# Верифікація закону всесвітнього тяжіння

Встановлені за результатами астрономічних спостережень руху планет закони [8] Й. Кеплера відіграли основну роль у відкритті І. Ньютоном формули [8] для сили  всесвітнього тяжіння:

. (1)

Тут  та  – маси точкових тіл,  – вектор, який вказує на їхнє взаємне розташування в просторі, а  – ґравітаційна стала. Взаємні впливи інших планет призводять до порушення [8] законів Кеплера. Знаходження форми траєкторії планет було тим пробним каменем, на якому відточувалися теорії ґравітації.

**1. Рух об’ємного тіла в центральному полі**

Нехай точкова маса  нерухома в інерційній системі відліку. Тоді початок  системи координат можна розмістити в . У процесі розрахунків, розглядаючи лише геометричні аспекти задачі, напруженість  ґравітаційного поля зручніше характеризувати не посиланням на масу , яка це поле створює, а її ґравітаційним радіусом [11]:

. (2)

Таким чином, формулу (1) можна переписати у вигляді:

. (3)

Тут  – фундаментальна швидкість, а  – одиничний вектор уздовж радіус-вектора . Використання в (3) ґравітаційного радіуса має технічний характер і зовсім не пов’язане з підходами ЗТВ [11].

Нехай у ґравітаційному полі маси  рухається точкове тіло масою . Якщо зв’язана з масою  система відліку є інерційною, рівняння динаміки цієї матеріальної точки матиме вигляд [10]:

. (4)

Помноживши (4) векторно на , отримуємо рівняння обертального руху маси  навколо точки :

. (5)

Можна довести [8], що ґравітаційне поле сферично-симетричного тіла збігається з полем точкової маси, поміщеної в центрі симетрії, а самі тіла взаємодіють за тими ж законами, що й точкові. Однак, якщо для матеріальної точки перехід від рівняння (4) до (5) не викликає жодних заперечень, то для об’ємного тіла згадана процедура виглядає сумнівною. Справді, рівняння (4) описує поступальних рух, а (5) – обертальний. Поступальний же рух по орбіті навколо силового центра , згідно з теоремою Л.Ейлера, складається [1] з двох обертальних рухів – орбітального та власного. При поступальному русі частота обертання навколо власної осі з точністю до знака збігається з частотою  орбітального руху. Таким чином, рівняння (4) та (5) для об’ємного тіла нееквівалентні, бо (5) не враховує зумовленого орбітальним рухом кутового прискорення тіла навколо власної осі.

Пояснимо, як узгодити рівняння (4) поступального руху та рівняння обертального руху. Позначивши орбітальний момент імпульсу тіла через , а власний – через , згідно з законом збереження

 (6)

у замкненій системі, матимемо:

. (7)

Застосовуючи для конкретизації характеристик обертального руху тіла навколо власної осі основний закон динаміки [8] обертального руху, отримаємо вираз для моменту сили (фіктивного), який діє на тіло:

. (8)

Тут  – момент інерції тіла відносно власної осі. Для однорідного сферичного тіла діаметром 

, де . (9)

Породжуючою причиною моменту сили  є орбітальний рух, тому при переході від (4) до рівняння динаміки обертального руху вираз (5) необхідно доповнити моментом сили згідно з (7) та (8):

. (10)

Напрям момента сили  перпендикулярний до площини орбіти, тому остання і надалі залишатиметься плоскою. Таким чином, при розгляді законів руху об’ємного тіла в центральному полі необхідно записувати [3]:

; (11)

 (12)

Інтегруючи співвідношення (12), одержимо вираз:

. (13)

Для планет Сонячної системи числове значення співмножника близьке до одиниці (найбільше його відхилення від одиниці є в Юпітера – ), і його реєстрація практично неможлива. Зате вплив розміру планет накопичується у низці ефектів, наприклад, призводить до повороту перицентра орбіти.

