# МАРІУПОЛЬСЬКИЙ МІСЬКИЙ ТЕХНІЧНИЙ ЛІЦЕЙ

## НАУКОВО-ПРАКТИЧНА РОБОТА

на тему: ***„Застосування систем лінійних рівнянь для апроксимації***

***експериментальних даних”***

### Виконав: учень 312 групи

***Аніщенко Євген***

Керівник: ***Ткаченко С.Г.***

Маріуполь,

2003 р.

## ПЛАН

Стор.

|  |  |
| --- | --- |
| Вступ………………………………………………………………………………..... | 3 |
| 1. Системи лінійних рівнянь і методи їх рішення…………………………............ | 4 |
| 1.1. Системи лінійних рівнянь …………………………………………............... | 4 |
| 1.2. Методи рішення систем лінійних рівнянь…………………………….......... | 5 |
| 1.2.1. Графічний метод рішення системи лінійних рівнянь………….............. | 5 |
| 1.2.2. Метод Гаусса……………………………………………………………… | 6 |
| 1.2.3. Метод Крамера……………………………………………………………. | 8 |
| 1.2.3.1. Визначники і їх властивості……………………………………..... | 8 |
| 1.2.3.2. Рішення системи рівнянь за допомогою визначників………….. | 9 |
| 2. Апроксимація результатів експерименту функціями різного вигляду……...... | 10 |
| 2.1. Апроксимація лінійною функцією двох аргументів……………………..... | 11 |
| 2.2. Апроксимація показниковою функцією ………………….............................. | 13 |
| 2.3. Апроксимація квадратним багаточленом …………………………………... | 14 |
| 2.4. Апроксимація показниково-степінною функцією………………………...... | 16 |
| 3 . Вибір функцій для апроксимації експериментальних даних…………….......... | 18 |
| 4. Використання апроксимуючих функцій з практичною метою………................ | 19 |
| 4.1. Оптимізація технології штампування деталі „рило”...................................... | 21 |
| Висновки………………………………………………………………………………. | 25 |
| Література……………………………………………………………………………... | 26 |
| Додаток |  |
| 1. Креслення А-1557.005 „Рыльце”........................................................................ | 27 |
| 2. Креслення А-1474.000 „Штамп для рыла»”..................................................... | 28 |
| 3. Раціоналізаторська пропозиція №0403............................................................. | 29 |

Вступ

В практичній діяльності людини часто виникають такі задачі, коли маючи обмежену кількість експериментальних даних, треба спрогнозувати, які наслідки слід очікувати при інших умовах експерименту над тим же об'єктом. В математиці для цієї мети широко використовують рівняння різного вигляду, які з той чи іншою похибкою моделюють поведінку об'єкта. Підбір таких рівнянь називають апроксимацією експериментальних даних. Зокрема, апроксимація усередині області одержання експериментальних даних називається інтерполяцією, а за межами цієї області – екстраполяцією.

У більшості випадків підбір підходящих рівнянь ускладнюється тим, що експериментальні дані отримані приблизно і вміщують похибку експерименту та обчислювань. Очевидно, що і рівняння, яке вибрали, не завжди забезпечує точну збіжність розрахункових даних з експериментом. Таке рівняння підбирають різними методами, серед яких найбільш популярний метод найменших квадратів (МНК). Цей метод буде розглянутий автором у наступній науково-практичній роботі.

В наданій роботі поставлено мету навчитися визначати вигляд апроксимуючих рівнянь (функцій) у випадках, коли крива або поверхня проходить скрізь усі експериментальні точки., тобто немає потреби визначати найменшу величину квадрата різниці розрахункових і експериментальних значень, як цього потребує МНК. При цьому були вирішені наступні задачі:

- вивчені методи рішень систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

- досліджена методика апроксимації експериментальних даних функціями кількох змінних, яка включає приведення функцій до лінійного вигляду, складання і рішення систем лінійних рівнянь для визначення числових значень коефіцієнтів, що невідомі і входять у вибрану апроксимуючу функцію.

1. Системи лінійних рівнянь і методи їх рішення

1.1. Системи лінійних рівнянь

В наданій роботі об'єктом вивчення являються системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Рівняння називається **алгебричним**, якщо кожна з його часток є багаточленом або одночленом по відношенню до невідомих величин. **Лінійним рівнянням** називають рівняння першого ступню. **Степенем рівняння** називають найбільший з показників при невідомому. Якщо рівняння вміщує кілька невідомих, то для кожного члена рівняння складаємо суму показників при всіх невідомих, що входять до нього. Найбільша з цих сум і називається ступнем рівняння.

Хай дана система лінійних рівнянь

****

Тут***x1, x2, ... , xn*** – невідомі величини, *aij (i = 1,2, ... , m; j =1, 2, ... , n)* – числа,

що називають **коефіцієнтами системи рівнянь** (перший індекс відповідає номеру рівняння, другий – номеру невідомої величини),*b*1, *b*2, ... , *bm* – числа, які називають **вільними членами**.

**Рішенням системи рівнянь** називають упорядкований набір чисел ***x1, x2, ... , xn,***

що перетворює кожне рівняння системи в тотожність.

