

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ

им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра информатики и автоматизации научных исследований

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ (СБОРНИК ЗАДАЧ) ПО КУРСУ «СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

Нижний Новгород, 2010

Методические указания (сборник задач) для самостоятельной работы студентов специальности «Прикладная информатика» факультета ВМК по курсу «Системы принятия решений» / Нижегородский государственный университет, 2010, с 20.

Данная методическая разработка содержит задания, связанные с применением необходимых и достаточных условий оптимальности в различных классах оптимизационных задач.

Методическая разработка подготовлена доцентом Коротченко А.Г., Сморяковой В.М., Кучиной О.М., Малаховской Д.А.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент В.А.Гришагин

В данной разработке приведены оптимизационные задачи, для которых требуется доказать существование решения, задачи на доказательство некоторых свойств выпуклых множеств и выпуклых функций, а также задачи на использование необходимых и достаточных условий оптимальности.

Напомним основные обозначения, используемые при решении задач данного раздела:

 - -мерные вектора;

- -мерное евклидово пространство со скалярным произведением ;

 - норма вектора X;

 - градиент функции  в точке ;

- матрица вторых частных производных (гессиан) функции  в точке .

**Задача математического программирования**



 (1)

 - допустимое множество задачи математического программирования,

.

 - функция Лагранжа задачи (1), где   .

 - градиент функции Лагранжа по координатам вектора **, то есть вектор, составленный из частных производных функции Лагранжа по координатам вектора **:

.

- матрица вторых частных производных функции Лагранжа по координатам вектора **.

Сформулируем известный из курса математического анализа результат о существовании решения задачи (1):

***Теорема 1 (Теорема Вейерштрасса)***

Пусть  - компакт (ограниченное и замкнутое множество) в ,  - непрерывная функция на . Тогда точка глобального минимума функции  на  (глобальное решение задачи (1)) существует.

1. Пусть  - замкнутое множество на ,  - непрерывная функция на , причём при некотором  множество  ограничено. Доказать, что тогда точка глобального минимума функции  на  существует.
2. Известно, что функция  непрерывна на  и удовлетворяет следующему условию:  для любой последовательности  такой, что , . Доказать, что тогда функция  достигает своего минимального значения на любом замкнутом множестве из .
3. Пусть непрерывная функция  имеет точку глобального минимума на . Следует ли отсюда, что функция  имеет точку глобального минимума на любом замкнутом множестве из ?
4. Пусть - точка строгого локального минимума функции  на  (). Можно ли утверждать, что  убывает в некоторой левой полуокрестности точки  и возрастает в некоторой правой полуокрестности ?
5. Убедиться, что функция  достигает локального минимума в точке = (0,0) вдоль каждой прямой, проходящей через , но  не является точкой локального минимума этой функции.

Задача математического программирования (1) называется задачей безусловной оптимизации, если , то есть

 (2)

***Теорема 2 (Необходимое условие локальной оптимальности первого порядка)***

Пусть функция  дифференцируема в точке . Если - локальное решение задачи (2), то

. (3)

***Теорема 3 (Необходимое условие локальной оптимальности второго порядка)***

Пусть функция  дважды дифференцируема в точке . Если  - локальное решение задачи (2), то матрица  - неотрицательно определена, то есть

 при всех . (4)

***Теорема 4 (Достаточное условие локальной оптимальности)***

Пусть функция  дважды дифференцируема в точке  и , а матрица  положительно определена, то есть

 при всех , . (5)

Тогда  - строгое локальное решение задачи (2).

***Теорема 5 (Критерий Сильвестра)***

Симметрическая матрица является неотрицательно (положительно) определенной, тогда и только тогда, когда все её главные (угловые) миноры неотрицательны (положительны).

*Пример 1.*

Рассмотрим задачу безусловной оптимизации:

.

*Решение:*

1. Выпишем необходимое условие локальной оптимальности первого порядка:

  

Решениями этой системы являются точки = (0,0), 

1. Рассмотрим гессиан функции  в точках  и :

  , .

Матрица  по критерию Сильвестра не является неотрицательно определённой, то есть необходимое условие локальной оптимальности второго порядка не выполняется. Отсюда следует, что точка = (0,0) не может быть решением задачи.

