**ФУНКЦІЙ ТЕОРІЯ,** розділ математики, що займається вивченням властивостей різних функцій. Теорія функцій поділяється на дві області: теорію функцій дійсного змінного і теорію функцій комплексного змінного, відмінність між якими настільки велика, що звичайно їх розглядають як дві різні галузі. Не вдаючись в деталі, можна сказати, що по суті мова йде про відмінність, з одного боку, в детальному вивченні основних понять математичного аналізу (таких, як неперервність, диференціювання, інтегрування і т.п.), а з іншого боку, в теоретичному розвитку аналізу конкретних функцій, представлених степенними рядами. Одним з досягнень теорії функцій дійсної змінної стало створення теорії інтегрування.

**ФУНКЦІЇ ДІЙСНОГО ЗМІННОГО**

Функції, що використовуються в елементарному аналізі, задаються формулами. Їх графіки звичайно можна накреслити, не відриваючи олівець від паперу, як, наприклад, графік функції *у* = sinx, або вони складаються з окремих шматків, що володіють цією властивістю, як, наприклад, графік функції *у* = tgx

Спочатку, коли загальнодоведене визначення неперервності було відсутнє, всі функції, графіки яких складалися з однієї частини, вважалися обов'язково незперервними. Наприклад, вважалося, що незперервною можна вважати функцію, графік якої не може лежати по обидві сторони від прямої, не перетинаючи її. Інакше кажучи, неперервна функція, приймаючи які-небудь два значення, неодмінно приймає і всі проміжні значення. Однак неважко знайти функції, які, хоч і задані формулами і володіють вказаною властивістю, не мають властивостей безперервних. Наприклад, функція *f(*х)= sin(1/х) при х? *0* і f(0)= 0 володіє властивістю, про яку йде мова, однак, на думку багатьох, не є неперервною. Можна побудувати ще більш дивні приклади функцій, що приймають дійсне значення на будь-якому, навіть малому інтервалі, але проте не є безперервними. Графіки таких функцій не тільки неможливо накреслити, але іноді навіть чітко уявити. З іншого боку, роботи Ж.Фурье (1768 1830) і П.Діріхле (1805 1859), пов'язані з рядами Фурье показали, що деякі явно розривні функції задаються формулами, принаймні, якщо в число останніх включити нескінченні ряди.

Логічні труднощі, що виникли при цьому були поступово подолані за допомогою прийому, типового для теорії функцій: поняттям «функція» і «неперервність» були дані суворі визначення і досліджені витікаючі з них логічні висновки. Виявилося, що ці висновки не знаходяться відповідно точному до інтуїції, про що свідчать приведені приклади. Один з самих знаменитих прикладів такого роду був запропонований К.Вейерштрассом (1815 1897) приклад безперервної, але функції, що ніде (ні в одній точці) не диференціюється. У математика, що стикнувся з таким прикладом, може виникнути багато питань, наприклад, «У яких безперервних функцій існують похідні?», або «Як можна змінити поняття похідною, щоб воно стало застосовним до більшості безперервних функцій?», або «Якими додатковими властивостями володіють функції, що недиференціюються? ». Проблемами такого роду і займається теорія функцій дійсного змінного.

Перше, що потрібно від теорії функцій, дати визначення поняття «функції». Функція це правило, яке кожному числу (або кожній точці) з даної безлічі ставить у відповідність інше число, зване значенням функції в цій точці. Наприклад, одна функція ставить у відповідність кожному дійсному числу його квадрат, інша ставить у відповідність кожному позитивному дійсному числу його логарифм, третя функція ставить у відповідність кожному раціональному числу, записаному у вигляді нескоротного дробу, знаменник цього дробу. Всі названі функції мають різні області визначення; областю визначення функції називається безліч точок, на якій вона визначена.

Функція називається безперервної в точці, якщо будь-якому нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція, безперервна у всіх точках області визначення, називається безперервної. Наприклад, функція, що приймає в точці *х* значення *x2*, безперервна; але функція, що приймає в точці *х* значення, рівне найближчому до *х* цілого числа, не перевершуючого *х*, безперервної не є. Дійсно, значення цієї функції змінюється стрибком з 0 на 1, коли *х* змінюється від значення, меншого 1/2 на сколь бажано малу величину, до значення, більшого 1/2, на сколь бажано малу величину. На формальній математичній мові можна сказати, що функція *f*, що приймає значення *f(*х)*,* безперервна в точці у *в* тому випадку, якщо для будь-якого позитивного числа? *знайдеться* таке число? , *що* для всіх точок х *з* області визначення f(х)*,* *що задовольняють* умові ¦х *у¦* <*?* , виконується нерівність ¦f(х) f(*у)*¦ <?.

Можна показати, що безперервні функції, областями визначення яких є підмножини безлічі дійсних чисел, володіють численними властивостями, деякі з яких інтуїтивно очевидні, а деякі немає. Наприклад, сума або вироблення безперервних функцій також безперервні. Якщо безперервна функція в деякій точці позитивна, то завжди знайдеться досить мала її околиця, в якій вона залишиться позитивною. Якщо безперервна функція приймає в двох точках різні значення *а* і *b*, то в проміжних точках вона приймає всі значення, укладені між *а* і *b.* Із останньої властивості можна укласти, наприклад, що якщо розтягнутій гумці дати стиснутися таким чином, щоб вона залишалася прямолінійною (не провисала), то одна з точок на ній залишиться нерухомою.