**Вирішити систему рівнянь –** означає знайти всі її рішення або доказати, що жодного рішення немає. Система, що має рішення, називається **сумісною**. Якщо система має тільки одне рішення, вона називається **визначеною**. Система, що має більш ніж одне рішення, називається **невизначеною** (**сумісною і невизначеною**). Якщо система не має рішень, вона називається **несумісною**.

Система, всі вільні члени якої дорівнюють нулю(*b*1 = *b*2 = ... *= bn* = 0), називається **однорідною**. Однорідна система завжди сумісна, тому що набір з *n* нулів задовольняє будь-якому рівнянню такої системи. Якщо хоча б один вільний член відмінний від нуля, система називається **неоднорідною**.

Дві системи, безліч рішень яких збігаються, називаються **еквівалентними** або **рівносильними** (збіг безлічі рішень означає, що кожне рішення першої системи являється рішенням другої системи, і кожне рішення другої системи являється рішенням першої).

Дві несумісні системи вважаються еквівалентними.

Перебудова, застосування якої перетворює систему в нову систему, що еквівалентна попередній, називається **еквівалентною** або **рівносильною перебудовою**. Прикладами еквівалентних перебудов можуть бути наступні перебудова: перестановка місцями двох рівнянь системи, перестановка місцями двох невідомих разом з коефіцієнтами всіх рівнянь, помноження обох часток будь-якого рівняння системи на число, що не дорівнює нулю.

1.2. Методи рішення систем лінійних рівнянь

Існує достатня кількість методів рішення систем лінійних рівнянь. Зокрема, до цих методів відносяться:

* графічний метод рішення;
* метод Гаусса (послідовне виключення невідомих);
* метод Крамера;
* метод Халецького;
* метод ітерацій;
* метод обертань;
* метод відбиття.

Далі будуть розглядані найбільш розповсюджені методи рішення систем лінійних рівнянь.

1.2.1. Графічний метод рішення системи лінійних рівнянь

Цей метод – найпростіший, але його точність залежить від точності визначення точок перехрещення кривих, що графічно описують рівняння системи.

Виберемо, наприклад, із глави 2 цієї роботи систему рівнянь (7):



В координатах y = *P*, x = *T*рішення системи виглядає (рис.1) як точка перехрещення *М* прямих *P = 2,4 – 3T*  (1) і *P = (6,8/3) – (8/3)T* (2). Бачимо, що з-за близькості кутів нахилу прямих до осі х визначити координати точки *М*навіть для такого простого випадку досить важко.

Для системи з трьох рівнянь з трьома невідомими необхідно вже визначати три точки перехрещення трьох поверхонь, що збільшує похибку визначення координат. Якщо невідомих більш ніж три, метод не працює.

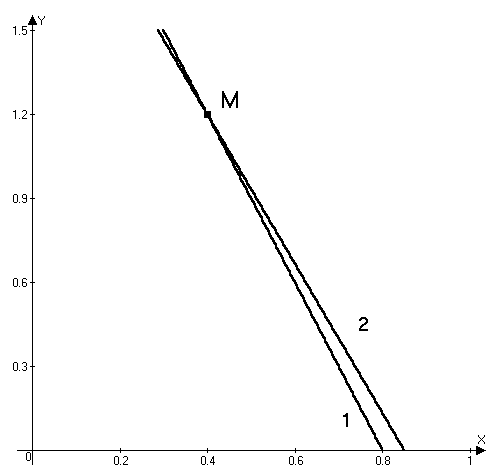


Рис. 1. Графіки функцій *P = 2,4 – 3T*  (1) і *P = (6,8/3) – (8/3)T* (2)

в координатах y = *P*, x = *T*.

1.2.2. Метод Гаусса

Розглянемо систему 3-х лінійних рівнянь з трьома невідомими:

**** (1)

Метод Гаусса рішення системи (1) складається з наступного.

Поділимо всі члени першого рівняння на , а потім, помножив отримане рівняння на , віднімемо його відповідно із другого та третього рівнянь системи (1). Тоді з другого та третього рівнянь невідоме  буде виключене, і одержимо систему вигляду:

 (2)

Тепер поділимо друге рівняння системи (2) на , помножимо отримане рівняння на  і віднімемо із третього рівняння. Тоді з третього рівняння невідоме  буде виключене, і отримається система трикутного вигляду:

**** (3)

З останнього рівняння системи (3) знаходимо , підставляючи знайдене значення в перше рівняння, знаходимо .

Приклад.

Методом Гаусса вирішити систему:

****

Рішення: Поділив рівняння (а) на 2 , отримаємо систему ****

Віднімемо з рівняння (*b*) рівняння , помножене на 3, а з рівняння (*c*) – рівняння , помножене на 4.

****

Поділив рівняння() на -2,5 , отримаємо: ****

Віднімемо з рівняння () рівняння , помножене на -3:

****

З рівняння знаходимо z= -2. Підставив це значення в рівняння, отримаємо y = 0,2 – 0,4z = 0,2 – 0,4 ∙ (-2) = 1.

Наприкінці, підставив значення z = -2 і y = 1 в рівняння знаходимо

x = 0,5 – 0,5y – z = 0,5 – 0,5 ∙ 1 – (-2) = 2.

Отже, отримуємо відповідь:

x = 2, y = 1, z = -2 .