Матрица  положительно определена. Следовательно, выполняется достаточное условие локальной оптимальности. Точка – строгое локальное решение задачи.

В следующих задачах требуется привести примеры функций одной или двух переменных, в которых выполняются указанные ниже требования.

1. Глобальные максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.
2. Функция ограничена, глобальный максимум достигается, а глобальный минимум не достигается.
3. Функция ограничена, но глобальные минимум и максимум не достигаются.
4. Функция ограничена, имеет локальные минимумы и максимумы, но глобальные максимум и минимум не достигается.
5. Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся глобальным.
6. Имеется бесконечное число локальных минимумов, но нет ни одного локального максимума.
7. Найти все точки локального минимума и локального максимума функции  на .

Найти локальные решения в задачах 13-16.

1. .
2. 
3. 
4. 
5. Найти наименьшее значение функции , где ; - заданные числа.
6. Показать, что в методе наискорейшего спуска направления  и  - ортогональны.

Напомним, что метод наискорейшего спуска предназначен для отыскания локального минимума функции  и задаётся расчётной формулой  для заданной точки  и , которые выбираются из условия минимизации функции вдоль направления антиградиента для каждого .

Задача математического программирования (1) называется классической задачей на условный экстремум, если , то есть

 (6)

Функция Лагранжа классической задачи на условный экстремум определена при ,, .

***Теорема 6 (Необходимое условие локальной оптимальности первого порядка)***

Пусть функции  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки . Если - локальное решение задачи (6), то существует число  и вектор  не равные нулю одновременно и такие, что

. (7)

Если градиенты  линейно независимы, то .

Условие линейной независимости градиентов ограничений в точке  называется условием регулярности. Числа  называются множителями Лагранжа. Функция Лагранжа, для которой , называется регулярной.

***Теорема 7 (Необходимое условие локальной оптимальности второго порядка)***

Пусть функции  дважды дифференцируемы в точке  и непрерывно дифференцируемы в некоторой её окрестности, причём градиенты  линейно независимы. Если - локальное решение задачи (6), то

 (8)

при любых , , удовлетворяющих (7), и всех  таких, что

 (9)

***Теорема 8 (Достаточное условие локальной оптимальности)***

Пусть функции  дважды дифференцируемы в точке , удовлетворяющей ограничениям . Предположим, что при некоторых ,  выполняется условие (7), и кроме того

 (10)

при всех ненулевых , удовлетворяющих условию (9).

Тогда  - строгое локальное решение задачи (6).

*Пример 2.*

Рассмотрим классическую задачу на условный экстремум:



,

.

*Решение:*

1. Составим функцию Лагранжа:

=.

2. Выпишем необходимые условия оптимальности и ограничение задачи:

  

Ясно, что условие регулярности для данной задачи выполнено, но иногда бывает удобно рассмотреть отдельно два случая  и .

Если  то и , что противоречит необходимому условию оптимальности (не все множители Лагранжа равны нулю). Полагаем . Таким образом, имеем регулярную функцию Лагранжа:

=.

Необходимые условия перепишутся в виде:



Данная система имеет два решения:

1) 

2) 

3. Далее рассмотрим матрицу вторых частных производных функции Лагранжа:

.

Для указанных решений матрица принимает соответственно вид:

, .

Выпишем условие (9):

, .

Исследуем полученные точки  и :

3.1. Условие (9) для точки  выглядит следующим образом: . Отсюда . Нетрудно проверить, что матрица  удовлетворяет условию (10). Достаточное условие оптимальности выполнено, следовательно, точка  - строгое локальное решение исходной задачи.

3.2. Из условия (9) для точки  получаем . Проверим условие (8) для таких . Получаем , при . Необходимое условие оптимальности второго порядка не выполняется. Точка  не является решением задачи.

