***Пошукова робота***

***на тему:***

*Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.*

**План**

* Основні правила диференціювання.
* Похідні від елементарних функцій.
* Похідна від степеневої функції.
* Похідна від степеневої та логарифмічної функції.
* Похідні від тригонометричних функцій.
* Похідні від обернених тригонометричних функцій.
* Похідна від складної функції.

**1. Правила диференціювання**

Операція знаходження похідної від даної функції називається диференціюванням цієї функції. Доведемо ряд теорем, які дають основні правила знаходження похідних від функцій.

10. Похідна від аргументу . Покладемо , тоді . Тому .



Отже, якщо , то



                      .                                                     (6.14)



1.      Похідна від сталої функції .



Значення цієї функції у точках  і  рівні між собою при будь-якому . Тому приріст , а отже й .



Перейшовши до границі, в останній рівності при маємо



.



Границя відношення  при  існує і дорівнює нулю. Тому існує й похідна від цієї функції в довільній точці , яка теж дорівнює нулю, тобто



                                     .                                        (6.15)            3. Похідна від суми.



Теорема. Якщо функції  в точці  мають похідні, то функція  також в цій точці має похідну і ця похідна  дорівнює



        .                       (6.16)



Д о в е д е н н я. Надамо  деякого . Тоді функції  матимуть прирости , функція - приріст . Знайдемо відношення



.



            Перейдемо в цій рівності до границі при . Внаслідок того, що  в точці  згідно з умовою теореми мають похідну, то



,   .



Тому



            Отже, в цій точці  існує похідна від функції  і вона дорівнює .



Теорему доведено.

            Наслідок. Похідна від суми скінченого числа функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій, якщо похідні даних функцій існують, тобто

(6.17)



4. Похідна від добутку.

Теорема. Якщо функції  в точці  мають похідні, то в цій точці функція  також має похідну:



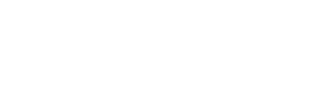
               .              (6.18)



            Д о в е д е н н я. Надамо  деякого приросту . Тоді функції  матимуть прирости , а функція  приріст



            Знайдемо відношення



Перейдемо в цій рівності до границі . За умови теореми



а



Отже,



Теорему доведено.

            Наслідок. Постійний множник можна виносити за знак похідної, тобто, якщо , то



                                                           (6.19)



5. Похідна від частки.

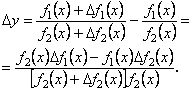
Теорема. Якщо функції  в точці  мають похідні і , то функція  також у точці  має похідну і похідна  дорівнює



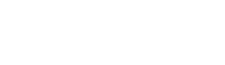
                                 (6.20)



            Д о в е д е н н я. Надамо  приросту . Тоді функції  матимуть відповідно прирости , а функція - приріст



Знайдемо відношення



За умовою теореми



а , тому



Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо знаменник дробу -  стала величина, то

                                                         (6.21)



Наслідок 2. Якщо чисельник дробу стала величина, то

                                                      (6.22)



6. Похідна від оберненої функції.

            Теорема.  Нехай функція  задовольняє всім умовам теореми про існування оберненої функції і в точці  має похідну . Тоді обернена до неї функція  у точці  має також похідну: .



            Д о в е д е н н я. Надамо  приросту . Тоді функція  дістане приріст , причому, внаслідок монотонності функції , матимемо , якщо . Тоді відношення  можна записати так:             Перейдемо в цій рівності до границі при . Внаслідок неперервності оберненої функції , тобто



            Отже, від функції  в точці  існує похідна:



                                                          (6.23)



Теорему доведено.

            Якщо функція  має похідну в довільній точці і



, то формула (6.23) справджується для цих точок



або, що те саме,

                                                                      (6.24)



            У формулі (6.24) похідні знаходяться за різними змінними: - похідна від  до , а - похідна від  до . Тому формулу (6.24) записують



                                                                    (6.25)



            Нижній індекс показує, за якою змінною знаходиться похідна.