Перевірка:



1.2.3. Метод Крамера

У 1750 році швейцарський математик Габріель Крамер для рішення систем рівнянь першого ступню запропонував загальні формули, що виражають невідомі через визначники, складені з коефіцієнтів системи.

Приблизно через сто років теорія визначників вийшла далеко за межі алгебри й стала застосовуватися у всіх математичних науках. Теорія визначників застосовується в операціях, що пов’язані, наприклад з тензорними, векторними або матричними числами. В зв'язку з цим, методу Крамера в наданій роботі віддається перевага перед іншими методами.

1.2.3.1. Визначники та їх властивості

Розглянемо визначники на прикладі визначника третього ступню:

= *a1b2c3 + a2b3c1 + a3b1c2 – a1b3c2 – a2b1c3 – a3b2c1*. (4)

Вираз (4) можна записати по-іншому:

 (5)

Вирази *a1, b1, c1*називаються **елементами визначника**, а вирази

****

– **мінорами** елементів *a1, b1, c1*. В загальному випадку **мінором** будь-якого элементу називається визначник, що одержується з наданого виразника викреслюванням тієї строки і того столиця, на перехресті яких стоїть елемент.

**Алгебраїчним доповненням** елементу називається його мінор, що помножений на коефіцієнт (-1)*m+n*, де *m, n*– номери строки та стовпця, на перехресті яких стоїть елемент.

Визначники мають ряд властивостей.

1. Величина визначника не зміниться, якщо кожну строку замінити стовпцем з тим же номером.

2. При перестановці якихось двох строк або якихось двох стовпців абсолютне значення визначника зостанеться попереднім, а знак змінюється на протилежний.

3. Визначник, у якого елементи однієї строки (або стовпця) відповідно пропорційні елементам другої строки (стовпця), дорівнює нулю.

4. Спільний множник всіх елементів однієї строки (або одного стовпця) можна виносити за знак визначника.

5. Якщо кожний елемент якогось стовпця (строки) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників: в одному замість кожної суми стоїть тільки перший доданок, в другому – тільки другий (інші елементи в обох визначниках ті ж самі, що й в наданому).

6. Якщо до усіх елементів якогось стовпця додати доданки, що пропорційні відповідним елементам другого стовпця, то новий визначник дорівнює старому. Те ж саме для строк.

Знання властивостей необхідно для того, щоб простіше й швидше обчислювати визначник. Зокрема, розклад визначника бажано проводити по елементах тієї строки або стовпця, де є нуль. Тоді яким би не був громіздким мінор, але помножений на елемент, що дорівнює нулю, він даси добуток, що також дорівнює нулю. Виносячи за знак визначника спільні множники, переставляючи строки, стовпці, слід прагнути створити такий рівносильний визначник, в якому максимальне число елементів дорівнює нулю або одиниці.

1.2.3.2. Рішення системи рівнянь за допомогою визначників

Система рівнянь (1) має за методом Крамера наступне рішення, що виражається в загальному вигляді:

 ,

де  - визначник системи;

- визначники при невідомих параметрах системи.



Визначники третього порядку обчислюються за формулою (4). Якщо необхідно вирішити систему рівнянь більш високого порядку методом Крамера, то визначники більш високого порядку розкладають на добуток елементів якоїсь строки або стовпця (краще тієї строки, де кілька елементів – нулі) на їх алгебраїчне доповнення. Потім мінори алгебраїчних доповнень (тобто визначники більш низького порядку) знову розкладають вище згаданим способом. І так продовжують до тих пір, поки вихідний визначник системи буде виражений у вигляді алгебраїчної суми добутків елементів на визначники третього порядку, який обчислити нескладно, використовуючи формулу (4).

Приклади рішення систем лінійних рівнянь за методом Крамера будуть викладені далі в главі 2.

2. Апроксимація результатів експерименту функціями різного вигляду

В загальному вигляді поставлену в цій главі задачу можна представити так.

Використовуючи комп'ютерну програму Advanced Grafer, зробимо випадковий набір „експериментальних” точок в координатах*x,* і *y*(див. рис.2) і з'єднаємо їх ломаною прямою 1. Якщо прийняти до уваги те, що „експериментальні результати” отримані з обмеженою точністю, то для їх апроксимації доцільно застосовувати метод найменших квадратів (МНК). Программа Advanced Grafer автоматично апроксимує ці „результати” функціями восьми типів. Для нашого випадку неможлива апроксимація функціями гіперболічного, логарифмічного, показниково-степінного та експоненціального типів (згідно з класифікацією, що застосована в програмі).

Графіки, що надані на рис.2, апроксимують за допомогою МНК „експериментальні результати” функціями лінійного (графік 2) і поліноміального (графіки 3-6) типів. Бачимо, що в поліномах при зростанні степеню від 2 до 5 (графіки 3-5), а потім до 9 (графік 6), точність апроксимації зростає. Але навіть функція:

*y = 3,93∙10-4∙x9 +0,02∙x8-0,32∙x7+3,13∙x6-17,75∙x5+57,94x4-102,28x3+83,59x2-20,31x+2,00*

на ділянці 4 ≤ *х*≤ 7 не збігається з „експериментальними результатами”, а на ділянці

8 ≤ *х* ≤ 10, скоріш за все, зовсім непридатна.

