# Математические суждения и умозаключения

1. В мышлении понятия не выступают разрозненно, они определенным способом связываются между собой. Формой связи понятий друг с другом является суждение. В каждом суждении устанавливается некоторая связь или некоторое взаимоотношение между понятиями, и этим самым утверждается наличие связи или взаимоотношений между объектами, охватываемыми соответствующими понятиями. Если суждения правильно отображают эти объективно существующие зависимости между вещами, то мы такие суждения называем истинными, в противном случае суждения будут ложными. Так, например, суждение "всякий ромб является параллелограммом" - истинное суждение; суждение "всякий параллелограмм является ромбом" - ложное суждение.

Таким образом, суждение - это такая форма мышления, в которой отображается наличие или отсутствие самого объекта (наличие или отсутствие каких-либо его признаков и связей).

Мыслить - значит высказывать суждения. С помощью суждений мысль, понятие получают свое дальнейшее развитие.

Так как во всяком понятии отображается определенный класс объектов, явлений или взаимоотношений между ними, то всякое суждение можно рассматривать как включение или невключение (частичное или полное) одного понятия в класс другого понятия. Например, суждение "всякий квадрат есть ромб" указывает, что понятие "квадрат" включается в понятие "ромб"; суждение "пересекающиеся прямые не являются параллельными" указывает, что пересекающиеся прямые не принадлежат множеству прямых, называемых параллельными.

Суждение имеет свою языковую оболочку - предложение, однако не всякое предложение является суждением.

Характерным признаком суждения является обязательное наличие истинности или ложности в выражающем его предложении.

Например, предложение "треугольник АВС равнобедренный" выражает некоторое суждение; предложение "Будет ли АВС равнобедренным?" не выражает суждения.

Каждая наука по существу представляет собой определенную систему суждений об объектах, являющихся предметом ее изучения. Каждое из суждений оформляется в виде некоторого предложения, выраженного в терминах и символах, присущих этой науке. Математика также представляет собой определенную систему суждений, выраженных в математических предложениях посредством математических или логических терминов или соответствующих им символов. Математические термины (или символы) обозначают те понятия, которые составляют содержание математической теории, логические термины (или символы) обозначают логические операции, с помощью которых из одних математических предложений строятся другие математические предложения, из одних суждений образуются другие суждения, вся совокупность которых и составляет математику как науку.

2. Вообще говоря, суждения образуются в мышлении двумя основными способами: непосредственно и опосредованно. В первом случае с помощью суждения выражается результат восприятия, например "эта фигура -т- круг". Во втором случае суждение возникает в результате особой мыслительной деятельности, называемой умозаключением. Например, "множество данных точек плоскости таково, что их расстояние от одной точки одинаково; значит, эта фигура - окружность".

В процессе этой мыслительной деятельности обычно осуществляется переход от одного или нескольких связанных между собой суждений к новому суждению, в котором содержится новое знание об объекте изучения. Этот переход и является умозаключением, которое представляет собой высшую форму мышления.

Итак, умозаключением называется процесс получения нового суждениявывода из одного или нескольких данных суждений. Например, диагональ параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника (первое суждение).

Сумма внутренних углов треугольника равна 2d (второе суждение).

Сумма внутренних углов параллелограмма равна 4d (новое суждение-вывод).

Познавательное значение математических умозаключений чрезвычайно велико. Он" расширяют границы наших знаний об объектах и явлениях реального мира в силу того, что большая часть математических предложений является выводом из сравнительно небольшого числа основныхo суждений, которые получены, как правило, путем непосредственного опыта и в которых отражены наши наиболее простые и общие знания об его объектах.

Умозаключение отличается (как форма мышления) от понятия и суждения тем, что оно представляет собой логическую операцию над отдельными мыслями.

Не всякое сочетание суждений между собой представляет собой умозаключение: между суждениями должна существовать определенная логическая связь, отражающая объективную связь, существующую в реальной действительности.

Например, из суждений "сумма внутренних углов треугольника равна 2d" и "2\*2=4" нельзя сделать вывод.