Для зручності поміняємо у формулі (6.25) місцями  і . Остаточно матимемо таку формулу для похідної від оберненої функції:



                                                                       (6.26)



**2. Похідні від елементарних функцій**

**Похідна від степеневої функції**



**Випадок натурального показника.** Нехай , де - натуральне число. Тоді функція  визначена на всій числовій осі. Отже, візьмемо довільну точку  і надамо їй приросту . Тоді функція  матиме приріст :



Розкриємо  за формулою бінома Ньютона:



            Знайдемо відношення



            Перейшовши в цій рівності до границі при , дістаємо



            Отже похідна  від степеневої функції  з натуральним показником існує і дорівнює



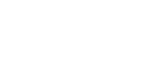
**Випадок довільного показника**. Нехай  є довільне дійсне число. Тоді область існування функції залежить від .



            Нехай  - область існування функції . Візьмемо довільне , але  (випадок  розглянемо окремо). Тоді приріст  дорівнює



            Знайдемо відношення



або

                                                          (6.28)



де .



            Перейдемо до границі у рівності (6.28) при . Зауважимо, що коли , то й . Тому



                                      (6.29)



            Обчислимо окремо



            Для цього введемо таке позначення:



причому , якщо . Тоді звідки . Тоді



            Проте внаслідок неперервності логарифмічної функції маємо



            Отже,



            Повертаючись до співвідношення (6.29), маємо



тобто якщо  і , то



                                                                  (6.30)



            Розглянемо випадок, коли . Якщо , то точка  не входить в область існування функції . Тому розглядатимемо  і . Знайдемо приріст функції в точці :



тоді



Звідси випливає, що у випадку  границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, існує і дорівнює нулю:



            Якщо , то  границя  не існує, тобто у випадку  функція  в точці  похідної немає.



            Проте, якщо формально у формулі (6.30) покласти , то дістанемо той самий результат.



            Отже, для похідної від степеневої функції ми маємо таке правило: похідна від степеневої функції дорівнює показнику, помноженому на цю функцію з показником, на одиницю меншим.

**3. Похідна від показникової та логарифмічної функцій**

            1. Нехай маємо показникову функцію   .



Знайдемо в довільній точці  приріст :



Тоді



            Перейдемо тут до границі при . Маємо



            Таким чином, похідна від показникової функції  існує в довільній точці  і дорівнює



                                                             (6.31)



            Зокрема,

                                                                    (6.32)



            2. Нехай маємо логарифмічну функцію , де . Згідно з означенням логарифмічної функції маємо таку рівність:



            Оскільки , то



            Отже,

                                       (6.33)



            Зокрема,

                                                                (6.34)

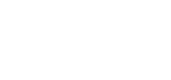


**4. Похідні від тригонометричних функцій**

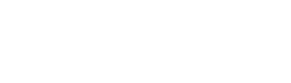
1.. Знайдемо приріст функції  в довільній точці :



            Знайдемо відношення



            Перейдемо в цій рівності до границі при :



            Отже похідна від функції  існує в довільній точці  і дорівнює



                                                               (6.35)



2.. Аналогічно доводиться, що від функції  в довільній точці  існує похідна, яка дорівнює



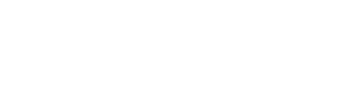
                                                        (6.36)



       3. Зобразимо  у вигляді



Скориставшись формулою (6.20), маємо



            Отже,

                                                         (6.37)



4.. Аналогічно можна довести, що



                                                       (6.38)



**5. Похідні обернених тригонометричних функцій**

1., де , .