У зв'язку з цим, необхідно уточнити задачу: в наданій роботі показано, як можна визначати вигляд апроксимуючих рівнянь (функцій) для випадків, коли апроксимуюча крива проходить крізь експериментальні точки

Метод найменших квадратів в наданій роботі не розглядається

Слід відмітити, що обсяг обчислень у прикладах, що надані нижче, менший, ніж в МНК, тому методику, що розглядана в цій главі, при малій кількості експериментальних даних і невисоких вимогах до точності апроксимації можна застосовувати замість МНК.

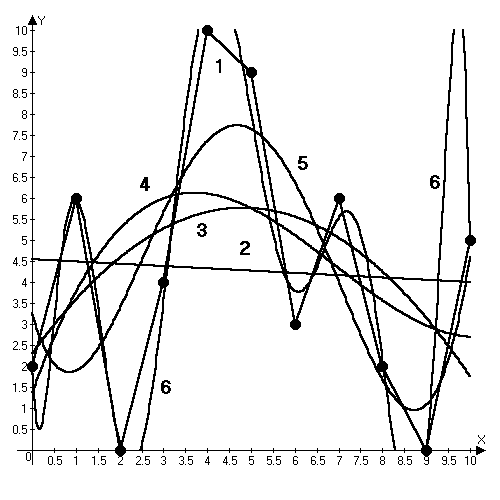


Рис.2. Графічна апроксимація експериментальних даних:

1 – «експериментальні дані»;

2 – апроксимація лінійною функцією;

3 – апроксимація поліномом другого степеню;

4 – апроксимація поліномом третього степеню;

5 – апроксимація поліномом четвертого степеню;

6 – апроксимація поліномом максимально можливого,

дев'ятого степеню.

2.1. Апроксимація лінійною функцією двох аргументів

Розглянемо наступну задачу. Для навчання у ліцеї знадобилися зошити і ручки. Вартість першої купівлі 6 зошитів і 2 ручок склала *С1 =* 4,8 грн. Друга купівля 8 зошитів і 3 ручок коштувала *С2* = 6,8 грн. За звичаєм запитують, яка вартість одного зошита (*Т*) та однієї ручки (*Р*)?

Поставимо більш практичне питання: яка вартість купівлі будь-якої заданої кількості зошитів і ручок?

За життєвим досвідом можна припустити, що вартість купівлі буде визначатися формулою:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6) |

де – кількість відповідно зошитів і ручок в черговій купівлі приладів для навчання.

Для визначення *Т* і *Р* складемо систему двох рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

За правилом Крамера

  ****



Рівняння (6) приймає вигляд:



На рис.3 показана плоска поверхня, що описується лінійним рівнянням з двома невідомими (6). Поверхня побудована за допомогою однієї з програм Mathcad 2000 [4].

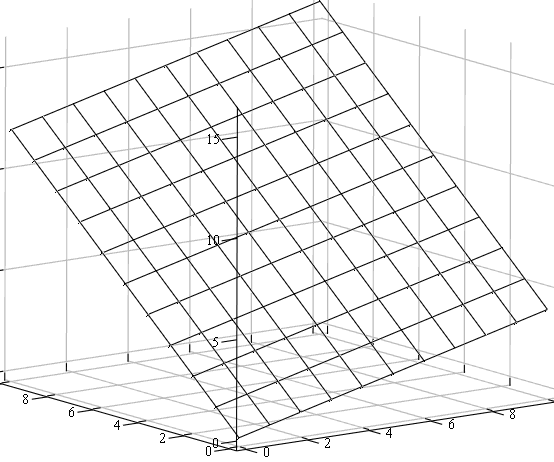


Рис.3. Графік функції *C = 0,4x +1,2y*.

2.2. Апроксимація показниковою функцією

Однак не обов’язково шукати відповідь на поставлене питання у вигляді рівняння (6). Припустимо, що рішення бажано бачити у вигляді функції:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (8) |

де *А* – сталий коефіцієнт.

Приведемо рівняння (8) до лінійного вигляду методом логарифмування обох часток, беручи за основу *е*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Введемо позначення:



Таким чином, маємо лінійну функцію з трьома невідомими :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Щоб визначити три невідомих коефіцієнти з рівняння (10), треба мати систему трьох рівнянь. Мусимо зробити ще й третю купівлю, наприклад, двох зошитів і однієї ручки. Зрозуміло, що ціна купівлі складе *С3* = 2 грн.

Тоді маємо наступну систему рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Для якої:

 Таким чином, для рівняння (8) одержуємо:

,

а саме рівняння (80 приймає вигляд::

, (12)

з графічною інтерпретацією, що надана на рис.4.

Перевірка вартостей *С1*...*С3* за допомогою рівняння (6) показує, що максимальна похибка в розрахунках складає 3 копійки і пов’язана з тим, що при рішенні системи рівнянь проміжні результати заокруглювали з точністю до 4-го знаку після коми.

2.3. Апроксимація квадратним багаточленом

Зробимо четверту купівлю 4-х зошитів і 3-х ручок на суму, звичайно,



Маючи чотири незалежні купівлі, ми можемо знайти відповідь на наше питання у вигляді функції *C* двох аргументів і чотирьох інших параметрів, що являються константами і мусять бути визначеними.