Функції, з якими доводиться мати справу в математичному аналізі, як правило, всюди безперервні в області їх визначення, за винятком, бути може, окремих ізольованих точок. У той же час було побудовано багато прикладів різних функцій як розривних, так і немає, що володіють властивостями, що суперечать інтуїції.

Хоч сума двох безперервних функцій безперервна, а отже, безперервна і сума будь-якого кінцевого числа безперервних функцій, аналогічне твердження для нескінченних сум невірне. Наприклад, нескінченна сума

є періодичною (з періодом 2*?)* розривною функцією, що приймає значення 0 при *х* = 0 і (1/2)(? *x*) в інтервалі від 0 до 2*?* (мал. 3). Для того, щоб ряд з безперервних функцій обов'язково мав безперервну суму, необхідні більш сильні умови, ніж збіжність в кожній точці загальної області визначення функцій. З іншого боку, межа безперервних функцій або повторна межа має всі основи вважатися формулою, і один з розділів теорії функцій займається проблемою з'ясування, якого роду функції представимы такими формулами. Згідно з класифікацією розривних функцій, запропонованої Р.Бером (біля 1899) безперервні функції належать 0-му класу, межі безперервних функцій належать 1-му класу і т.д. Функція, графік якої зображений на мал. 3, належить 1-му класу; функція

що приймає значення 1 при раціональних *х* і 0 при ірраціональних *х*, належить 2-му класу. Існують функції, що належать класу сколь бажано великого порядку, а також функції, що взагалі не належать якому-небудь класу Бера.

Були побудовані приклади, що показують, що безперервна функція необов'язково повинна мати похідну в кожній точці. У.Діні в 1877 запропонував нове визначення похідною, застосовне до будь-якої функції і що дозволяє замінити звичайну похідну в багатьох додатках. Аналіз функцій за допомогою різних узагальнень похідних дозволив виявити багато які властивості розривних функцій і показав, що більшість функцій загального вигляду володіють внутрішньою симетрією.

Одним з важливих класів функцій є так звані монотонні функції, тобто або що зростають, або що убувають. (Що Зростає називається функція, яка большим значенням змінної з області визначення ставить у відповідність большие значення функції.) Різниця двох зростаючих функцій володіє властивістю, відомою під назвою «обмежена варіація», що означає, що графік такої різниці не може здійснювати дуже сильні коливання; кожна функція обмеженої варіації записується у вигляді різниці двох монотонних функцій. Лише ті функції, які «зшиті» з кінцевого числа монотонних функцій, можуть бути досить переконливо представлені в графічному вигляді. Нарешті, монотонна функція майже всюди диференціюється.

Хоч не всі безперервні функції диференціюються, багато які функції, що диференціюються зустрічаються на практиці, і всі функції, що диференціюються безперервні. Як приклад властивостей функцій, що диференціюються приведемо теорему Ролля, яка затверджує, що якщо дійсна функція безперервна на деякому відрізку, має в кожній його точці похідну, а на кінцях приймає рівні значення, то на цьому інтервалі існує хоч би одна точка, в якій похідна цієї функції рівна нулю. Геометричне значення цієї теореми полягає в тому, що на графіку такої функції існує така точка, що належить заданому інтервалу, що в ній дотична до графіка паралельна осі *x.* Отсюда неважко вивести так звану *теорему про середнє*: якщо функція *f* безперервна і диференціюється на відрізку і *а* і *b*  дві точки, що належать цьому відрізку, то

*f (*b) f (*a)* = *(*b a)*f?* *(*з*),*

де *з*  деяка точка між *а* і *b*.

Іншою важливою властивістю дійсної функції є опуклість. Кажуть, що функція опукла вниз, якщо дуга її графіка, укладена між будь-якими двома точками, лежить нижче з'єднуючої їх хорди (мал. 4). Можна показати, що функція опукла вниз, якщо для будь-якого інтервалу, стягуюча його хорда, знаходиться вище за криву. Опукла вниз функція диференціюється всюди, крім, бути може, рахункового числа «зламів», а її похідна сама є зростаючою функцією.

Ще одним типовим прикладом задач теорії функцій дійсного змінного може служити задача апроксимації даної функції функціями певного роду. Якщо аппроксимирующие функції суми синусів або косинусів, то це центральна задача гармонічного аналізу; на практиці тут часто є внаслідок представлення даного коливання сумою гармоник. Задача наближення безперервних функцій многочленами виникає в багатьох практично важливих областях, наприклад, при проектуванні механічних пристроїв для вычерчивания (наближеного) графіка заданої кривої або при створенні швидкодіючих комп'ютерних програм для обчислення значень складних функцій. Згідно доведеної Вейерштрассом в 1885 теоремі про наближення функцій, будь-яку функцію, безперервну на замкненому інтервалі, можна сколь бажано точно аппроксимировать многочленами або сумами синусів і косинусів. Слова «сколь бажано точно» тут означають, що різницю між даною функцією і функціями її аппроксимирующими може бути зроблена сколь бажано малою рівномірно на всьому інтервалі (якщо графіки даної функції і аппроксимирующих функцій накреслити на папері, то при досить точній апроксимації ці графіки будуть невідмітні).

