***Пошукова робота***

***на тему:***

*Приклади складання рівняння лінії на площині за даними її геометричними властивостями. Пряма на площині. Площина. Пряма в просторі. Пряма і площина.*

**План**

* Приклади складання рівняння лінії на площині за даними її геометричними властивостями.
* Рівняння прямої на площині.
* Площина.
* Пряма в просторі.
* Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності. Кут між площинами, умови паралельності та перпендикулярності.
* Віддаль від точки до прямої на площині та від точки до площини.
* Пряма та площина.

**Пряма на площині**

**1. Рівняння прямої на площині**

Рівняння першого степеня, що зв’язує координати точки на площині, - це рівняння

           (3.3)



при умові



     В декартовій системі координат на площині кожна пряма лінія може бути задана лінійним рівнянням і, навпаки, кожне лінійне рівняння (3.3) визначає пряму лінію .



     Рівняння (3.3) називається *загальним рівнянням* прямої на площині.

     Нехай точка  лежить на прямій  (). Це значить, що її координати задовольняють рівняння (3.7)



Вираховуючи із рівняння (3.7) дану рівність, одержимо *рівняння прямої, що проходить через задану точку*

               (3.4)



     Якщо довільна точка на прямій, то вектор  повністю лежить на прямій а ліва частина рівності (3.8) виражає скалярний добуток векторів  і Оскільки скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, то вони є перпендикулярні , а це значить, що вектор  перпендикулярний прямій . Вектор, який перпендикулярний до прямої  називається *нормальним* вектором прямої. Вектор який паралельний прямій, називається *направляючим* вектором прямої. Очевидно, що  і, наприклад,



     Нехай задана пряма Позначимо через  радіус-вектор її початкової точки . Розглянемо тепер деяку точку  , радіус-вектор якої позначимо через (рис.3.7). Вектор , початок якого лежить на прямій, паралельний прямій тоді і тільки тоді, коли його кінець   ( точка ) також лежить на прямій. В цьому

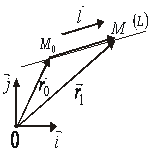


  Рис.3.7

випадку для точки  знайдеться таке число  (параметр), що



        (3.5)



Рівняння (3.5) називається *векторно-параметричим* рівнянням прямої.

Нехай в загальному вигляді направляючий вектор має координати Записавши рівняння (3.5) в координатній формі, одержимо *параметричні рівняння* прямої на площині



         (3.6)



     Виключаючи із рівнянь (3.6) параметр  одержимо *канонічне рівняння* прямої         (3.7)



     Із рівняння (3.17) одержимо



Позначимо . Тоді одержимо *рівняння прямої, що проходить через задану точкув* заданому *напрямку*



      (3.8)



Очевидно, що де кут, що утворює пряма (вектор ) з



додатнім напрямом осі Величину  називають *кутовим коефіцієнтом* прямої



     Позначивши через із рівняння (3.8) одержимо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*



       (3.9)



     Нехай дві точки  і  лежать на прямій Тоді за напрямний вектор можна взяти вектор, що з’єднує ці дві точки Підставивши в рівняння (3.7)



Замість  і  координати вектора  одержимо *рівняння* *прямої, що проходить через дві заданих точки*



       (3.10)



     Нехай задані точки перетину прямої з осями координат  і Використавши рівняння (3.10), одержимо



 або



      (3.11)



Рівняння (3.11) називається *рівнянням прямої у відрізках.*

*Пучком прямих на площині* називається сукупність прямих, що проходять через фіксовану точку – *пучка.* Будемо вважати, що дві прямі  і  перетинаються



() в точці  Рівняння



        (3.12)



де називається *рівнянням пучка прямих* на площині.



**2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих**

     Нехай дві прямі  і  задані рівняннями



  і   . Позначимо через



 і   кути, які утворюють  прямі  і   з додатнім напрямком осі (рис.3.8), а  це кут між цими прямими.

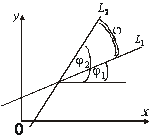


Рис.3.8

Тоді а Оскільки, то



або      (3.13)



Якщо прямі  і  паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні



Якщо прямі перпендикулярні, то , а тому



Можна обчислювати кут між двома прямими як кут між їх нормальними векторами   і



          (3.14)



**3. Віддаль від точки до прямої**

     Нехай пряма задана рівнянням  і точка



 радіус-вектор якої  Точка  радіус-вектор якої направляючий вектор прямої Тоді



віддаль  від точки до прямої можна розглядати як висоту  паралелограма, побудованого на векторах і    (рис.3.9).

