Міністерство освіти і науки України

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Реєстраційний №\_\_\_\_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**КУРСОВА РОБОТА**

з математичних методів дослідження операцій

**Тема: Лінійна залежність –мірних векторів. Програма.**

Рекомендована до захисту

“\_\_\_\_” \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2007р.

Робота захищена

“\_\_\_\_” \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2007р.

з оцінкою

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Підписи членів комісії

***Зміст***

Вступ

Теорія

Опис програми

Текст програми

Контрольні приклади

Висновки

Література

**Вступ**

Дана робота присвячена введенню, одного з найважливіших понять, яке використовується не тільки в алгебрі, але й в багатьох інших розділах математики. Дамо просте визначенню *лінійної залежності* системи векторів в мірному просторі.

**Визначення (\*)** Система векторів  називається лінійно залежної, якщо існує такий набір коефіцієнтів , з яких хоча б один відмінний від нуля, що .

Система векторів, що не є лінійно залежної, називається лінійно незалежної. Але останнє визначення краще сформулювати по іншому.

**Визначення (\*\*)** Система векторів  називається лінійно незалежної, якщо рівність  можлива тільки при .

**Теорія**

**Припущення 1** *Система векторів*  *лінійно залежний тоді і тільки тоді, коли один з векторів системи є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи.*

*Доведення*.

Нехай система векторів лінійно залежна. Тоді існує такий набір коефіцієнтів , що , причому хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля. Припустимо, що . Тоді:

,

тобто  є лінійною комбінацією інших векторів системи.

Нехай один з векторів системи є лінійною комбінацією інших векторів. Припустимо, що це вектор , тобто . Очевидно, що . Одержали, що лінійна комбінація векторів системи дорівнює нулю, причому один з коефіцієнтів відмінний від нуля (дорівнює ).

**Припущення 2** *Якщо система векторів містить лінійно залежну підсистему, те вся система лінійно залежна.*

Доведення.

Нехай у системі векторів  підсистема , , є лінійно залежної, тобто ,, і хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля. Тоді складемо лінійну комбінацію ,. Очевидно, що ця лінійна комбінація дорівнює нулю, і що серед коефіцієнтів є ненульовий.

**Припущення 3**  *Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор нульової.*

*Доведення*.

Нехай система складається з вектора . Лінійна комбінація має вид . Якщо , то , тобто система лінійно залежна. Якщо  і , то .

**Припущення 4** *Система, що складається з двох векторів, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.*

Доведення цієї пропозиції тривіальне – воно аналогічно доказу наступного припущення.

**Припущення 5**   *Система з трьох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.*

*Доведення*.

Нехай вектори  - компланарні. Якщо  - колінеарні, то в силу попереднього пропозиції вони утворять лінійно залежну підсистему системи . За ***припущенням 2*** система  - лінійно залежна. Якщо вектори  - не колінеарні, то  є лінійною комбінацією векторів  і за ***припущенням 1*** система векторів  - лінійно залежна.

Нехай система векторів лінійно залежна. За  ***припущенням 1*** один вектор, скажемо , є лінійною комбінацією інших векторів,  і , . Права частина останньої рівності лежить у площині, у якій лежать вектори . Тому вектор  лежить в одній площині з векторами , тобто вектори  - компланарні.

**Припущення 7** *Чотири вектори завжди утворять лінійно залежну систему.*

*Доведення*. Якщо перші три вектори є компланарними, то вони утворять лінійно залежну підсистему (***припущення 5***). Отже, уся система лінійно залежна (***припущення 2***). Якщо перші три вектори – не компланарні, то четвертий є їхньою лінійною комбінацією. За  ***припущенням 1*** система є лінійно залежної.

Фактично ми маємо справу з лінійною однорідною системою рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Якщо дана система має нульовий розв‘язок, то вектори будуть лінійно незалежними, Якщо ж крім нульового система має ще й ненульовий розв‘язок, то дані вектори лінійно залежні.

Перерахуємо наступні властивості:

Якщо система векторів містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна

Якщо система векторів містить лінійно-залежну підсистему векторів, то вона буде лінійно - залежною.

Якщо система векторів лінійно-незалежна, то і будь-якій її підсистемі буде лінійно незалежною.

Якщо система векторів містить хоча б один вектор, що є лінійною комбінацією інших векторів, то ця система векторів буде лінійно залежною.

Поняття лінійної залежності має досить глибокий зміст і широко використовується в математиці. Не вдаючись в подробиці наведемо наступні застосування цього поняття.

Всяка упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається базисом цього простору. Неважко переконатися в еквівалентності цього означення і означення базисів у просторах .

Максимальне число лінійно незалежних векторів деякого простору називається його розмірністю. Розмірність простору дорівнює числу базисних векторів цього простору.

Максимальне число лінійно незалежних стовпчиків матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків , і це число дорівнює рангу матриці.

Отже зважаючи на все вище сказане дамо загальне визначення *базису*:

**Визначення 1** Базисом векторного простору називається така упорядкована лінійно незалежна система векторів, що будь-який вектор простору розкладається по векторах цієї системи.



