***Пошукова робота на тему:***

*Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа. Метод найменших квадратів.*

**План**

* Умовний екстремум
* Необхідні умови
* Метод множників Лагранжа
* Знаходження функції на основі експериментальних даних за методом найменших квадратів

**1. Умовний екстремум**

            У попередніх параграфах були розглянуті максимуми і мінімуми функції в припущенні, що ті змінні, від яких функція залежить, є незалежними. В цих випадках максимуми мінімуми називаються безумовними. Але у багатьох задачах потрібно знаходити екстремуми функції, аргументи якої задовольняють деяким додатковим умовам – зв’язку. В цих випадках аргументи функції не є незалежними. Екстремуми такого типу називаються умовними. Як приклад, наведемо задачу про знаходження екстремуму функції



за умови, що її аргументи задовольняють умові зв’язку

.



            У даній задачі екстремуми функції знаходять не на всій площині, а лише на прямій .



            Нехай потрібно знайти максимуми і мінімуми функції

                                                                        (6.89)



при

                                                                        (6.90)



            За наявності умови (6.90) із двох змінних  і  незалежною буде лише одна, наприклад , оскільки визначається із рівності (6.90) як функція . Якщо із (6.90) знайти явну залежність  від   і підставити її в (6.89), то одержимо функцію однієї змінної , яку потрібно дослідити на екстремум. Але розв’язання рівняння (6.90) відносно однієї із змінних може бути важким або взагалі неможливим. Тому зупинимося на особливому методі розв’язання задачі на умовний екстремум – методі невизначених множників Лагранжа.



У точках екстремуму похідна  має дорівнювати нулю. Враховуючи, що  є функція від , знаходимо         .



Отже, в точках екстремуму

                                   .                             (6.91)



Із рівності (6.90) маємо

                                                               (6.92)



            Домножимо рівність (6.92) на невизначений множник  і додамо її з рівністю (6.91), одержимо



.



або

                                      (6.93)



             (6.93) перетворювалася на нуль: Рівність (6.93) виконується в усіх точках екстремуму. Доберемо множник  так, щоб в точках екстремуму функції  друга дужка у рівності

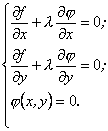


.



            Тоді в точках екстремуму виконуються три рівняння:

                                                            (6.94)



з трьома невідомими . Із системи (6.94) визначаємо  і , що відіграє лише допоміжну роль і в подальшому не потрібне.



            Ліві частини рівнянь (6.94) є частинними похідними функції

,



яка називається функцією Лагранжа. Система (6.94) співпадає з умовами безумовного екстремуму функції .



Із виводу рівнянь (6.94) випливає, що вони є лише необхідними умовами умовного екстремуму.

            Зауваження. Описаний метод поширюється  на дослідження умовного екстремуму функції будь-якого числа змінних.

            Нехай потрібно знайти максимуми і мінімуми функції  змінних



за умови, що змінні зв’язані  рівняннями:



                        (6.95)

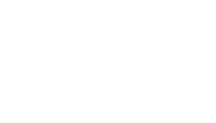


Складемо функцію Лагранжа

і прирівняємо до нуля її частинні похідні по :



                                     (6.96)



            Із  рівнянь (6.95) і (6.96) знаходимо координати критичних точок і допоміжних невідомих . Системи рівнянь (6.95) і (6.96) є необхідними умовами умовного екстремуму.



            Приклад.        За яких розмірів прямокутний паралелепіпед має найбільший об’єм, якщо його повна поверхня має площу ?



            Р о з в ’ я з о к. Нехай довжина сторін паралелепіпеда дорівнюють  і . Його об’єм , а площа поверхні . Потрібно знайти найбільше значення функції  за умови .



            Складаємо функцію Лагранжа



і прирівнюємо до нуля її частинні похідні:

,   ,



, .



            Звідси знаходимо . Точка  є критичною точкою функції . Оскільки поставлена задача має певний розв’язок, а критична точка лише одна, то в цій критичній точці буде екстремум.



            Шуканий паралелепіпед – куб із стороною .



**2. Знаходження функції на основі експериментальних даних**

**за методом найменших квадратів**

            У різних областях людської діяльності широке розповсюдження  мають формули, одержані на основі обробки спостережень або експериментів. Такі формули називаються емпіричними.

            Нехай на основі експерименту потрібно встановити функціональну залежність величини  від величини : .



            В результаті одержано  значень функції при відповідних значеннях аргументів і результати записані так:



            Вид функції  встановлюється або із теоретичних міркувань, або на основі аналізу графіка функції . Для цього слід побудувати в прямокутній декартовій системі координат точки, відповідні експериментальним значенням. Ці точки в дальшому будемо називати експериментальними. Якщо експериментальні точки розміщені на координатній площині так, як зображено на рис. 6.15, то доречно будувати залежність від  у вигляді лінійної функції . Якщо експериментальні точки розміщені так, як показано на рис. 6.16, то функцію будемо шукати у вигляді .



            При вибраному вигляді функції  залишається добрати параметри  так, щоб вони якнайкраще і описували

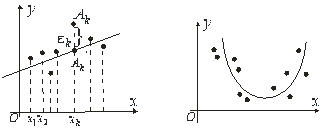


                      Рис.6.13                                 Рис.6.14

розглядуваний процес. Найпоширенішим методом розв’язання даної задачі є метод розв’язання даної задачі є метод найменших квадратів.

Нехай експериментальні точки групуються навколо прямої  (див. рис. 6.13). Тоді

                                                                         (6.97)



де  і - параметри, які потрібно знайти.



Розглянемо експериментальну точку  і точку з такою самою абсцисою, але яка лежить на прямій. Її координати . Різницю ординат цих точок



                 ,                            (6.98)



що являє собою відхилення точки від прямої , назвемо похибкою.



            Доберемо параметри  і так, щоб сума квадратів похибок



                                              (6.99)



була найменшою.

Підставимо в (6.99) вирази помилок (6.98), одержимо

                   (6.100)



Тут  і  відомі величини, а  і  - невідомі, які потрібно знайти. Для того щоб функція  мала найменше значення, необхідно



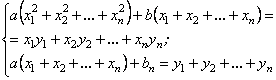
виконати умови:



або

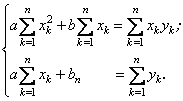


            Перегрупувавши члени, подамо цю систему у вигляді



або

                                           (6.101)



Ця система рівнянь називається нормальною системою методу найменших квадратів. Розв’язавши її, знаходимо  і  і підставляємо в емпіричну формулу .



            Нехай тепер експериментальні точки розміщені поблизу деякої параболи (див. рис. 6.14). Тоді

                                                              (6.102)



            Для знаходження  і  використаємо метод найменших квадратів. Відхилення за ординатою експериментальних точок від відповідних точок параболи



                 ,                                 (6.103)



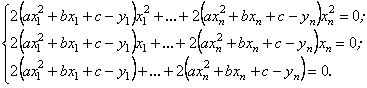
            Доберемо параметри  і так, щоб сума квадратів похибок (6.104)



була найменшою. Для цього необхідно виконання умов

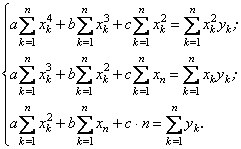


Обчисливши частинні похідні, маємо систему рівнянь



            Перегрупувавши доданки в кожному із рівнянь, одержимо нормальну систему рівнянь методу найменших квадратів для параболічної залежності:

                            (6.105)



            Із цієї системи знаходимо  і  і підставляємо їх в емпіричну формулу .