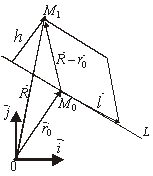
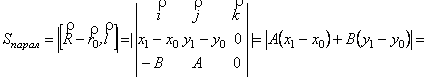


Рис.3.9

     Знайдемо площу паралелограма



= Але точка  тому



Тоді одержимо:

    (3.15)



     Рівняння

         (3.16)



називається нормальним рівнянням прямої на площині.

Приклад 1.  Дві сторони паралелограма задані рівняннями  і  Діагоналі його перетинаються в початку координат. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма та його діагоналей.



Р о з в ‘ я з о к. Знайдемо координати точки перетину сторін паралелограма



Нехай це точка   (рис.3.). Точка точка перетину діагоналей (середина діагоналі ). Тоді  і  Очевидно також, що  рівняння



сторони  а   рівняння сторони  Оскільки паралельна  то рівняння сторони шукаємо у вигляді



  знаходимо із умови, що точка



 і  рівняння сторони



Аналогічно знайдемо рівняння сторони    і



рівняння сторони  Координати вершини  шукаємо із системи рівнянь   Аналогічно знаходимо координати вершини



Рівняння діагоналі

|  |
| --- |
|  |
|  |  |

          Рис.3.10



Рівняння діагоналі



     Приклад 2. Написати рівняння прямої, що паралельна двом прямим і та проходить посередині між ними, якщо:



     Р о з в ‘ я з о к. Оскільки то паралельні прямі  і  розташовані по одну сторону від початку координат, а тому і шукана пряма  теж буде розташована по ту ж сторону від початку координат і



Рівняння прямої



**Площина**

**3. Рівняння площини**

     Алгебраїчне рівняння першого степеня, що зв’язує координати точки в просторі має вигляд

            (3.17)



при умові



     В декартовій системі координат в просторі кожна площина може бути задана лінійним рівнянням (3.17) і, навпаки, кожне лінійне рівняння (3.17) в декартовій системі координат в просторі задає площину . Отже, площина – це алгебраїчна поверхня першого порядку.



     Рівняння (3.17) називається *загальним рівнянням площини*.

     Розглянемо точку, що лежить в площині



Тоді



Вираховуючи із рівняння (3.17) дану рівність, одержимо *рівняння площини, що проходить через задану точку*

.     (3.18)



     Якщо довільна точка на площині, то вектор  повністю лежить в площині а ліва частина рівності (3.18) виражає скалярний добуток векторів  і Оскільки скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, то вони є перпендикулярні , а це значить, що вектор  перпендикулярний до площини(рис.3.11). Вектор, який перпендикулярний до площини  називається *нормальним* вектором площини.



     Розглянемо три точки, що лежать в площині (і не лежать на одній прямій)

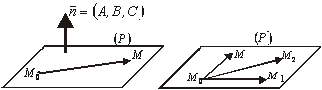


   Рис.3.11            Рис.3.12

Очевидно, що вектори ,

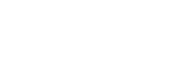


 також будуть лежати в площині  Тоді довільна точка  буде належати цій площині, коли вектор  буде лежати в площині  Отже, вектори  компланарні (рис.3.12). Якщо три вектори компланарні, то їх змішаний добуток дорівнює нулю   ().



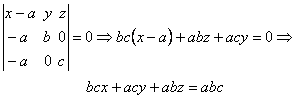
Записавши змішаний добуток трьох векторів в координатній формі, одержимо

         (3.19)



Рівняння (3.19) називається *рівнянням площини, що проходить через три заданих точки.*

     Нехай задані точки перетину площини з осями координат Тоді одержимо із рівняння (3.19)



або

.      (3.20)



Рівняння (3.20) називається *рівнянням площини у відрізках.*

*Зв’язкою площин* називається сукупність площин, що проходять через фіксовану точку – *центр зв’язки*. Нехай площини з рівняннями  перетинаються в єдиній точці Рівняння зв’язки площин



з центром в точці    при умові, що



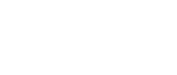
*Пучком площин* називається сукупність площин, що проходять через фіксовану пряму – *вісь пучка.* Рівняння пучка площин має вигляд



при умові  де в дужках стоять ліві частини  рівняння двох площин пучка.



