***Пошукова робота на тему:***

*Функціональний ряд, область його збіжності. Cтепеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Степеневі ряди за степенями (x-a)*

**План**

* Функціональний ряд.
* Область збіжності
* Рівномірна збіжність
* Степеневі ряди
* Теорема Абеля
* Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду
* Ряди за степенями



**1. Функціональні ряди**

**1.1. Функціональні ряди. Область збіжності**

Ряд

                                      (13.22)



називається функціональним, якщо його члени є функціями від  Надаючи  певного числового значення, ми одержимо різні числові ряди. Одні з них можуть бути збіжними, інші – розбіжними.



            Означення. Сукупність тих значень  при яких ряд (13.22) збігається, називається областю збіжності функціонального ряду.



            Очевидно, що в області збіжності ряду його сума є деякою функцією від . Тому його суму будемо позначати через



            Через  позначимо частинну суму ряду (13.22), тобто суму  перших його членів



                                 (13.23)



Тоді

                      ,                              (13.24)



де



і називається залишком ряду. Для всіх значень  в області збіжності ряду має місце співвідношення а тому



                                (13.25)



тобто залишок збіжного ряду прямує до нуля при



       Приклад. Знайти область збіжності ряду .



            Р о з в ‘ я з о к. Для знаходження області збіжності даного функціонального ряду використаємо радикальну ознаку Коші

. Ряд збігається при тих



значеннях  при яких ця границя менша за одиницю, тобто



       Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжку, тобто при   і .



При :  ряд розбігається.



При :       ряд розбігається.



Областю збіжності даного ряду є проміжок



**1.2. Рівномірна збіжність**

            Означення. Функціональний ряд (13.22), збіжний для всіх  із області , називається рівномірно збіжним в цій області, якщо для довільного як завгодно малого числа  існує такий незалежний від  номер  що при   нерівність



                 або                    (13.26)



виконується одночасно для всіх  із



            Приклад 1. Розглянемо прогресію



вона збігається в відкритому проміжку  Для довільного  із  залишок ряду має вигляд:



            Якщо  довільно зафіксувати, то, очевидно:



Це показує, що здійснити для всіх одночасно нерівність



      (якщо )



при одному й тому ж номері  неможливо. Отже, збіжність прогресії



в проміжку  нерівномірна; це ж відноситься і до проміжків   і  зокрема.



            Приведемо без доведення ознаку рівномірної збіжності ряду (13.22).

            Ознака рівномірної збіжності. Для того, щоби ряд (13.22) рівномірно збігався в області  необхідно і достатньо, щоби для кожного числа  існував такий не залежний від  номер  що при  і довільному  нерівність



         (13.27)



буде мати місце для всіх  із  одночасно.



            Для встановлення на практиці рівномірної збіжності рядів користуються більш зручнішими в застосуванні достатніми ознаками, наприклад ознакою Вейєрштрасса.

            Ознака Вейєрштрасса. Якщо члени функціонального ряду (13.22) задовольняють в області нерівностям



                                          (13.28)



і числовий ряд

                                         (13.29)



збігається, то ряд (13.22) збігається в  рівномірно.



            При наявності нерівності (13.28) говорять, що ряд (13.22) мажорується рядом (13.29), або що ряд (13.29) служить мажорантним рядом для (13.22).

            Приклад 2.  Розглянемо ряд



            Р о з в ‘ я з о к. Оскільки  нерівності   виконуються на всій числовій осі, а  числовий ряд  збігається, то даний функціональний ряд рівномірно збігається на



**1.3. Функціональні властивості суми ряду**

            Ми переходимо тепер до вивчення функціональних властивостей суми ряду, складеного із функцій, в зв’язку із властивістю останніх.

            Cума скінченого числа неперервних на відрізку функцій є неперервна на цьому відрізку функція. Для суми ряду (що складається із безмежного числа доданків) ця властивість не зберігається. Тут необхідні додаткові вимоги на неперервні доданки.



            Теорема 1 (про неперервність суми ряду). Якщо функції    визначені та неперервні в проміжку і ряд (13.22) рівномірно збігається в  до суми , то й ця сума буде неперервною в проміжку



            Зауваження. Рівномірна збіжність фігурує в теоремі лише як достатня умова і не потрібно думати, що ця умова є необхідною для неперервності суми ряду. Наприклад, ряд



на відрізку  має неперервну суму, тотожньо рівну нулю, хоча на цьому відрізку ряд збігається нерівномірно.



            Теорема 2 (про почленний перехід до границі). Нехай кожна з функцій    визначена в області  і має скінченну границю при :



                                                            (13.30)



Якщо ряд (13.22) в області  збігається рівномірно, то збігається і ряд, складений із цих границь:



                                                                   (13.31)



і сума ряду (13.22)  також має при  границю, а саме:



                                                              (13.32)



Рівність (13.32) можна записати в такому  вигляді:

                                     (13.33)



            Таким чином, при наявності рівномірної збіжності функціонального ряду, границя суми ряду дорівнює сумі ряду, складеного із границь його членів, або, іншими словами, допустимий граничний перехід ”почленно”.

            Теорема 3 (про почленне інтегрування рядів). Якщо функції  неперервні на відрізку   і складений з них ряд (13.22) збігається на цьому проміжку рівномірно, то інтеграл від суми ряду (13.22) можна представити таким чином:



    (13.34)



Рівність (13.34) можна записати ще так:

                                      (13.35)



            Отже, у випадку рівномірної збіжності функціонального ряду, інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, складеного із інтегралів від його членів, або, іншими словами, допустиме ”почленне” інтегрування ряду.

