**Системы линейных уравнений**

**1. Критерий совместности**

Система линейных уравнений имеет вид:

a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn = b1

a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn = b2 (5.1)

... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ...

am1x2 + am2x2 +... + amnxn = bm

Здесь аij и bi (i = ; j = ) - заданные, а xj - неизвестные действительные числа. Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему (5.1) в виде:



AX = B, (5.2)

где A = (аij) - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (5.1), которая называется матрицей системы, X = (x1, x2,..., xn)T,

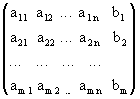
B = (b1, b2,..., bm)T - векторы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных xj и из свободных членов bi.

Упорядоченная совокупность n вещественных чисел (c1, c2,..., cn) называется решением системы (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных x1, x2,..., xn каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор C= (c1, c2,..., cn)T такой, что AC ≡ B.

Система (5.1) называется совместной, или разрешимой, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется несовместной, или неразрешимой, если она не имеет решений.

Матрица

Ã = ,



образованная путем приписывания справа к матрице A столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

Вопрос о совместности системы (5.1) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера- Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц A и Ã совпадают, т.е.

r(A) = r(Ã) = r.

Для множества М решений системы (5.1) имеются три возможности:

1) M = Ø (в этом случае система несовместна);

2) M состоит из одного элемента, т.е. система имеет единственное решение (в этом случае система называется определенной);

3) M состоит более чем из одного элемента (тогда система называется неопределенной). В третьем случае система (5.1) имеет бесчисленное множество решений.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда

r(A) = n. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных (m ≥ n); если m > n, то m-n уравнений являются следствиями остальных. Если 0 < r < n, то система является неопределенной.

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые системы крамеровского типа:

a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn = b1

a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn = b2 (5.3)

... ... ... ... ... ... ... ... ... ...

an1x2 + an2x2 + ... + annxn = bn

Системы (5.3) решаются одним из следующих способов: 1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных; 2) по формулам Крамера;3) матричным методом.

**2. Метод Гаусса**

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

**3. Формулы Крамера**

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим главный определитель системы (5.3), т.е. определитель матрицы А

Δ = det (aij)

и n вспомогательных определителей Δi (i = ), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.



Формулы Крамера имеют вид:

Δ · xi = Δi (i = ). (5.4)



Из (5.4) следует правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы (5.3): если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

xi = Δi / Δ.

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители Δi = 0 (i = ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы Δ = 0, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.



**4. Матричный метод**

Если матрица А системы линейных уравнений невырожденная, т.е.

det A ≠ 0, то матрица А имеет обратную, и решение системы (5.3) совпадает с вектором C = A-1B. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле X = C, C = A-1B называют матричным способом решения системы, или решением по методу обратной матрицы.