Перейшовши в (11) від параметра  до полярного кута , заміною змінних

 (14)

із використанням зв’язку (13) рівняння (11) зведемо до вигляду:

. (15)

Будемо шукати розв’язок (15) за умови . У лінійному наближенні, приймаючи що [3]

, (16)

із (15) отримаємо рівняння гармонічного осцилятора

, (17)

відносна частота коливань якого відрізняється від одиниці. Фактично це означає, що перицентр орбіти об’ємної планети зміщується в прямому напрямі з частотою:

. (18)

Частота  набагато менша від . Порівняємо  з усередненою частотою повертання перицентра, формулу для якої дає ЗТВ [9]:

. (19)

Обчислене для планет Сонячної системи відношення

 (20)

наведене в табл.1.

*Таблиця 1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Планета | Меркурій | Земля | Юпітер | Сатурн |
|  | 0,008 | 0,024 | 0,57 | 0,23 |

### Із табл.1 видно, що для планет-гігантів складова швидкості зміщення перицентра орбіти, пов’язана з неточковістю планети, співмірна з обчисленою методами ЗТВ для точкових тіл. Навіть для Меркурія зміщення в 0", 4 за 100 років, як це випливає з (18), вже піддається реєстрації сучасними приладами.

У [3] знайдено формулу для обчислення швидкості зміщення перицентра в релятивістській механіці. Зважаючи, що тут нас цікавить не сама форма траєкторії, а лише швидкість повертання перицентра, ми пропонуємо знайдену за результатами цифрового моделювання розв’язку рівняння (39) евристичну формулу для обчислення останньої:

. (21)

Розбіжності між (19) та (21) зумовлені головним чином заміною  на .

Миттєва швидкість  повертання перицентра настільки мала в порівнянні з , що спостерігати її безпосередньо немає можливості. Астрономічні прилади дозволяють визначати лише її середні значення на великих проміжках часу. Тому що середнє за період  обертання планети навколо Сонця значення , вираз (21) для обчислення усередненої швидкості  повертання перицентра при  за формою нагадує вираз (19). Такий результат підтверджує збудження власних обертальних рухів тіла відносно двох незалежних ступенів вільності.

У формулі (21) циклічна частота  не є сталою, тому при обчисленні середнього значення  необхідно враховувати періодичні зміни , коли ексцентриситет  не є нульовим. Із формули (21) обчислимо середню за період  руху по орбіті частоту повертання перицентра:

 (22)

Аналіз причин відмінностей у формулах (19) та (22) для обчислення  та  – тема окремого дослідження. Вкажемо лише, що в ЗТВ повертання перицентра є суто нелінійним ефектом і отримати вираз для обчислення швидкості повертання перицетра технічно складніше, ніж у релятивістській механіці, де перше наближення  трактується як розв’язок лінійного диференціального рівняння.

**2. Релятивістська задача двох тіл**

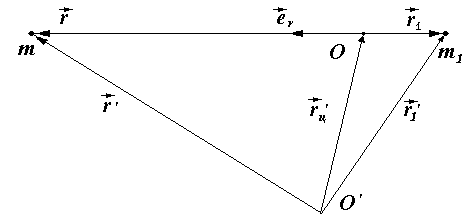
# У релятивістській механіці маси та тіл є функціями швидкостей руху (змінюються згідно з формулою Лоренца-Ейнштейна), тому зв’язана з центроїдом система відліку не буде інерційною. Проте, використовуючи розроблений Г.Г.Коріолісом підхід [8], можна зробити оцінку похибки, яка виникає при використанні припущення про інерційність зв’язаної з центроїдом системи відліку.

Уведемо поняття центра інерції (центроїда) з радіусом-вектором

, (23)

як показано на мал.1.