     Нехай ми маємо три площини, задані рівняннями



     Щоб знайти їх спільні точки, треба розв’язати систему заданих трьох рівнянь, що описують ці площини. Якщо система має єдиний розв’язок, то площини мають спільну точку (перетинаються в одній точці).

     Якщо розв’язки не існують, то спільних точок немає. У випадку безлічі спільних точок можливі два випадки: або всі три

площини перетинаються по спільній прямій (пучок трьох площин), або всі три площини співпадають. Другий випадок можливий лише тоді, коли всі три рівняння зводяться до одного (пропорційність всіх чотирьох коефіцієнтів).

**3.4.2** . **Кут між двома площинами**

**Умови  паралельності і перпендикулярності двох площин**

     Розглянемо дві площини  (рис.3.13). Очевидно, що величина  двогранного кута між двома



площинами дорівнюватиме відповідному куту між їх нормальними

векторами  і   .



Тому кут . Кут між двома векторами  і



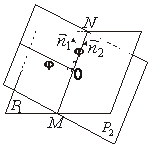
визначається за формулою , тобто



       (3.21)



 Очевидно, що коли площини паралельні, то  ||, а якщо перпендикулярні, то . Отже, умови паралельності двох площин визначаються так:



      ,     (3.22)



а перпендикулярності -



       (3.23)



     Рис.3.13

**3.4.3. Віддаль від точки до площини**

Якщо радіус-вектор точки площини , радіус-вектор точки  а  її нормальний вектор. то рівняння (3.18) можна записати у векторній формі



     Якщо і направляючі вектори площини (вектори, які паралельні площині або лежать в площині), то вектор  а тому може бути прийнятий за нормальний вектор площини

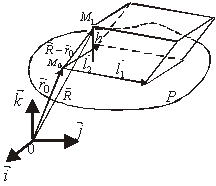


Тоді рівняння площини можна записати у вигляді

    (3.24)



     Нехай задана точка радіус-вектор якої позначимо через Віддаль від точки до площини  краще всього визначити як висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах , поділивши об’єм паралелепіпеда на площу основи (рис.3.14). Ми одержимо



Але для кожного нормального вектора площини  можна вибрати направляючі вектори  і такими, щоби  Тому ми маємо



     Рис.3.14   або в координатній формі



В силу того, що точка  маємо



звідки Тоді одержимо формулу для обчислення віддалі від точки  до площини заданої рівнянням



            (3.25)



Приклад 1. Задані чотири точки   і .



а) Перевірити чи лежать чотири точки в одній площині;

Написати рівняння:

б) площини  що проходить через три точки



в) площини , що проходить через точку  і паралельна площині



г) площини , що проходить через точки  і перпендикулярна



площині



д) площини  що проходить через точки



     Обчислити:

е) кут між площинами  і



є) віддаль між площинами  і

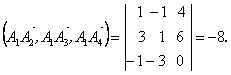


     Р о з в ‘ я з о к.

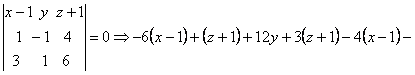
а) Знайдемо вектори      Точки  лежатимуть в одній площині тоді, коли вектори  компланарні (змішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю) :



 Отже вектори некомпланарні, а значить, точки  не лежать в одній площині.



     б) Запишемо рівняння площини , що проходить через три заданих точки:



     в) Рівняння площини , що проходить через точку



 Оскільки  і  паралельні, то



     г) Рівняння площини  шукаємо у вигляді (рівняння площини, що проходить через точку ) . Коефіцієнти  знаходимо із умов:   тоді



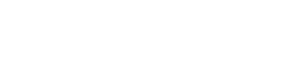
 і після ділення рівняння на



одержимо



     д) Рівняння площини , що проходить через точки



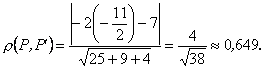
е) Кут між площинами  і  визначається як кут між їх нормальними векторами  і



 або



     є) Віддаль між двома паралельними площинами  і  знаходимо як віддаль від довільної точки, що лежить в площині  наприклад   до площини



     Приклад 2. Записати рівняння площини, що проходить через точку  і вісь



     Р о з в ‘ я з о к.   Рівняння площини шукаємо у вигляді  Оскільки площина проходить через вісь  то точки ,  лежать в даній площині; значить,  і рівняння шуканої площини має такий вигляд (після ділення на )



**3.5. Пряма в просторі**

**3.5.1. Рівняння прямої в просторі**

     Пряма в просторі задана, якщо відома деяка точка  що лежить на цій прямій, і вектор , який паралельний цій прямій. Такий вектор називається *направляючим вектором прямої.* Тоді довільна точка  буде лежати на цій прямій тоді і тільки тоді, коли вектори і  будуть колінеарні, тобто  Оскільки координати цих векторів   то останню рівність в координатній формі можна записати так:



        (3.26)



     Рівняння (3.26) називаються *параметричними рівняннями* прямої в просторі (параметр).