            Теорема 4 (про почленне диференціювання рядів). Нехай функції  визначені на проміжку  і мають на ньому неперервні похідні . Якщо в цьому проміжку ряд (13.22) збігається і, крім того, рівномірно збігається ряд, складений із похідних:



      ,               (13.36)



то й сума ряду (13.22)   має в проміжку  похідну, причому



                                                          (13.37)



            Рівність (13.37) можна записати так:

                                                (13.38)



**2. Степеневі ряди**

**2.1. Степеневі ряди за степенями**



Означення 1. Степеневим рядом називається функціональний ряд такого вигляду:

           ,                      (13.39)



де  постійні числа, що називаються коефіцієнтами ряду.



            Як видно буде із наступної теореми, областю збіжності степеневого ряду може бути вся числова вісь, інтервал або тільки одна точка .



            Теорема 1 (теорема Абеля). 1) Якщо степеневий ряд (13.39) збігається в деякій точці , то він збігається абсолютно при всіх значеннях для яких



            2) якщо ряд (13.39) розбігається при деякому значенні , то він розбігається при всіх , для яких



            Д о в е д е н н я. 1) Оскільки, за припущенням, ряд (13.39) збігається в точці



 ,



то його загальний член прямує до нуля при  тобто  а це значить, що всі члени ряду обмежені



де  деяке додатне число.



            Перепишемо ряд (13.39) у вигляді

   (13.40)



і розглянемо ряд, складений із абсолютних величин його членів:

          (13.41)



            Члени цього ряду менші за відповідні члени ряду

                   (13.42)



При  ряд (13.42) представляє геометричну прогресію із знаменником , а, значить, він збігається. Оскільки члени ряду (13.41) менші за відповідні члени ряду (13.42), то ряд (13.41) також збігається (за теоремою порівняння). Це значить, що ряд (13.40) або (13.39) збігається абсолютно.



            2) Нехай тепер ряд (13.39) в деякій точці  розбігається. Тоді він розбігається і в довільній точці , що задовольняє умові



Дійсно, якщо б він збігався в деякій точці  що задовольняє цій умові, то за першою частиною теореми він повинен збігатися і в точці оскільки  Але це протирічить умові, що в точці  ряд розбігається. Отже, ряд (13.39) розбігається і в точці Таким чином, теорема повністю доведена.



            Теорема 2. Областю збіжності степеневого ряду (13.39) є інтервал з центром в початку координат.

            Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо  є точка збіжності, то за теоремою Абеля весь інтервал  заповнюється точками абсолютної збіжності. Якщо точка розбіжності, то вся безмежна напівпряма вправо від точки  і вся напівпряма вліво від точки  складаються із точок розбіжності.



            Звідси можна зробити висновок, що існує таке число , що при  ми маємо точки абсолютної збіжності, а при точки розбіжності.



            Означення 2. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал , що для довільної точки , що лежить всередині цього інтервалу, ряд збігається абсолютно, а для точок, що знаходяться поза ним, ряд розбігається (рис. 13.3). Число називається *радіусом збіжності* степеневого ряду.



            На кінцях інтервалу (тобто при  ) питання про збіжність або  розбіжність даного ряду вирішується індивідуально для кожного конкретного ряду.



*Ряд збігається*

|  |
| --- |
|  |
|  |  |

                                          Рис.13.3

            Якщо , то степеневий ряд збігається тільки в одній точці  Якщо , то ряд збігається на всій числовій осі.



            Вкажемо метод визначення радіуса збіжності степеневого ряду (13.39). Для цього розглянемо ряд, складений із абсолютних величин його членів:

                           (13.43)



            Застосуємо ознаку Даламбера

,



де  Тоді за ознакою Даламбера ряд (13.43) збігається, якщо , тобто якщо , і розбігається, якщо , тобто якщо



            Отже, ряд (13.39) збігається абсолютно при  і розбігається при  За означенням 2 інтервал  є інтервалом збіжності степеневого ряду (13.39), тобто



                                     (13.44)



            Аналогічно для визначення інтервалу збіжності можна користуватися радикальною ознакою Коші, і тоді радіус збіжності

                                                          (13.45)



**2.2. Ряди за степенями**



Степеневий ряд, розташований за степенями  має такий вигляд :



        (13.46)



де постійні  також називаються коефіцієнтами ряду.



При  ми одержимо ряд (13.39), а тому ряд (13.39) є частинним випадком ряду (13.46).



            Для визначення області збіжності ряду (13.46) проведемо в ньому заміну змінної



після чого одержимо ряд типу (13.39), розташований за степенями



                                   (13.47)



            Нехай інтервал  є інтервал збіжності ряду (13.47). Звідси випливає, що ряд (13.46) буде збігатися при значеннях  що задовольняють нерівність  тобто  або



                                                    (13.48)



            Оскільки ряд (13.47) розбігається при  то ряд (13.46) буде розбігатися при  тобто буде розбігатися поза інтервалом (13.48).



            Отже, інтервалом збіжності степеневого ряду (13.46) буде інтервал  з центром в точці  Всі властивості степеневого ряду, розташованого за степенями  всередині інтервалу збіжності  повністю зберігаються для степеневого ряду, розташованого за степенями  всередині інтервалу збіжності



            Приклад.



            Р о з в ‘ я з о к. За формулою (2.30) одержимо



При :  Це знакочергуючий ряд.



Перевіримо умови теореми Лейбніца:

1)



2)       Оскільки умови теореми виконуються,



то даний знакочергуючий ряд збігається.

При :  Це ряд з додатними членами.



Для дослідження його збіжності використаємо інтегральну ознаку Коші інтеграл розбігається, тому і ряд розбігається. Отже, область збіжності даного ряду