**Рис 1.** *Центроїд мас , *



Диференціюючи (23) за часом , обчислимо швидкість руху центроїда:

 (24)

## Тут

 (25)

– імпульс системи двох тіл. Серед різноманіття інерційних систем відліку можна вибрати таку, в якій сумарний імпульс системи тіл був би нульовим:

 (26)

де  – нуль-вектор. Таку систему відліку називатимемо ізодромною (супутньою). Принагідно відзначимо, що в класичній механіці пов’язана з центроїдом система відліку також є ізодромною. В ізодромній системі:

 (27)

Швидкості змін мас тіл у релятивістській механіці визначаються рівнянням Лоренца-Айнштайна. Зважаючи на (27), для маси  будемо мати:

 (28)

Введемо поняття зведеної маси  тіла за відношенням до :

. (29)

Без обмеження загальності у подальшому викладі вважатимемо, що

 (30)

Використовуючи зв’язки (26), (28), перепишемо формулу (24) для обчислення швидкості руху центроїда в ізодромній системі відліку в такому вигляді:

. (31)

Враховуючи (28), дамо оцінку величини  поряд із :

 (32)

Терм

 (33)

досягає максимального значення при . Тому для реальних тіл, коли виконується умова великих зведених відстаней між ними, маємо:

. (34)

Початок координат  ізодромної системи відліку розмістимо всередині фігури, яку описує центроїд  при русі тіл. Зважаючи на (34), поперечник цієї фігури буде значно менший за . Тому, нехтуючи квадратичними ефектами, можна вважати, що при обчисленні сили взаємодії між тілами зміни вектора  практично не впливають на величину і напрям сили , обчисленої за посередництвом центроїда. Такий висновок дозволяє вводити поняття приєднаної маси за тими ж правилами, як і в класичній механіці [1].

Наведений аналіз показує, що в цілому форма траєкторії у релятивістській задачі двох тіл нічим суттєво не відрізняється від аналогічної, котра визначається засобами класичної механіки. Відмінності проявляються лише в інтегральних ефектах, тобто тих, які накопичуються в процесі руху. Одним із них є повертання перицентра орбіти. Нижче, використовуючи квазікласичний підхід, ми покажемо, як оцінити величину таких впливів.

Диференціюючи (31) за часом , визначимо прискорення центроїда:

. (35)

Зважаючи, що швидкість швидкості зміни маси 

 (36)

та нехтуючи членами вищого порядку мализни, запишемо вираз для прискорення центроїда в наступному вигляді:

. (37)

У виразах (36) та (37)  – ґравітаційний радіус приєднаної [1] маси .

Порівняємо величини прискорення центроїда та напруженості  ґравітаційного поля, яке створюється приєднаною масою в околі орбіти тіла:

 (38)

Із (38) видно, що це відношення не перевищує квадрата зведеної швидкості  руху тіла.

Тому, що швидкість  незначна в порівнянні з , а прискорення центроїда  мале в порівнянні з , вплив релятивістських змін мас тіл на форму траєкторії орбіти можна шукати методами наближених обчислень, наприклад, методом Пікара [1]. У механіці використання останнього методу збігається з класичним підходом [8] Г.Г. Коріоліса переходу від опису руху в інерційній до опису руху в неінерційній системах відліку:

 (39)

Врахування  зводить рівняння руху [3] до вигляду:

 (40)

Розрахунок дає наступну швидкість  повертання перицентра орбіти:

 (41)

Функція (41) має екстремум при . У цьому випадку відносне відхилення частоти  від  при  складає:

 (42)

Для планет Сонячної системи  незначне. Наприклад, для Юпітера .

У системі двох тіл зі співмірними масами необхідно враховувати і вплив на певертання перицентра руху другого тіла навколо центроїда. Момент сили , який вноситься в систему релятивістськими змінами маси , у  разів відрізняється від моменту . Обидва впливи додаються, тому при близьких масах  та  швидкість повертання перицентра може бути більшою не на 25%, а на цілих 100%.