1. Из данного треугольника вырезать два равных круга наибольшего радиуса.
2. Доказать, что из всех треугольников с общим углом при вершине и данной суммой длин боковых сторон равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание.
3. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.
4. Даны две параллельные прямые и точка  между ними, лежащая на расстоянии  от одной прямой и на расстоянии  от другой прямой. Точка  служит вершиной прямых углов прямоугольных треугольников, две другие вершины которых лежат на каждой из параллельных прямых. Какой из треугольников имеет наименьшую площадь?
5. В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум её непересекающимся рёбрам. Найти сечение с наибольшей площадью.
6. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается полукругом. Каково должно быть основание прямоугольника для того, чтобы при данном периметре  окно пропускало бы больше света?
7. Дан квадратный лист картона. Какой величины должны быть вырезаны квадраты в каждом из четырёх углов этого листа, чтобы из оставшейся крестообразный фигуры можно было сделать коробку наибольшей вместимости?
8. В эллипс  вписать прямоугольник наибольшей площади.
9. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна , найти наибольший по площади.

В задачах 28-31 требуется определить локальные минимумы и максимумы функции  при выполнении ограничения .

1.  , .
2. , .
3. , .

В задачах 28-30 .

1. , , - симметрическая матрица размера , .
2. Доказать, что для любых двух векторов ,  таких, что ,  справедливо неравенство .

Найти решения задач на условный экстремум:

1. , , .
2. , , .
3. , .
4. Число  разложить на  множителей так, чтобы сумма их была наименьшей.

**Выпуклые множества и выпуклые функции**

Непустое множество  называется выпуклым, если  при всех , .

Функция , определенная на выпуклом множестве , называется выпуклой, если

 (11)

при всех , . Если при всех , ,  неравенство (11) выполняется как строгое, то  называется строго выпуклой.

Функция , определенная на выпуклом множестве , называется сильно выпуклой с константой , если



при всех , .

Ниже приведены необходимые и достаточные условия выпуклости и сильной выпуклости дифференцируемых функций. Для краткости формулировок выпуклые функции рассматриваются как сильно выпуклые с параметром .

***Теорема 9 (Первый дифференциальный критерий сильной выпуклости)***

Пусть функция  дифференцируема на выпуклом множестве . Тогда для того, чтобы  была сильно выпуклой с параметром  на , необходимо и достаточно выполнения условия:

, при всех .

***Теорема 10 (Второй дифференциальный критерий сильной выпуклости)***

Пусть функция  непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве . Тогда для того, чтобы  была сильно выпуклой с параметром  на , необходимо и достаточно выполнения условия:

, при всех .

***Теорема 11 (Третий дифференциальный критерий сильной выпуклости)***

Пусть  дважды непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве , причем внутренность множества  не пуста (). Тогда для того, чтобы  была сильно выпуклой с параметром  на , необходимо и достаточно выполнения условия:



 для всех .

1. Показать, что множество  выпукло тогда и только тогда, когда  при всех . Здесь  - алгебраическая сумма множеств  ().
2. Являются ли выпуклыми множествами следующие множества на плоскости:

а) круг  с центром в начале координат;

в) часть круга , получающаяся из него путём вырезания сектора, лежащего в правом квадранте.

1. Верно ли, что объединение и пересечение двух выпуклых множеств выпукло?
2. Пусть - выпуклые множества, - произвольные числа. Доказать, что множество  выпукло.
3. Перечислить все выпуклые множества, принадлежащие числовой прямой .
4. Показать, что следующие множества являются выпуклыми:

а) - прямая, проходящая через точку  в направлении ;

в) - луч, выходящий из точки  в направлении ;

с) - гиперплоскость с нормалью  () ;

d) ,

- порождаемые гиперплоскостью с нормалью  () полупространства. Здесь .

1. Показать, что множество, где - некоторая матрица размера () со строками , , является выпуклым.
2. Показать, что множество  является выпуклым. Здесь , - заданные числа.

Точка  выпуклого множества  называется крайней, если её нельзя представить в виде 

1. Определить все крайние точки множества , заданного в задаче 44.
2. Определить все крайние точки множества , где .
3. Указать все крайние точки множества , определённого в задаче 42.

В задачах 48-53 множество  предполагается выпуклым.