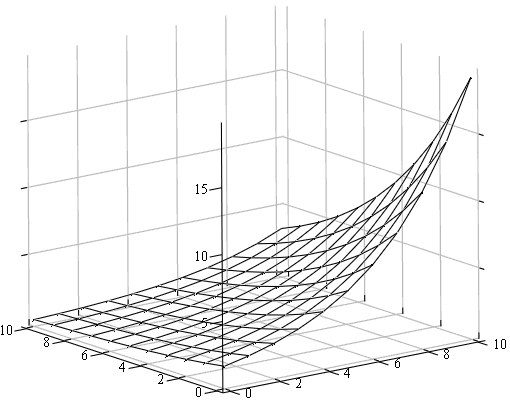


Рис.4. Графік рівняння .

Нехай ця функція має вигляд квадратного багаточлена:

 (13)

Тоді за результатами 4-х купівель для функції (13) одержимо 4 значення , тобто наступну систему:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Її рішення шукаємо у вигляді:

;



Обчислимо визначник , розкладаючи його за елементами 1-го стовпцю:





Далі визначники будемо розкладати за елементами 4-го стовпцю з наступним їх обчисленням:

Наразі функція (13) прийме вигляду:

|  |  |
| --- | --- |
| *С = 0,1244х2 + 0,5778y2 – 0,3644ху + 2,3822,* | (15) |

Графік функції (15) наданий на рис.5.

Аналіз показує, що функцією (15) можна користуватися при розрахунках великих партій купівель зошитів та ручок (при *x* = 8 і *y* = 3 похибка розрахунків складає 1 копійку). Для розрахунків ціни малої кількості ручок та зошитів функція (15) непридатна, тому що, наприклад, при *x* = 2 і *y* = 1 похибка складає 79 коп., тобто [(2-0,79)/2]x100%=61%.

2.4. Апроксимація показниково-степінною функцією

Відмовимося від розрахунків за формулою (8) та виберемо іншу функцію, наприклад:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Приведемо функцію (16) до лінійного вигляду логарифмуванням обох часток, беручи за основу *е*:

*ln C = ln R + S ln x +V ln y + (x + y) ln u*

Введемо позначення:

*ln R = r; ln u = l*

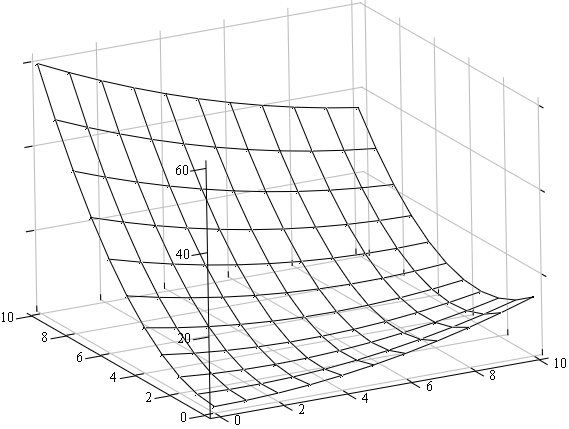


Рис.5. Графік функції *С = 0,1244х2 + 0,5778y2 – 0,3644ху + 2,3822.*

За аналогією з вчинками над рівнянням (7) складемо наступну систему рівнянь, що базується на 4-х купівлях зошитів і ручок:



або

 (17)

В результаті рішення системи (17) рівняння (16) прийме вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Графік функції (18) наданий на рис.6.

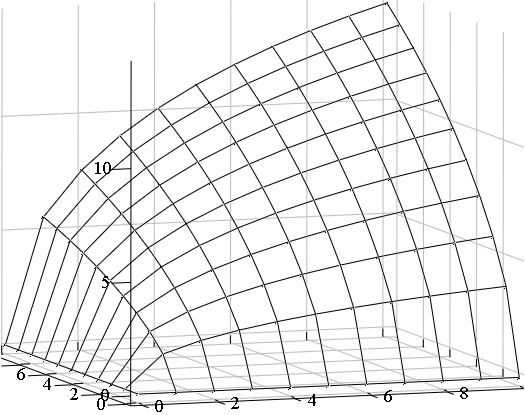


Рис.6. Графік функції .

Слід відмітити:

- параметр *u* = 0,9877~1 показує, що спільний вплив аргументів *x* і*y* практично відсутній;

- рівняння (18) непридатне для обчислювань вартості купівлі тільки одного з приладів для навчання в ліцеї (чи то ручок, чи то зошитів), тому що при *x = 0* або *y = 0 С = 0;*

- оскільки при купівлях, як правило, *x* ***≥*** 1 і *y* ***≥*** 1, крім того, *S*і*V*задовольняють нерівності *V > S (V > 0, S > 0),* то з наданого вище випливає, що аргумент *y* більш суттєво впливає на зміну вартості*C*, ніж аргумент *x*.

Таким чином, тип рівняння (16, 18) виявився не зовсім придатним для нашої задачі, хоча дозволяв з більшою точністю прогнозувати вартість купівель всередині діапазону [*xmin , xmax*] і [*ymin , ymax*].

3. Вибір функцій для апроксимації експериментальних даних

В загальному випадку вибір придатного вигляду функції, що найбільш точно описує результати експерименту, математично обґрунтовується і являється досить складною задачею, що виходить за межі наданої роботи.

Частіш за все дослідники використовують рівняння регресії типу:

 (19)

де *n* – натуральне число, *n*>0.