**3. Обговорення результатів**

Астрономічні спостереження доводять, що за 100 років перигелій Меркурія зміщується у прямому напрямку на 574",10±0",41 [8]. Його більша частина припадає на взаємний вплив планет. Обчислена за теорією Ньютона вона складає 531",5±0",5 за століття [8]. Таким чином, залишається непоясненою величина в 42",6±0",9 [8] за століття. Після розробки ЗТВ довший час вважалося, що теорія Айнштайна, яка вказує на зміщення в 43",03±0",03 за століття [8], прекрасно узгоджується з даними спостережень. Однак проведені Дікке та Голденбергом точні виміри видимої сплюснутості Сонця показали [4], що викликані цим ефектом збурення дають зміщення перигелію Меркурія в 3",4 за століття (у зворотному напрямку), порушуючи цим самим узгодженість теорії та спостережень. Вражає еклектика наведених у ЗТВ міркувань. Так, спочатку 93% ефекту зміщення перигелію Меркурія пояснюють законом всесвітнього тяжіння. Потім вказують на його невідповідність фізичним реаліям і 7% ефекту пояснюють методами ЗТВ. Валідність подібних міркувань завжди було прийнято ставити під сумнів.

Якщо в класичній механіці напрями сили та прискорення тіла збігаються, то в релятивістській механіці названа особливість не виконується і в замкненій системі двох тіл появляється момент сили. Останній перпендикулярний до площини орбіти тіл і періодично змінюється. Перші спроби врахування цього моменту сили обмежувались його дією лише на орбітальний момент імпульсу [8], тому ефект впливу виявився втричі менший очікуваного. Виявлений [3] фактор орбітально-обертальної взаємодії та зроблене уточнення формули для  дозволили розвіяти сумніви щодо виконання закону (1). Для орбіти Меркурія значення  відрізняється від  в 1,04 рази. Це значить, що для ізольованої системи Сонце-Меркурій перигелій останнього за 100 років мав би зміститись на 44",75, а не на 43",03, як це доводить ЗТВ. Додаючи сюди викликаний неточковістю планети та обчислений згідно з виразом (18) кут повороту 0",4 за століття, матимемо 45",15, а враховуючи вплив сплюснутості Сонця в -3",4 за століття, отримуємо повертання в 41",75 за століття. Таке числове значення добре узгоджується з астрономічними спостереженнями. Визначений вплив на швидкість зміщення перицентра орбіти, пов’заний із розв’язком задачі одного тіла в полі центральних сил, для систами Сонце-Меркурій не первищує 10-7, тобто набагато менший від похибки вимірювань.

Основним результатом, отриманим у цьому дослідженні, ми вважаємо реабілітацію закону (1) всесвітнього тяжіння Ньютона, справедливість виконання якого для планет Сонячної системи в рамках єдиного підходу доведена з точністю до 10­­-10. Усі спроби покращити [8] форму закону (1) притягування тіл виявилися безрезультатними.

**Література**

1. *Берс Л. Математический анализ. – М.: Высш. шк., 1975.*
2. *Богородский А.Ф. Всемирное тяготение. – К.: Наукова думка, 1971.*
3. *Горбачевська М. Перерозподіл енергії в релятивістській задачі двох тіл // Науковий вісник ВДУ. – Луцьк: ВДУ, 1998. – С. 19-25.*
4. *Дикке Р. Гравитация и Вселенная. – М.: Мир, 1972.*
5. *Пастернак М.П., Горбачевська М.С. Релятивістське наближення задачі двох тіл при довільному співвідношенні їхніх мас // Науковий вісник ЛДТУ. – Луцьк: ЛДТУ, 1999, с.61–66.*
6. *Пастернак М., Горбачевська М. Матеріальна точка як об’єкт дослідження механіки // Науковий вісник ВДУ. – Луцьк: ВДУ, 1998. – С. 15–19.*
7. *Пастернак Р.М. Швидкість зміщення перицентра планет у класичній механіці // Науковий вісник ЛДТУ. – Луцьк: ЛДТУ, 1999. – С. 56–61.*
8. *Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1969.*
9. *Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1955.*