Тоді згідно з означенням функції  маємо таку рівність:



причому похідна  при  не дорівнює нулю. Тому для знаходження похідної від  можна скористатися формулою (6.24):



            Оскільки , то  набуває тільки додатних значень. Тоді можна записати:



            Отже,  остаточно

                                               (6.39)



2.      Аналогічно можна вивести формули похідних

                           (6.40)



                                    (6.41)                                     (6.42)



**6. Похідна від складної функції**

**Функція однієї змінної.**

            Теорема.  Нехай маємо складну функцію   і нехай: 1) зовнішня функція  в точці  має похідну (по ) ; 2) внутрішня функція  в точці  має похідну (по ) . Тоді складна функція  в точці  також має похідну (по ), яка дорівнює добутку похідних від зовнішньої  і внутрішньої  функції, тобто



або

                                              (6.43)



            Правило знаходження похідної від складної функції: щоб знайти похідну від складної функції, треба знайти похідну від зовнішньої функції за зовнішнім аргументом і результат помножити на похідну від внутрішньої функції за внутрішнім аргументом.

            Зауваження. Ця теорема може бути узагальнена і на той випадок, коли аргумент внутрішньої функції є, в свою чергу, функцією від іншого аргументу. Так, якщо маємо функції  і кожна з них у відповідних точках має похідні, то функція  має похідну по , яка дорівнює



            Приклади.

1.      Знайти похідну від функції .



Р о з в ’ я з о к. Введемо позначення . Тоді матимемо складну функцію  і  задовольняють умовам теореми для . Отже,



2.      Знайти похідну від функції .



Р о з в ’ я з о к. Введемо позначення . Тоді матимемо складну функцію , .



            Тому



**Похідна від степенево-показникової функції.**

            Означення. Функція , де  і - функції , називається степенево-показниковою функцією.



            Степенево-показникову функцію не можна диференціювати ні за формулою похідної степеневої функції, ні за формулою показникової функції, оскільки вона не є ні тою ні другою. Одержимо окрему формулу.

            Нехай дана функція , де . Прологарифмувавши обидві частини рівності, маємо



Диференціюємо обидві частини цієї рівності по  як складні функції:



            Звідси



або

                                                      (6.44)



            Правило диференціювання степенево-показникової функції: щоб продиференціювати степенево-показникову функцію, достатньо знайти від неї похідну як від показникової функції (тимчасово вважаємо основу  сталою), похідну як від степеневої функції (вважаємо показник  сталим) та результати додати.



            Приклади.

1.      Знайти похідну від функції .



Р о з в ’ я з о к.



2.      Знайти похідну від функції .



Р о з в ’ я з о к.



            Зауваження. Застосований в цьому параграфі прийом для знаходження похідних, коли спочатку знаходять похідну логарифму даної функції, широко використовується при диференціюванні функцій. Цей прийом часто спрощує обчислення.

            Приклад.

            Знайти похідну від функції



            Р о з в ’ я з о к. Логарифмуючи, знаходимо



            Диференціюємо обидві частини цієї рівності:



Звідси



**Похідна від складної функції кількох змінних.**

            Із означення безпосередньо випливає правило знаходження частинних похідних функції : щоб знайти частинну похідну від функції  за одним із її аргументів, потрібно обчислити похідну від функції  за цим аргументом, вважаючи інші аргументи постійними .



            Приклади.

            1. Знайти частинні похідні від функції



            Р о з в ’ я з о к.



2. Знайти частинні похідні від функції



            Р о з в ’ я з о к.



            Нехай задана функція , аргументи якої  і  є функціями незалежної змінної :



            Нехай має по і  неперервні частинні похідні  і  і існують  і . Тоді можна довести існування похідної складної функції  і одержати формулу для її обчислення:



                                                (6.45)

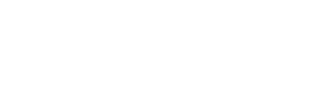


            Приклад.

            Знайти похідну від функції , якщо , .



            Р о з в ’ я з о к.



            Якщо, зокрема, , , тобто, якщо один із аргументів функції  є незалежна змінна, а другий - його функція, то формула (6.45) (покласти в ній ) дає вираз повної похідної від функції  по :



                                                      (6.46)



            Нехай  є складною функцією не однієї, а кількох незалежних змінних  і . Нехай  має неперервні частинні похідні по  і по , а  і  мають частинні похідні по . За таких умов формула диференціювання складної функції записується так:



                                                       (6.47)



                                     ....



            Приклад.

            Знайти частинні похідні від функції , якщо , .



            Р о з в ’ я з о к.

