

Проектная работа по математике на тему:

**«Доказательство теоремы Морлея**

**для прямоугольного треугольника»**

Авторы: Сарайкина Ольга, Немков Ян

(10 класс)

Руководители: Ленчевская Людмила Ивановна,

Барышева Элла Николаевна,

Моисеева Надежда Николаевна

**Содержание**

[Цель работы 3](#_Toc283987650)

[Введение 4](#_Toc283987651)

[История открытия и доказательства теоремы Морлея 6](#_Toc283987652)

[Доказательство теоремы Франка Морлея для прямоугольного треугольника 9](#_Toc283987653)

[Заключение 12](#_Toc283987654)

[Литература 13](#_Toc283987655)

Цель работы:

- доказать собственным авторским способом теорему Франка Морлея о трисектрисах треугольника для любого прямоугольного треугольника.

При работе над этим проектом были поставлены следующие задачи:

- расширение математического кругозора;

- развитие творческих способностей;

- приобретение опыта самостоятельной научной работы;

- углубление знаний по математике и по истории математики.

# Введение

Следовать за мыслями великого человека

есть наука самая замечательная

А. С. Пушкин

Данная работа имеет большую практическую значимость, так как ее результаты обсуждались в школе на занятиях математического кружка и на заседании школьного научного общества. Кроме того, результаты работы могут использоваться в качестве дополнительного материала на уроках геометрии при изучении темы «Биссектрисы треугольника».

Представленная проектная работа имеет две части: в первой части рассматривается история открытия и доказательства английским ученым Франком Морлеем теоремы о трисектрисах треугольника; во второй части приводится оригинальное собственное доказательство авторами проекта теоремы Морлея для прямоугольного треугольника. Выполняя доказательство, авторы проявили эрудицию, смекалку и находчивость.

Данный проект имеет непосредственное отношение к одной теореме математики, которую окрестили “последним великим открытием планиметрии”. Сегодня она известна как теорема Морлея. Эта теорема является фундаментом многих исследований в области планиметрии и геометрии треугольника. Существует множество различных доказательств самой теоремы Морлея, но они раскрыли далеко не все тонкости, готовых принести пользу математике, а лишь затронули отдельный вопрос. Мы же в работе занялись исследованием некоторых особенностей, которые таит в себе теорема Морлея.

Актуальность рассматриваемой темы вытекает из того факта, что вопрос о трисектрисах треугольника и их свойствах еще недостаточно изучен, поэтому представляет интерес для изучения, с целью расширения наших знаний о математике и ее дальнейшем развитии.

Полученный результат оригинален и не был замечен нами ранее в литературе.

# История открытия и доказательства теоремы Морлея

**Франк Морлей** (англ. *Frank Morley*, 9 сентября 1860 — 17 октября 1937) был математиком, который внёс большой вклад в алгебру и геометрию.



Родился в Англии в городке Вудбридж. Его родители были владельцами небольшого магазинчика.

В 1900 году Морлей закончил Колледж Хэверфорд. Почти всю свою жизнь он провел в США, хотя оставался английским гражданином. Несколько десятков лет Морлей был профессором математики университета имени Джона Гопкинса в Балтиморе – одного их старейших американских университетов.

Наряду с математикой он увлекался и шахматами и однажды сумел выиграть у его одного видного математика – Эммануила Ласкера, тогдашнего чемпиона мира по шахматам.

Пусть *ABC* – произвольный треугольник. Хорошо известно, что биссектрисы его углов пересекаются в одной точке. А что произойдет, если биссектрисы заменить трисектрисами? Фрэнк Морлей рассмотрел такую ситуацию и доказал, что точки *M*, *N*, *K* при любом исходном треугольнике *ABC* являются вершинами равностороннего треугольника. Морлей рассказал об этом поразившем его факте своим друзьям, те – в свою очередь – своим, и вскоре "теорема о трисектрисах треугольника", ныне известная как *теорема Морлея*, распространилась по миру в качестве своеобразного математического фольклора.

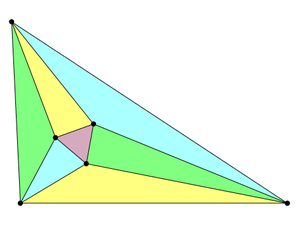
Наверное, все не один раз слышали о «неразрешимых» математических задачах. Именно о них ещё в 1792 году Парижская академия наук приняла вечное решение: «Отныне и впредь не рассматривать разрешение задач удвоения куба; трисекции угла; квадратуры круга». Именно поэтому исследования, связанные с упомянутыми вопросами долгое время не рассматривались в научных кругах.

Доказательство своей теоремы Морлей опубликовал в 1914 году – через 15 лет после того, как нашел его. В 1924 году он изложил это доказательство более подробно. Доказательство его теоремы весьма элегантно, но в то же время достаточно сложно. В настоящее время теорема имеет много доказательств, которые являются и тригонометрическими, и через аппарат комплексных чисел, и элементарные геометрические.

Теорема Морлеяо трисектрисах **—** одна из самых удивительных теорем геометрии треугольника (трисектрисами угла называются два луча, делящие угол на три равные части).