Вибір таких рівнянь (19), як правило, математично не обґрунтовується, а його вірність доказується невеликими розбіжностями даних, що обчислюються, з результатами експерименту.

Для більшості випадків існують формули, що виведені теоретично, і задача зводиться до того, щоб на підставі результатів експерименту знайти коефіцієнти, що входять в формулу.

Існує емпіричний спосіб підбора функцій. За експериментальними даними будують графік і за його виглядом вибирають функцію з кількох можливих [2, 3].

Для нашого випадку важливо, щоб вибрану функцію можна було б потім привести до лінійного вигляду (за допомогою зміни перемінних, логарифмування обох часток тощо). В табл..1 надані найбільш уживані емпіричні формули та заходи приведення їх до лінійного вигляду.

Однак якщо точне перетворення функції неможливе, її можна з розумним наближенням привести до лінійного вигляду шляхом розкладання, наприклад, в ряд Тейлора або Фур'є (якщо функція періодична). Такі розкладення в ряд для багатьох функцій надані в довідниках [4, 6].

Емпіричні формули для апроксимації експериментальних даних

Таблиця 3.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №/п | Емпірична формула | Приведення до лінійного вигляду | Лінійний вигляд емпіричної формули |
| 1. | y=axb | X=lg x, Y=lg y | Y=lg a + bX |
| 2. | y=aebx | Y=ln y | Y=ln a + bx |
| 3. | y=axb+c | X=lg x, Y=lg(y-c) | Y=lg a + bX |
| 4. | y=aebx+c | Y=ln(y-c) | Y=ln a + bx |
| 5. | y=ax2+bx+c | X=x2 | y=aX+bx+c |
| 6. | y=(ax+b)/(cx+d) | Y=(x-x1)/(y-y1), тогда Y=A+Bx | y=y1+(x-x1)/(A+Bx) |
| 7. | y2=ax2+bx+c | Y=y2, X=x2 | Y= aX+bx+c |
| 8. | y=aebx+cxx | Y=ln y, X=x2 | Y=cX+bx+(ln a) |
| 9. | y=1/(ax2+bx+c) | Y=1/y, X=x2 | Y= aX+bx+c |
| 10. | y=x/(ax2+bx+c) | Y=x/y, X=x2 | Y= aX+bx+c |
| 11. | y=a+(b/x)+(c/x2) | Z=1/x, X=Z2 | y= a+bZ+cX |
| 12. | y=axbecx | Y=ln y, X=ln x, A=ln a | Y=A+bX+cx |

4. Використання апроксимуючих функцій з практичною метою

Практична необхідність в апроксимуючих функціях визначається тим, для чого призначені конкретні експериментальні дані, що описуються цими функціями. В загальному випадку одержані експериментальні дані призначені для наступного їх *використання* в розробках наукових теорій, для практичних висновків про те чи інше явище тощо. Складаються ці дані в наступних формах:

* таблиці;
* функціональні залежності;
* графіки;
* номограми.

Вибір форми визначається складністю її утворення і ефективністю використання. Найбільш просто утворювати таблиці, трохи складніше – графіки й номограми. За відсутністю комп'ютерів найбільш складно було створювати і користуватися апроксимуючими функціями. Ефективність використання розгляданих форм зберігання засновується на правилі: треба користуватися тими формами, які видають потрібні результати за найменший термін і з необхідною точністю.

В наш час найбільш швидко й просто створювати форми зберігання за допомогою комп'ютерів і стандартних програм типу Matlab, Mathcad, Microsoft Access (бази даних), Microsoft Excel (редактор електронних таблиць). При цьому табличні форми використовуються лише в тому випадку, коли принципово неможливо виявити функціональну залежність. Наприклад, перелік корисних сайтів Інтернету зберігається мною у вигляді таблиці, що виконана програмою Microsoft Access. В багатьох випадках доцільно зберігання даних виконувати у формі функціональних залежностей. Наявність персональних комп'ютерів і навіть калькуляторів інженерного типу дозволяє користуватися цими формами з мінімальними витратами часу і максимальною точністю.

На мій погляд, увесь об'єм знань, що раніше зберігався у вигляді таблиць і номограм, буде апроксимований для зберігання та використання функціями вигляду, що підходить. Наприклад, у продажу є електронні довідники (компакт-диски) хімічного складу і механічних властивостей металів, в яких у вигляді функціональних залежностей зберігаються дані при кілька тисяч марок сталей і сплавів (RusSteel, WinAlloys, WinSteel).

Ще одне застосування апроксимуючих функцій – розширення знань про предмети, що вивчаються, і явища у тих діапазонах, де експеримент провести неможливо. Наприклад, по функціях, що екстраполюють температурні властивості матеріалів в областях, які близькі до абсолютного нуля градусів, розраховують життєздатність космічних кораблів у відкритому космосі.

Третій напрямок використання апроксимуючих функцій – рішення специфічних задач в різноманітних областях народного господарства. Зокрема, інтерполяція і екстраполяція використовуються в комп'ютерній графіці для масштабування та компресії зображення. Розглянемо це на наступному прикладі.