3. Понятно, какое значение в системе наших математических знаний имеет умение правильно строить различные математические предложения или делать выводы в процессе рассуждения. Разговорный язык плохо приспособлен для выражения тех или иных суждений, а тем более для выявления логической структуры рассуждений. Поэтому естественно, что возникла необходимость усовершенствования языка, используемого в процессе рассуждения. Математический (а точнее, символический) язык оказался для этого самым подходящим. Возникшая" в XIX в. специальная область науки - математическая логика не только полностью решила проблему создания теории математического доказательства, но и оказала большое влияние на развитие математики в целом.

Формальную логику (возникшую еще в глубокой древности в трудах Аристотеля) не отождествляют с математической логикой (возникшей в XIX в. в работах английского математика Дж. Буля). Предметом формальной логики является изучение законов взаимосвязи суждений и понятий в умозаключениях и правилах доказательства. Математическая логика отличается от формальной логики тем, что она, исходя из основных законов формальной логики, исследует закономерности логических процессов на основе применения математических методов: "Логические связи, которые существуют между суждениями, понятиями и т. д., находят свое выражение в формулах, толкование которых свободно от неясностей, какие легко могли бы возникнуть при словесном выражении. Таким образом, для математической логики характерна формализация логических операций, полнее абстрагирование от конкретного содержания предложений (выражающих какое-либо суждение).

Проиллюстрируем сказанное одним примером. Рассмотрим следующее умозаключение: "Если все растения красные и все собаки - растения, то все собаки красные".

Каждое из используемых здесь суждений и то суждение, которое мы получили в результате сдержанного умозаключения, кажется явной бессмыслицей. Однако с точки зрения математической логики мы имеем здесь дело с верным предложением, так как в математической логике истинность или ложность умозаключения зависит только от истинности или ложности составляющих его посылок, а не от их конкретного содержания. Поэтому если одним из основных понятий формальной логики является суждение, то аналогичным ему понятием математической логики является понятие высказывания-утверждения, для которого имеет смысл лишь говорить, истинно оно или ложно. Не следует думать, что для каждого высказывания характерно отсутствие "здравого смысла" в его содержании. Просто содержательная часть предложения, составляющего то или иное высказывание, в математической логике отходит на второй план, несущественна для логического построения или анализа того или иного вывода. (Хотя, конечно существенна для. понимания содержания того, о чем идет речь при рассмотрении o данного вопроса.)

Понятно, что в самой математике рассматриваются содержательные высказывания. Устанавливая различные связи и отношения между понятиями, математические суждения утверждают или отрицают какие-либо отношения между объектами и явлениями реальной действительности.

**Математические понятия, предложения и доказательства**

Школьная математика включает начальные фрагменты различных математических теорий (арифметики, алгебры, геометрии, математи-ческого анализа) в содержательном (неформальном) изложении. В обучении математике на любом уровне мы имеем дело с понятиями, предложениями и доказательствами, и усвоение математических зна-ний сводится, в конце концов, к усвоению определенной системы поня-тий, предложений и доказательств последних. К тому же задача обучения состоит не только в усвоении учащимися теоретических знаний, но и в привитии им умений и навыков применять эти знания, не только в усвоении определенных доказательств, но и в приобрете-нии умения рассуждать, доказывать.

Отличительная черта математики состоит в том, что в ней исполь-зуется символический язык как рабочий аппарат. В школьном обу-чении мы применяем, как правило, словесно-символический язык, включающий элементы и символического языка математики, и есте-ственного словесного языка.

Изучение математики включает изучение языка математики, но не сводится только к нему. Другой важной чертой математического зна-ния является его логическая структура. Понимание логической струк-туры определений понятий, предложений теории (аксиом и теорем) и доказательств является необходимым условием усвоения этого знания.

В настоящей главе и рассматриваются язык и логика математики с точки зрения обучения математике. При этом использован логиче-ский аппарат, известный студентам и необходимый будущим учите-лям. Разумеется, этот аппарат не входит явно в школьное обучение (мы не рассматриваем здесь вопросы углубленного изучения матема-тики). Однако он помогает учителю найти способ разъяснения языка и логики математики учащимся без явного его использования. Многое из того, что остается неявным для учащихся в обучении математике, должно быть выявлено в методической подготовке учителя матема-тики.