**Теорема утверждает:**

|  |
| --- |
| Точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольник являются вершинами равностороннего треугольника. |

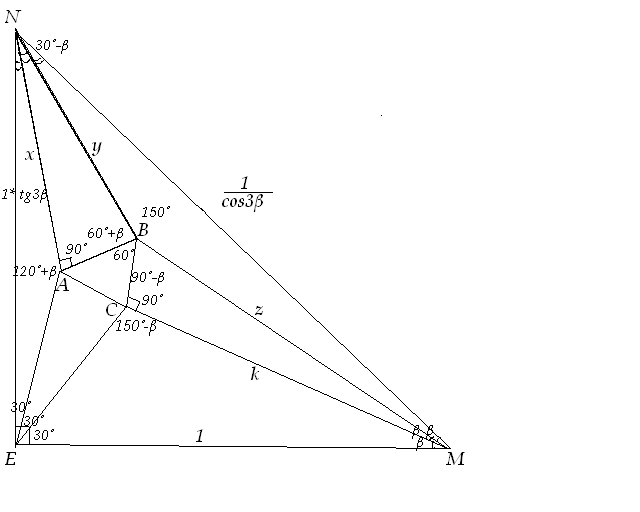


Французский математик А. Леберг (1875-1941), используя элементарные средства, доказал, что среди точек пересечения всех трисектрис треугольника можно указать 27 троек, являющихся вершинами равносторонних треугольников. В частности, трисектрисы внешних углов треугольника, примыкающие к одной и той же стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Стороны равносторонних треугольников параллельны сторонам «основного» равностороннего треугольника Морлея.

# Доказательство теоремы Франка Морлея для прямоугольного треугольника

**Теорема:** Точки пересечения смежных трисектрис углов прямоугольного треугольник являются вершинами равностороннего треугольника.

**Дано:** ∆ NEM,



угол NEM = 90˚,

углы E, N и M – поделены каждый на 3 равные части.

**Доказать**: ∆АВС – равносторонний.

**Доказательство**

Для удобства записи доказательства примем обозначения:

EM = 1, угол NME = 3β, CM = к , BM = z, NB = y, NA = x.

Из ∆ENM: EN = 1\* tg3β, NM = .



Из ECM по теореме синусов:



= → k = ;



Из ∆ NBM по теореме синусов получим: = = .



z = ;



Из ∆ NAE по теореме синусов получим: = → x = .



Из ∆ NBM получим: = → y = .



Откуда = = = = = = = .



Ho: cos (30˚-β) = \*cosβ + \*sinβ = ( cosβ + sinβ);



Следовательно: = cos (30;



Но в таком случае угол NAB=90˚.

Далее имеем: = ;



Но: sin(30˚+β) = (cosβ+ sinβ);



sin(30˚- β) = (cosβ - sinβ).



Тогда = = = = .



Но в таком случае угол BCM = 90˚

Далее из ∆NAB и ∆MCB получим: AB=y \*sin (30˚ – β) =

\*sin (30˚ - β);



BC = z \* sinβ = \* sinβ



Следовательно: АВ = ВС.

Но: угол АВС = 360˚- 150˚- (90˚- β) –(60˚+β) = 360˚- 150˚- 150˚-β+β = 60˚

Следовательно, ∆АВС равносторонний, что и требовалось доказать.

# Заключение

Хорошо известно, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. А что произойдет, если биссектрисы заменить трисектрисами? Франк Морлей доказал, что если соединить отрезками точки пересечения смежных трисектрис произвольного треугольника, то получится равносторонний треугольник. Его доказательство этой теоремы достаточно сложно. Мы были очарованы красотой этой теоремы и решили найти свой более простой способ ее доказательства, используя только полученные в школе математические знания. И нам это блестяще удалось (правда, не для любого, а только для прямоугольного треугольника). Мы нашли собственное остроумное и оригинальное доказательство этой теоремы для прямоугольного треугольника.

Представленная проектная работа имеет ярко выраженную научную направленность и имеет большой развивающий потенциал, так как способствует формированию внимательного отношения к построению, приучает анализировать информацию. Такая исследовательская деятельность помогла отойти от математических штампов обеспечить развитие навыков самообразования через исследовательскую работу

Многие математические теории нередко кажутся искусственными и оторванными от реальной жизни. Если же подойти к этим проблемам с позиции научного развития, то станет виден их глубокий смысл.

# Литература

1. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом «Избранные задачи и теоремы планиметрии», Наука, 1967.

2. Л. А. Емельянова и Т. Л. Емельяновой “Теорема Морлея. Сто лет спустя”, “Математика в школе” №9, 2004.

3. Ю. Н. Мальцев, Реши+Если=Силен (избранные лекции по математике), г. Барнаул,

издательство Алтайского Государственного Университета, 2002.

4. С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, Москва, 1962.

5. Г. С. Коксетер, С. П. Грейтцер «Новые встречи с геометрией»- М., Наука, 1978.

6. Г. Тоноян, И. Я. Яглом «Теорема Морлея», Квант, №8,1978.

7. З. А. Скопец «Геометрические миниатюры», Москва, Просвещение, 1990.

8. Л. Штейнгарц, Квант, №9, 2009.

9. Сайт http://www.cut-the-knot.org.