Хай є наступна таблиця довжиною в три символи:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 7 | 5 |

З неї треба одержати таблицю довжиною 5 символів, тобто збільшити:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Нехай таблиця задає ***n*** значень деякої функції на інтервалі [1; *n*] (тут *n*= 3) з кроком Δ = 1 (в вихідній таблиці крок завжди повинен бути цілим числом).

Таблицю з 5 символів можна одержати двома способами. В першому випадку слід збільшити довжину інтервалу, наприклад, [1; *n*+2] или [0; *n*+1], а крок Δпри цьому залишити цілим числом. Тоді невідомі значення функції за межами вихідного інтервалу можна знайти методом екстраполяції:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 7 | 5 | ⭢ | ? | 1 | 7 | 5 | ? | ⭢ | -6 | 1 | 7 | 5 | 3 | (20) |

Але в комп'ютерній графіці колір не може задаватися від'ємним числом, тому всі від'ємні числа в одержаній таблиці (20) обнуляться. В такому випадку використовують інший спосіб. Довжина інтервалу не змінюється, а змінюється крок, котрий становиться таким, що дорівнюєΔ = *n****/N*** (*n****, N –*** відповідно вихідний та потрібний розміри таблиці), тобто Δ = 3/5. Тоді кожний символ в збільшеній таблиці (21) буде представляти значення функції на інтервалі [1; 3] з кроком Δ = 3/5. Значення f(3) відомо, значення f(3/5) інколи беруть як f(1). інші значення f(1+1/5), f(1+4/5), f(2+2/5) одержують шляхом інтерполяції:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 7 | 5 | ⭢ | 1 | ? | 7 | ? | 5 | ⭢ | 1 | 4 | 7 | 6 | 5 | (21) |

Цей метод більш точніший і тому частіше застосовується. Для масштабування двомірної таблиці масштабують методом, що описаний, спочатку по вертикалі, потім по горизонталі та навпаки.

При стисненні зображення до визначених розмірів зменшують і зберігають зменшену матрицю, що займає менше місця в пам'яті. При виводі зображення ці зменшену матрицю збільшують, як було показано вище, до потрібних розмірів. Якщо добре підібрати розмір зменшеної матриці, то похибка зображення буде мала, а якість – більш високою.

4.1. Оптимізація технології штампування деталі „рило”

На підприємстві, де я працював влітку, у різний час з різних листів міді виготовили 4 штамповані деталі (далі – рила), з яких подальшою мехобробкою одержали кінцеву деталь „рыльце” за кресленням А-1551.005 (див. додаток 1). Для цього використовували гідропрес, який мав недостатнє зусилля для якісного штампування, не міг прижимати фланець заготівки, що обумовлювало появу гофрів на рилі і зменшення її висоти, а також був обладнаний експериментальним штампом, який не дозволяв точне центрування пуансона, матриці і заготовки (див. додаток 2).

Як виявилося пізніше, для кожного штампування використовували мідь з різними значеннями тимчасового опору  діаметрами заготовок *D*. Рила штампували на матрицях з різними радіусами *R*переходу площини заготовки в циліндричну поверхню рила. До того ж, центр заготовки відстояв від центральної осі матриці на різну відстань *l*(це було потрібно зробити, тому що дно рила було розташовано під кутом до горизонталі).

Відштамповані в таких умовах рила мали різну висоту, тоді як для фурми потрібно було рило з висотою *h*= 145 мм.

Технологічні параметри штампування рил наведены в табл. 4.1.

Технологічні параметри штампування рил

Таблиця 4.1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №/л | Діаметр заготовки *D*, мм | Тимчасовий опір листової міді , Н/мм2 | Коаксіальність заготовки і матриці *l*, мм | Радіус робочої кромки матриці *R*, мм | Висота рила, що штампується, *h*, мм |
| 1. | 440 | 17,3 | 10 | 50 | 145 |
| 2. | 460 | 23,6 | 0 | 60 | 104 |
| 3. | 440 | 26,6 | 20 | 50 | 93 |
| 4. | 450 | 23,6 | 5 | 60 | 143 |

Таблиця 4.1. не дає можливості прогнозувати висоту рила, тому що кожний раз мідь закуповують у вигляді листів різної ширини і з різним значенням .

Батько поставив мені задачу: не використовуючи додаткових експериментів (мідь має дуже велику ціну), знайти формулу, за якою можна обчислювати заздалегідь висоту штампованого рила, щоб кожний раз не переробляти креслення (пристосовувати їх до одержаної висоти рила). При цьому формула повинна бути простою, тому що на виробничій ділянці є калькулятори, які виконують тільки арифметичні дії та обчислюють квадрати чисел.

Отже треба вдосконалити технологічний процес таким чином. Купується лист з міді товщиною 15 мм. В залежності від термообробки лист має якесь значення . В залежності від ширини листа з нього можна вирізати заготовку з якимось діаметром *D*. Матриця для штампування зосталася єдина, для якої *R*= 50 мм, *d* = 290 мм (*d*– діаметр матриці, тобто й рила теж). Зостанеться задати якусь коаксіальність *l*і обчислити за формулою висоту*h*рила. Від цієї базової висоти спроектувати інші деталі фурми, що з'єднані з рилом.

Виконаємо поставлену задачу за допомогою математичних методів даної роботи, а саме: визначимо висоту *h* як функцію *h* = *f(D, , l, R)*.

