и не могли видеть ее применение в задачах, где прямая на плоскости не проходит через основание наклонной. В большинстве же случаев именно такая ситуация наблюдается в задачах.

Об определении не имеет смысла говорить, истинно оно или ложно. Определение может бить правильным (корректным) или неправильным (некорректным) в зависимости от того, удовлетворяет оно или нет определенным требованиям.

Важнейшим требованием, предъявляемым к определениям, является отсутствие порочного круга. Нарушение этого требования проявляется в том, что определяемое содержится (явно или неявно) в определяющем. Например, фразы: "Решение уравнения - это то число, которое является его решением", "Подобными называются фигуры, которые между собой подобны" - не могут служить определениями решения уравнения и подобных фигур соответственно, так как в каждом из этих предложений содержится порочный круг.

Порочный круг может относиться не к отдельному определению, а к двум или нескольким определениям. Например, в двух определениях: "Угол называется прямым, если его стороны взаимно перпендикулярны" и "Две прямые взаимно перпендикулярны, если они образуют прямой угол" - имеется порочный круг, так как в одном понятие прямого угла определяется через перпендикулярные прямые, а в другом это второе понятие определяется через первое.

Другое важное требование, выполнение которого необходимо для корректности определения, - это отсутствие омонимии: каждый термин (символ) должен встретиться не более одного раза в качестве определяемого. Нарушение этого требования приводит к тому, что один и тот же термин (символ) обозначает различные понятия, т. е. нарушается один из принципов употребления символов или терминов в качестве имен.

Определенные языковые выражения (символы искусственного языка или термины, слова или группы слов естественного языка) выполняют функцию обозначения. Они сопоставляются определенным классам объектов (вещей, отношений) или их мысленным образам (понятиям) в качестве названий, имен.

Связь имен с их значениями (с обозначаемыми ими объектами) отражает связь мышления с речью. Формирование понятий возможно лишь при условии их именования, т. е. приписывания им определенных имен. Поэтому важно напомнить принципы корректного употребления имен.

1) Принцип предметности: предложение говорит о предметах, имена которых встречаются в этом предложении (а не об их именах). Например, предложение "3 < 5" говорит о том, что число, обозначенное цифрой 3, меньше числа, обозначенного цифрой 5, т. е. говорит о числах, а не об их именах, встречающихся в этом предложении; предложение "Треугольник - многоугольник" говорит о том, что класс объектов, обозначаемых термином "треугольник", является подклассом класса объектов, обозначаемых термином "многоугольник", т. е. говорит об объектах, имена которых встречаются в этом предложении, а не о самих этих именах.

2) Принцип однозначности: каждый символ (термин), используемый в качестве имени, обозначает не более одного объекта, иными словами, каждое имя имеет не более одного значения. Почему не говорим, что каждое имя имеет точно одно значение, а говорим: "не более одного значения"? Например, утверждая, что число а нельзя делить на 0, мы не утверждаем, что невозможна запись "а: 0"; эта запись столь же допустима, как, например, запись "о: 2". Утверждается лишь отсутствие объекта, имя которого есть языковое выражение "а: 0", т. е. это выражение не является именем какого-либо числа, или это имя без значения.

Нарушение принципа однозначности имеет серьезные последствия, особенно в обучении, так как это означает применение имен с более чем одним значением, приводящее к путанице и смещению понятии.

3) Принцип замены имен: предложение не меняет своего истинностного значения, когда одно из входящих в него имен заменяется другим именем, имеющим то же самое значение (т. е. синонимом).

Различные имена одного и того же предмета часто поразному характеризуют его, с помощью различной информации о нем. В таком случае говорят, что имена имеют одно и то же значение, но различные смыслы. Например, одна и та же прямая может обозначаться символом "а" или символом "АВ". Первое из этих именпростое имя, произвольно закрепляемое за прямой (мы можем обозначить эту же прямую буквой b ), рассматриваемое как неделимое. Второе имя "AB" - составное имя, содержащее другие имена ("A", "В") в качестве своих частей и обладающее строением, отражающим тот способ, которым оно обозначает предмет (прямую, проходящую через точки А и В). Вполне понятно, что второе, составное имя обладает большей познавательной ценностью. Оно сообщает нам, что обозначаемая этим именем прямая проходит через точки А и В.