***Опис програми***

Програма визначення лінійної залежності або незалежності векторів написана на мові програмування Turbo Pascal та працює за відносно простим алгоритмом роботи – розв‘язком системи лінійних рівнянь та подальшої її перевірки на умову незалежності векторів.

Головна процедура системи - ***Procedure Lineq*** – відповідає за розв‘язок системи рівнянь та знаходження коефіцієнтів. Початкові дані (вектори) вводяться стандартним способом з клавіатури в базовій частині програми у вигляді матриці дійсних чисел. В останньому боці програми після виклику ***Procedure Lineq*** – виконується перевірка умови залежності з масиву знайдених розв’язків – ***Ex*** . В результаті роботи програми на екран буде виведене остаточне повідомлення стосовно лілейної залежності або не залежності представлених векторів.

***Текст програми***

Program Linijna\_Zaleshnist\_Nezaleshnist;

Const Dim1 = 20

Dim2 = 21;

{dim2=dim1+1}

Type Ar1 = Array[1..Dim1,1..Dim2] of Real;

Ar2 = Array[1..Dim1] of Real;

Var n:Integer; {Rozmirnist}

i,j:Integer; {Dodatkovi zmini}

S:Ar1 {Golovna matrica};

Ex:Ar2 {Vihidnij razvjazok}

Cod:Byte;

e:Real;

Procedure Lineq(a:Ar1;

n:Integer;

e:Real;

Var x:Ar2);

Var i,j,k:Integer;

y,w:Real;

Begin

For i:=1 to n do

Begin

k:=i;

y:=a[i,i];

{------------------------------------------}

For j:=i+1 to n do

Begin

If(abs(w)>abs(y)) Then Begin k:=j;y:=w;End;

End;

{------------------------------------------}

If(abs(y)<e)Then Begin Write('ЌҐ ‚Ё§­ зҐ­®');Halt(0);End;

{------------------------------------------}

For j:=i to n+1 do

Begin

w:=a[k,j];a[k,j]:=a[i,j];a[i,j]:=w/y;

End;

{------------------------------------------}

For k:=i+1 to n do

Begin

For j:=n+1 Downto i+1 DO a[k,j]:=a[k,j]-a[i,j]\*a[k,i];

End;

{------------------------------------------}

End;

For i:=n Downto i DO

Begin

w:=0;

For j:=i+1 to n Dod w:=w+a[i,j]\*x[j];

x[i]:=a[i,n+1]-w;

End;

{-----------------------------}

Begin {Golovna programa upravliinja}

ReadLn('Vvedit rozmirnist - N ?',n);

Cod:=0;e:=0;

{---------------}

For i:=1 to n do

Begin

For j:=1 to n do

Begin

Write('Input a[',i,',',j,']');ReadLn(S[i,j]);

End;

End;

{---------------}

Procedure Lineq(S,n,e,Ex); {Viklik golovnogo modulja!}

{---------------}

For i:=1 to n do

Begin

If(Ex[i]<>0)Then Begin Cod:=1;End; {Perevirka umovi}

End;

{---------------}

If(Cod=1)Then Begin WriteLn('Вектори залежні');End

Else Begin WriteLn('Вектори не залежні ');End;

End;

***Контрольні приклади***

*Приклад 1.*

Вхідні дані:

A=(1;2;3) B=(0;1;2) С=(1;3;-1)



Вихідні дані:  - Задані вектори лінійно незалежні.

*Приклад 2.*

Вхідні дані:

A=(1;-1;2) B=(10;1;1) С=(2;-1;6)



Вихідні дані:  - Задані вектори лінійно незалежні.

*Приклад 3.*

Вхідні дані:

A=(3;-2;1) B=(-1;1;-2) С=(2;1;-3) D=(11;-6;5)



Вихідні дані:  - Задані вектори лінійно залежні.

**Висновки**

В даній курсовій роботі була розглянута важлива проблема визначення лінійної залежності та незалежності систем мірних векторів в просторі та запропонований програмний код на мові програмування Turbo Pascal для її розв’язку. Дана детальна теоретична характеристика цього питання та запропоновано ряд припущень та тверджень. Результатом роботи є автономний програмний модуль, який дозволяє в автоматичному режимі на основі попередніх даних дати відповідь на головне питання роботи – лінійну залежність чи незалежність тої чи іншої системи векторів в просторі.

На основі сконструйованої в цій роботі програми, було розв‘язано декілька практичних – тестових задач, лістинг (вхідні та вихідні дані) яких приведений у відповідному розділі роботи. Текст програми та коментарі відносно її структури також знаходять і основній частині курсової роботи.

**Література**

**1.** А. Б. Баратків “ Turbo Pascal - алгоритми і програми”, Київ, “Вища школа”, 1992.

**2.** С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. И. Хацет «Алгебра и теория чисел», Том 2,«Высшая школа», Киев 1976

**3.** В. П. Дубовик, І.І. Юрик “Вища математика”, Університетська бібліотека, Київ 2001

**4.** А. Г. Курош «Курс высшей алгебры», «Наука», Москва 1975

**5.** С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. И. Хацет «Алгебра и теория чисел», Том 1,«Высшая школа», Киев 1974