Вибираємо формулу з безрозмірними параметрами, які не дуже відрізняються за величиною між собою і близькі до одиниці (буде простіше й точніше обчислювати за такою формулою). Перетворимо параметри *D*, *l*, *R*в безрозмірні таким чином:

.

Тоді наступну формулу можна також використовувати для обчислювання висоти рила іншого діаметру *d***.**

Тимчасовий опір міді перетворимо на безрозмірну величину шляхом ділення

на середнє серед трьох (табл..4.1) значення = 23,6 Н/мм2: 

Для більш чуттєвого впливу на функцію  її аргументів вибираємо квадратичний вигляд формули:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.1) |

в якій маємо 4 параметри . Треба знайти числові значення цих параметрів.

Використовуючи параметри таблиці 4.1, складемо систему рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2) |

Рішеннями цієї системи (4.2) з точністю до двох знаків після коми є:



Таким чином, формула (4.1) приймає такий вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3) |

Обчислювання за формулою (4.3) у діапазоні параметрів таблиці 4.1 показує, що функція та її аргументи змінюються у межах:



А це означає, що зміни *l* і *R*майже не впливають на висоту*h*рила.

Якщо задати сталі значення *l*, *d* і *R* (наприклад, *l* = 10 мм, *d* = 290 мм і *R* = 50 мм) та перетворити формулу (4.3) до наступного вигляду:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4) |

то можна побачити (рис.7):

* більш міцна мідь сприяє росту висоти рила при штампуванні; фахівці пояснюють це тим, що у більш міцної міді менше висота „хвиль” на гофрах, отже ці гофри частково також можна деформувати скрізь матрицю;
* при *D* = 290 мм висота рила буде найбільша; це означає, що при *D = d* заготовка без всіляких зусиль переміститься в порожнину матриці на будь-яку висоту (глибину матриці), але такий варіант абсолютно не придатний, тому що ніякого штампування рила не відбудеться;
* наявність удаваного максимуму *h* при *D = d* показує, що формулою (4.3) можна користуватися у межах параметрів, що надані в таблиці 4.1.

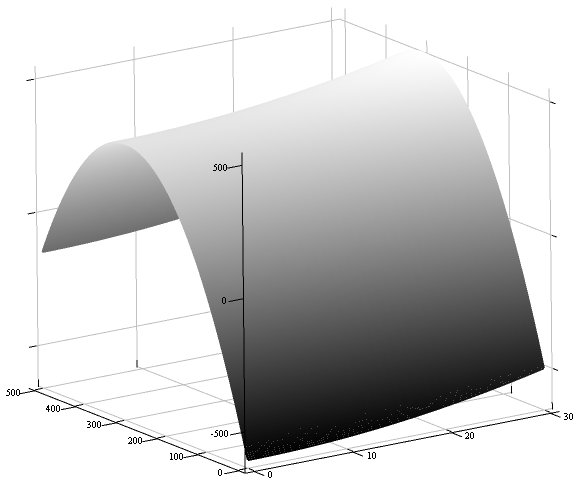


Рис.7. Графік функції .

Надана вище оптимізація технології оформлена мною у вигляді раціоналізаторської пропозиції №0403 (див. додаток 3) для підприємства „Азовмашпром”. Рішенням директора підприємства рацпропозиція №0403 буде використана при подальшому виготовленні рил з мідного листа для конструкцій повітряних доменних фурм.

Висновки

1. Вивчені методи рішення систем лінійних рівнянь. В роботі був використаний метод рішення за допомогою теорії визначників (метод Крамера).

2. На конкретних прикладах вивчена апроксимація результатів експерименту функціями лінійного, степінного, поліноміального і показниково-степінного типів з двома змінними. Показана ефективність використання для цієї мети систем рівнянь, що вирішуються за методом Крамера.

3. Вказані області практичного застосування функціональних залежностей, що апроксимують експериментальні дані. Наведений приклад масштабування комп'ютерної графіки за допомогою функцій, які екстраполюють або інтерполюють відомі символи графіки.

4. Для підприємства „Азовмашпром” складена раціоналізаторська пропозиція №0403 щодо оптимізації технології штампування мідної деталі для повітряної доменної фурми. Запропонована апроксимуюча функція чотирьох аргументів, знайдена рішенням системи рівнянь, які були складені на основі чотирьох експериментів. Розрахунки за цією функцію дозволять зменшити витрати на мідні заготовки і скоротити термін виготовлення фурми. Пропозиція №0403 прийнята до використання керівництвом „Азовмашпрому”.

5. На основі отриманих із даної роботи знань та навиків сформульована логічно зв'язана з даною роботою тема наступної науково-практичної роботи („Метод найменших квадратів”), в якій будуть розглядані математична і статистична обробки експериментальних результатів за даним методом.

Література

1. Аніщенко Є.О. Число як основне поняття математики. Науково-практична робота, ММТЛ, 2002 р., 27с.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.Л.. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. Изд. 7-ое.- М., Госиздательство технико-теоретической литературы, 1957, 608с.

3. Вiрченко Н.О., Ляшко I.I. Графiки елементарних та спецiальних функцiй. Довiдник.- Київ, Наукова думка, 1996, 583с.

4. Дьяконов В.В. Mathcad 8/2000. Специальный справочник. – Спб, Питер, 2000, 592с.

5. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров М., Наука, 1984, 831c.