Теорія функцій займається також вивченням властивостей функцій, розмірності області визначення яких більше за одиницю (функції декількох змінних). Звідси вже можна перейти до функцій, областями визначення яких служать різного роду абстрактні простори, і навіть до функцій, значення яких також належать багатомірний просторам (такі, наприклад, векторні поля в фізиці) або абстрактним просторам. Таким чином, теорія функцій непомітно переходить, з одного боку, в функціональний аналіз, а з іншою в топологію.

**ВИКОРИСТАННЯ**

**У природних науках.** Аналітичні функції широко використовуються в деяких областях науки і техніки просто тому, що дають в руки дослідника зручний математичний апарат. Ч.Штейнметц (1865 1923) був першим, хто привернув увагу інженерів-електриків до тих практичних переваг, які дають комплексні функції при розгляді проблем, пов'язаних із змінним струмом. Аналогічно, для спрощення процедури рішення лінійних диференціальних рівнянь, виникаючих в електротехнікові і механікові, О.Хевісайд (1850 1925) ввів формальне операційне числення, яке нині витіснене перетвореннями Лапласа і Фурье, що представляють окремі випадки інтегрального уявлення Коши з теорії аналітичних функцій. У зв'язку з цим при обчисленні невласних дійсних інтегралів, часто виникаючих в практичних проблемах, широко використовується теорія вирахування Коши.

Більш грунтовний внесок був внесений теорією аналітичних функцій в гидродинамику і теорію теплопровідності. Перша точка зіткнення зв'язок з поняттям гармонічної функції. Якщо функція *F* аналитична в області *D* і *F(*z)= u *+ iv,* то диференціюючи рівняння Коши Рімана (7), неважко пересвідчитися в тому, що u *і* v рішення диференціального рівняння Лапласа в приватних похідних

Будь-яке рішення рівняння (13) в області *D* називається функцією, гармонічною в *D.* Таким образом, дійсна (або уявна) частина будь-якої аналітичної функції функція, гармонічна всюди. Навпаки, якщо Н будь-яка функція, гармонічна в односвязной області D,то вона є дійсною частиною деякої комплексної функції F,аналитичной в D.

Диференціальне рівняння типу (13) виникає в багатьох задачах в різних областях науки і техніки. Воно є математичним формулюванням закону про розподіл температури в нерівномірно нагрітому тілі. Ліва частина цього рівняння входить в так зване хвильове рівняння, що грає фундаментальну роль в теорії коливань. Недивно, що прикладна математика широко використовує методи теорії функцій комплексного змінного для рішення своїх задач.

У гидродинамике теорія функцій комплексного змінного використовується для рішення задач, пов'язаних зі сталою плоско-паралельною течією нестискуваної безвихревой рідини. Вектор швидкості такої рідини в точці (х*,* у)можна записати у вигляді a(х*,* у)+ib(х, *у);* *внаслідок* природи течії існує гармонічна функція u, така, що

Функція *u* називається потенціалом швидкостей течії. Відповідна аналітична функція *F* називається комплексним потенціалом швидкостей, її дійсна частина співпадає з *u.* Пользуясь конформными відображеннями, таку функцію можна використати для опису ліній струму при що обтікаються складного профілю, навантаженого в рухому рідину. У аэродинамике вивчення того, що обтікається привело до відкриття закону утворення підіймальної сили крила літака.

**У чистій математиці.** Математика не колекція ізольованих один від одного областей. Відомі докази можливості розкладання на *n* множників будь-якого многочлена *Р(*х)= c0 *+* c1*x +.* .. + cnxn *засноване* на використанні основних ідей з теорії функцій, зокрема теореми Ліувілля або принципу аргументу (Гаусс, 1799). Доказ теореми про прості числа і її уточнення, що стосується частоти, з якою прості числа 2, 3, 5, 7, 11,. .. зустрічаються серед цілих чисел, заснована на аналітичній структурі деяких комплексних функцій, введених Ріманом, Діріхле і Ж.Адамаром (1865 1963). Необхідність уточнення деяких інтуїтивно очевидних властивостей плоских кривих на основі інтегральної теореми Коши, привело до появи таких топологических понять, як гомология і гомотопия (А.Пуанкаре, 1854 1912). Пізнє вивчення взаємозв'язку між гармонічними функціями і аналітичними функціями, визначеними на многосвязных множинах, привели до створення поняття накриваючої поверхні і до більш ясного розуміння поняття римановой поверхні, спочатку введеному (в 1851) для полегшення побудови теорії багатозначних функцій. У свою чергу це послужило стимулом до розробки таких ідей в теорії комплексних різноманіть і загальній теорії пучок.