1. Доказать, что функция - выпукла, если  выпукла и .
2. Доказать, что функция  - выпукла, если  выпукла, .
3. Проверить, что функция  - выпукла на .
4. Пусть - выпуклые функции на множестве . Доказать, что функция - выпукла на .
5. Пусть - выпуклые функции на множестве , , и хотя бы при одном  функция  строго (сильно) выпукла, . Доказать, что - строго (сильно) выпукла на .
6. Доказать, что функция  - выпукла на , если функции , , выпуклы на .
7. Пусть - выпуклая функция на выпуклом множестве . Показать, что  при всех , для которых .
8. Доказать, что функция  сильно выпукла на , .
9. Доказать, что строго вогнутая функция может достигать своего минимального значения только в крайних точках выпуклого множества , на котором она определена.
10. Найти максимальное значение функции  при выполнении ограничений:





1. Пусть функция - непрерывная, монотонно неубывающая функция на отрезке . Показать, что функция  является выпуклой на отрезке .
2. Проверить, что функция  выпукла на .

Задача

 (12)

называется выпуклой, если  - выпуклое множество, а  выпуклая функция на .

1. Доказать, что в выпуклой задаче любое её локальное решение является также и глобальным.
2. Пусть функция  выпукла на  и дифференцируема в точке . Доказать, что если , то - точка минимума функции  на .
3. Известно, что выпуклая задача (12) имеет решение. Доказать, что тогда множество её решений выпукло, если при этом  строго выпукла на , то решение задачи (12) единственно.

**Условия оптимальности**

Пусть - множество направлений убывания функции  в точке , а  - множество возможных направлений относительно множества  в точке . Напомним, что вектор  задаёт направление убывания функции  в точке , если  при всех достаточно малых , и возможное направление относительно множества  в точке , если точка  при всех достаточно малых .

1. Доказать, что если - локальное решение задачи (3) без каких-либо предположений на множество  и функцию , то .
2. Пусть в задаче (12) множество  выпукло, а функция - дифференцируема в точке . Доказать, что тогда, если - локальное решение задачи (12), то

, (13)

если же  выпукла на  и выполняется (13), то - глобальное решение задачи (12).

1. Доказать, что если  (- внутренняя точка множества ), то (13) эквивалентно условию .
2. Пусть множество  имеет вид , где ,  (если  или , то соответствующий знак неравенства в задании множества  следует понимать как строгий). Доказать, что тогда условие (13) эквивалентно условию: для любого 



1. Пусть множество  имеет вид ,  ( соответствует случаю ). Доказать, что тогда (13) эквивалентно условиям:



1. Решить задачу:



1. Решить задачу:



1. Пусть - дифференцируемая сильно выпуклая функция на . Показать, что при любом  решение уравнения  на  существует и единственно.
2. Пусть - дифференцируемая выпуклая функция на . Показать, что при любом  решение уравнения  на  существует и единственно.

Напомним необходимое условие оптимальности (Принцип Лагранжа) в задаче математического программирования (1).

***Теорема 12 (Принцип Лагранжа)***

Пусть в задаче (1) множество  - выпукло, функции  дифференцируемы в точке , функции  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки . Если  - локальное решение задачи (1), то существует число  и вектор  не равные нулю одновременно и такие, что

 (14)

. (15)

Используемые здесь обозначения пояснены после формулировки задачи (1) на странице 3, а числа , также как в классической задаче на условный экстремум, называются множителями Лагранжа.

***Теорема 13 (Достаточное условие оптимальности)***

Пусть в задаче (1) множество  выпукло, функции  выпуклы на  и дифференцируемы в точке , функции  линейны. Если при  и некотором  выполняются условия (14), (15), то  - глобальное решение задачи (1).

***Теорема 14 (Условия регулярности)***

Пусть в задаче (1) множество  выпукло, функции  дифференцируемы в точке , функции  выпуклы на , функции  линейны. Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. ограничения-равенства отсутствуют () и существует точка  такая, что при всех ;
2. , функции  линейны.

Тогда, если - локальное решение задачи (1), то существует  такой, что при  будут выполнены условия (14), (15).

Условие 1) теоремы называется условием регулярности Слейтера.

***Теорема 15 (Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме)***

Пусть в дополнение к условиям теоремы 14 функция  выпукла на . Тогда точка  является решением задачи (1) в том и только том случае, если существует вектор  такой, что при  выполняются условия (14), (15).

*Пример 3.*

Рассмотрим задачу:



*Решение:*

1. Очевидно, что данная задача - задача выпуклого программирования.