     Виключаючи із рівнянь (3.27) параметр одержимо *канонічне рівняння* прямої в просторі



        (3.27)



     Нехай дві точки  і  лежать на прямій . Тоді за направляючий вектор  можна взяти вектор  Підставляючи в рівняння (3.27)



замість   і  відповідні координати вектора  , одержимо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*



  (3.28)



     Пряма в просторі може задаватися як лінія перетину двох площин

 і .



Оскільки довільна точка що лежить на прямій, буде лежати і в цих площинах, то її координати будуть задовольняти обидва рівняння цих площин, тобто систему рівнянь. Отже рівняння такої прямої можна записати у вигляді системи рівнянь



   (3.29)



Рівняння (3.29) називається *загальним рівнянням прямої в просторі*. Очевидно, що рівняння (3.29) задають рівняння прямої, коли площини  і  непаралельні. Координати нормальних векторів площин і  такі:  Тоді , оскільки  , то пряма буде перпендикулярна обом нормальним векторам  і   Тоді в якості направляючого вектора можна взяти вектор



**3.5.2. Кут між двома прямими в просторі.**

**Умови паралельності та перпендикулярності**

     Кут між двома прямими  і , заданих рівняннями



 ,



визначається як кут між їх направляючими векторами  та  Тому



     (3.30)



     Якщо прямі  і паралельні, то їх направляючі вектори  і   будуть колінеарні. Тоді одержимо умову паралельності двох прямих



     (3.31)



     Якщо прямі   і  перпендикулярні, то , і ми маємо умову перпендикулярності двох прямих



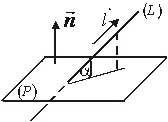
 (3.32)



**3.5.3. Кут між прямою і площиною.**

**Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини**

Кут між прямою та площиною визначається кутом між цією прямою та її



проекцією на площину (рис.3.15). Нехай пряма задана канонічним рівнянням



а площина - загальним рівнянням



.



Направляючий вектор прямої має координати , а нормальний вектор площини Очевидно, що кут між прямою  і площиною  дорівнює  де це кут між



      Рис. 3.15      векторами  і  Тоді  і



Отже, кут між прямою і площиною визначається за формулою

        (3.33)



     Пряма  паралельна площині  якщо вектори  і  перпендикулярні. Тому умова паралельності прямої і площини має вигляд



            (3.34)



     Пряма  перпендикулярна площині  якщо вектори  і  колінеарні, і умова перпендикулярності прямої і площини запишеться так



 (3.35)

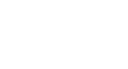


     Приклад 1. Обчислити віддаль між двома паралельними прямими

  і .



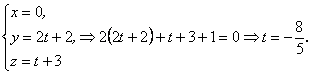
     Р о з в ‘ я з о к. Візьмемо на прямій  точку  і знайдемо основу перпендикуляра , опущеного із точки  на пряму  Для цього проведемо через точку площину, перпендикулярну прямій Рівняння площини має вигляд  Точка - це точка перетину даної площини з прямою Знайдемо координати точки , розв’язавши систему рівнянь



Дану систему рівнянь найкраще розв’язувати, записавши рівняння прямої  в параметричній формі



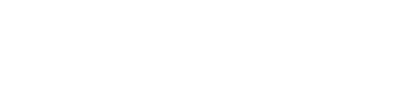
    Тому   Отже,  Віддаль між двома прямими  і  дорівнює довжині відрізка , тобто



     Приклад 2. Знайти проекцію точки  на площину



     Р о з в ‘ я з о к. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку  перпендикулярно до заданої площини ,    і знайдемо точку їх перетину Запишемо рівняння прямої в параметричній формі  і розв’яжемо систему рівнянь



Отже, проекція точки  на задану площину має координати