Таким образом, в отношении именования участвуют три различных понятия: "имя", "значение имени", "смысл имени". Говорят, что имя называет свое значение и выражает свой смысл (или что оно имеет такоето значение и такой-то смысл), а смысл определяет значение.

Из сказанного следует, что надо различать выражения "Не имеет смысла" и "Не имеет значения". Например, в области натуральных чисел имя "корень уравнения х + 4 = 3" не имеет значения. В то же время это имя имеет ясный смысл: это такое число, что после подстановки его вместо х в данное уравнение слева и справа от знака равенства получатся имена одного и того же числа. Точно так же в области действительных чисел имя "" не имеет значения, но имеет смысл (такое число, что после возведения его в квадрат получится число - 4) или имя "2 : 0" не имеет значения, но имеет смысл (число, которое, будучи умножено на 0, дает 2).



В школьном преподавании необходимо тщательно следить за тем, чтобы употребляемые термины и символы имели определенные смысл и значение.

Не все явные определения можно отнести к определениям через ближайший род и видовое отличие. Приведем примеры:

(1) "Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости",

(2) "Число а делится на число b, если существует число с такое, что а = b \* с",

В каждом из этих определений новое отношение (определяемое) определяется через ранее известные отношения (определяющие): перпендикулярность прямой и плоскости - через перпендикулярность прямых, отношение "делится на" - через отношение "быть произведением". Все эти определения являются явными, но в них нельзя выделить ближайший род и видовое отличие.

Применяемый здесь знак "" читается: "означает по определению" или "тогда и только тогда по определению".



Добавление "по определению" существенно потому, что, хотя словесные формулировки явных определений имеют вид повествовательных предложений, эти предложения не выражают высказывания (в том смысле, в каком термин "высказывание" понимается в математической логике), так как бессмысленно говорить об их истинности или ложности. Поэтому, в частности, нет смысла их доказывать или опровергать. С логической точки зрения словесные формулировки определений ближе к повелительным, чем к повествовательным предложениям, их можно рассматривать как приказы или разрешения пользоваться одним выражением (определяемым) вместо другого, более громоздкого (определяющего).

Знание определения еще не гарантирует усвоения понятия. Один из аспектов формализма в математических знаниях состоит именно в том, что некоторые учащиеся, зная точную формулировку определения, не распознают определяемый объект в различных ситуациях, где он встречается. Поэтому методика обучения должна разрабатывать систему работы с определениями, чтобы преодолеть возможный формализм в их усвоении.

Важное место в этой работе занимает обучение распознаванию объекта, соответствующего данному определению, и построению разного рода контрпримеров. Для этой цели необходимо ясно представить себе структуру определения.

Под структурой определения, построенного по схеме А(х) В(х) понимают структуру его правой части, т. е. предложения "В". В школьной математике встречаются определения различной структуры, порой довольно сложной, и, чем сложнее структура определения, тем более тщательной должна быть работа по его разъяснению, по предупреждению формального усвоения.



Одна из наиболее распространенных структур определений - конъюнктивная структура.

Пока индуктивные определения редко встречаются в школьном обучении, но, учитывая их широкое распространение и значение в математике (рекурсивные функции - одно из математических уточнений интуитивного понятия алгоритма), можно предполагать, что их применение в обучении математике будет постепенно разширяться.

Мы уже говорили о том, что содержание понятия раскрывается с помощью определения (явного или неявного), а объем - с помощью классификации.

Часто классификация состоит из многоступенчатого разбиения множества объектов на два класса с помощью некоторого свойства (двучленное деление, или "дихотомия", в терминах классической логики).

Методически полезными могут оказаться и схемы без слов.

Для наглядного представления классификации можно воспользоваться и так называемыми диаграммами Эйлера - Венна, в которых различные классы объектов изображаются в виде множеств точек, ограниченных простыми замкнутыми линиями.

С помощью диаграмм Эйлера - Венна можно выполнить широкое разнообразие упражнений, способствующих систематизации знаний учащихся, правильному пониманию отношений между различными понятиями. Они служат также аппаратом для анализа некоторых классов рассуждений (о которых пойдет речь дальше).

Значение деятельности по классификации (одного из важных видов умственной деятельности) далеко выходит за рамки усвоения математических знаний. Необходимость классифицировать возникает в любой области человеческой деятельности. Этому нужно учить в школе.