2. Условия регулярности Слейтера выполнено, следовательно, функция Лагранжа регулярная:

.

1. Выпишем необходимые условия:

  

Пусть , тогда , но данная точка не удовлетворяет ограничению задачи. Отсюда следует, что . Система перепишется в виде:



Разрешая систему, получим:

.

4. Для задачи выпуклого программирования необходимые условия оптимальности являются и достаточными (теорема 13), то есть  - глобальное решение задачи.

1. Опираясь на решение задач 65-67, конкретизировать условие (14) в случае, когда  и когда имеет вид, указанный в задачах 66, 67.

Проекцией точки  на множество *D*  называется точка , ближайшая к  среди всех точек из *D*. Иными словами,  является решением задачи проектирования

.

Заметим, что понятие проекции точки на множество используется в численных методах условной оптимизации, основанных на идее проектирования очередной точки, вырабатываемой методом решения безусловной задачи, на допустимое множество задачи с ограничениями.

Доказать следующие утверждения для произвольной точки .

1. Если - сфера, то .
2. Если - координатный параллелепипед, то



1. Если  - неотрицательный октант, то .
2. Если  - гиперплоскость (), то .
3. Если  - полупространство (), то .
4. Если - аффинное множество, причём строки матрицы  линейно независимы, то , где  - транспонированная матрица, .
5. Решить задачу:





1. Доказать, что решением задачи выпуклого программирования





является точка .

1. Показать, что других решений, кроме , в задаче 80 нет.
2. Доказать, что решением задачи выпуклого программирования





является точка .

1. Показать, что других решений, кроме , в задаче 82 нет.

В задачах 84-88 .

1. Используя необходимые условия оптимальности (14), (15), разработать численный метод отыскания решения задачи





Решить задачи:

1. 



 - положительные числа, .

1. 



- произвольные числа, .

1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



1. Доказать, что если ,  - положительные числа, причём , то .

Пусть

,



 (17)

1. Показать, что если  дифференцируемы в точке  и - локальное решение задачи (17), то существуют числа , такие, что

.

Предполагая, что в задаче (1) , обозначим через  точную нижнюю грань целевой функции задачи (1) на её допустимом множестве: . Вектор  называется вектором Куна-Таккера задачи (1), если  при всех .

Двойственной к задаче (1) называется задача

 (18)

, .

При этом задача (1) называется прямой. Предполагая, что , обозначим через .

1. Показать, что в задаче (18) множество  выпукло, а функция  вогнута на .
2. Показать, что для любых  и  справедливо неравенство . Если , , то .

***Теорема 16 (Теорема существования вектора Куна-Таккера)***

Пусть в задаче (1) множество  выпукло, функции  выпуклы на , функции  линейны. Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. ограничения равенства отсутствуют () и существует точка  такая, что ;
2. , функции  линейны, множество .

Тогда вектор Куна-Таккера задачи (1) существует.

***Теорема 17 (Теорема двойственности)***

Пусть вектор Куна-Таккера задачи (1) существует. Если значение прямой задачи (1) конечно () в частности, если она имеет решение, то множество решений двойственной задачи (18) непусто и совпадает с множеством векторов Куна-Таккера задачи (1). При этом справедливо соотношение двойственности

. (19)

1. Показать, что если вектор Куна – Таккера задачи (1) существует, а допустимое множество  двойственной задачи непусто, то она имеет решение. Если же , то .
2. Для задачи



построить двойственную и найти её решение. Убедится в справедливости соотношения (19).

***Теорема 18 (Теорема Куна-Таккера в форме двойственности).***

Пусть вектор Куна-Таккера задачи (1) существует. Тогда точка  является решением задачи (1) в том и только том случае, если существует вектор  такой, что справедливо соотношение двойственности

, (20)

равносильное условиям

,

.

Множество векторов , удовлетворяющее (20), совпадает с множеством решений двойственной задачи (18) или же с множеством векторов Куна-Таккера прямой задачи (1).

100. Решить задачу:



- заданные числа.

**Литература**

1. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. –М.: Просвещение, 1964.
2. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И. Задачи по элементарной математике. –М.: Наука, 1965.
3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. –М.: Наука, 1984.
4. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.

–М.: Наука, 1986.

1. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. –М.: Высшая школа, 1986.

