**ВЕДЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ**

(из опыта работы)

Автор: Смирнова Надежда Вячеславовна,

учитель математики

I квалификационной категории

гимназии №8 им.Л.М. Марасиновой

Рыбинск, 2010 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

# 

[СОДЕРЖАНИЕ 2](#_Toc280003544)

[Введение 3](#_Toc280003545)

[1. Программно-содержательное конструирование стохастической линии в средней школе 4](#_Toc280003546)

[2. Основные понятия теории вероятностей 7](#_Toc280003547)

[3. Методические замечания: из опыта работы 10](#_Toc280003548)

[4. Вероятностный граф – наглядное средство теории вероятностей 13](#_Toc280003549)

[5. Модуль «Энтропия и информация» - метапредметность школьного курса Теория вероятностей 19](#_Toc280003550)

[6. Организация проектной и исследовательской деятельности обучающихся при освоении курса теория вероятностей 23](#_Toc280003551)

[Заключение 24](#_Toc280003552)

[Литература 25](#_Toc280003553)

[Приложение1. Тематический сайт «Теоря вероятностей». Аннотация и мультимедийное пособие 26](#_Toc280003554)

[Приложение 2. Анализ учебно-методических комплексов для эффективности введения стохастической линии в школьное образование 30](#_Toc280003555)

[Приложение 3. Контролирующий тест. Система электронного контроля 34](#_Toc280003556)

[Приложение 4. Контрольная работа № 1 35](#_Toc280003557)

[Приложение 5. Технологическая карта темы «Элементы теории вероятностей» 37](#_Toc280003558)

[Приложение 7. Презентация к уроку «Предмет теории вероятностей. Основные понятия» 55](#_Toc280003559)

[Приложение 8. Технологическая карта конструирования урока «Условная вероятность. Полная вероятность» 62](#_Toc280003560)

[Приложение 9. Технологическая карта конструирования урока «Случайные события и азартные игры» 65](#_Toc280003561)

[Приложение 10. Методическое пособие «Энтропия и информация. Решение логических задач». 36с. 68](#_Toc280003562)

[Приложение 11. «Энтропия и информация» мультимедиа – комплекс. CD – диск, методическое пособие. 12с. 69](#_Toc280003563)

[Приложение 12. Буклет тематического модуля «Энтропия и информация» 70](#_Toc280003564)

[Приложение 13. Технологическая карта конструирования занятия «Решение логических задач с помощью подсчета энтропии и количества информации» 71](#_Toc280003565)

[Приложение 14. Тематический реферат «История становления теории вероятностей» 75](#_Toc280003566)

[Приложение 16. Презентация запуска проекта «Теория вероятностей и жизнь» 80](#_Toc280003567)

[Приложение 17. Буклет «От теории вероятностей – к теории азартных игр» в рамках проекта «Теория вероятностей и жизнь» 82](#_Toc280003568)

[Приложение 18. Презентация «Дети в мире пороков взрослых» в рамках проекта «Теория вероятностей и жизнь» 83](#_Toc280003569)

[Приложение 19. Аннотация исследовательской работы «Вероятностные игры» учеников 8 класса 85](#_Toc280003570)

[Приложение 20. Презентация к исследовательской работе «Вероятностные игры» 88](#_Toc280003571)

# Введение

Современное общество предъявляет к своим членам довольно высокие требования, относящиеся к умению анализировать случайные факторы, оценивать шансы, выдвигать гипотезы, прогнозировать развитие ситуации, принимать решение в ситуациях, имеющих вероятностный характер, в ситуациях неопределенности, проявлять комбинаторное мышление, необходимое в нашем перенасыщенном информацией мире.

Наиболее эффективно эти умения и навыки позволяет формировать курс «Теория вероятностей и математическая статистика», о необходимости изучения которого в российской школе люди науки спорят на протяжении последнего столетия. В разные периоды становления Российского образования подходы к стохастической линии менялись от полного ее исключения из математического образования в средней школе до частичного и полного изучения основных понятий. Одним из основных аспектов модернизации российского школьного математического образования XXI века является включение теоретико-вероятностных знаний во всеобщее обучение. Стохастическая линия (соединение элементов теории вероятностей и математической статистики) призвана сформировать понимание детерминированности и случайности, помочь осознать, что многие законы природы и общества имеют вероятностный характер, реальные явления и процессы описываются вероятностными моделями.

Являясь студенткой Ярославского государственного педагогического университета им.К.Д. Ушинского, под руководством профессора В.В. Афанасьева я достаточно активно занималась именно данным курсом, методикой решения задач и изучения теоретических знаний, поиском прикладных возможностей. Введение теории вероятностей в стандарты второго поколения усилили актуальность сформированного объема знаний, понимания важности вероятностной культуры человека, необходимости поиска методических и дидактических «изюминок».

Практическая значимость и новизна представляемого опыта работы заключаются в его авторском эксклюзиве систематического использования графов при решении задач, в методической и дидактической метапредметности формирования информационной культуры. Программные требования стандартов нашли продолжение в проектной и исследовательской деятельности учителя и учащихся. Открытость опыта подтверждается работающим тематическим сайтом[[1]](#footnote-1), то есть возможностью многократной трансляции и интерпретации.

На страницах данной работы представлен опыт программно-содержательного конструирования стохастической линии математики вообще и теории вероятностей в частности, предложены методические советы по использованию методических и дидактических приемов изучения теории и применения на практике. Особенностью авторского опыта осовения курса теории вероятностей является изложение предмета с систематическим использованием графов, что делает более наглядным и доступным рассматриваемый материал. Предложены варианты использования современных интерактивных средств обучения и контроля знаний: интерактивная доска, системы электронного контроля знаний. В приложениях представлены конкретные результаты совместной работы учителя и учеников гимназии № 8 им.Л.М. Марасиновой.

# Программно-содержательное конструирование стохастической линии в средней школе

Обязательный минимум содержания образования предопределяет стандарт, некоторую рамку теоретических и практических знаний и умений. С этой точки зрения содержание раздела Вероятность и статистика предполагает изучение следующих вопросов: Представление данных, их числовые характеристики. Таблицы и  диаграммы. Случайный выбор, выборочные исследования. Интерпретация статистических данных и их характеристик. Случайные события и вероятность. Вычисление вероятностей. Перебор вариантов и  элементы комбинаторики. Испытания Бернулли. Случайные величины и их характеристики. Частота и вероятность. Закон больших чисел. Оценка вероятностей наступления событий в простейших практических ситуациях.

Актуальной становится проблема выбора соответствующего учебно-методического комплекса, наиболее полно сопровождающего образовательный процесс, и отбор тех дидактических приемов, которые позволят оптимально реализовать требуемые задачи стохастического образования. Подробный содержательный анализ действующих на момент 2007 года УМК, представлен на страницах авторского тематического сайта[[2]](#footnote-2) (Приложение 2).

Анализ утвержденных учебно-методических комплексов показывает, что обязательное освоение стохастической линии математики в основной школе и на 3 ступени обучения, только учебник Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина предполагает в следующем варианте:

* 5 класс – в теме «Натуральные числа» - «Анализ данных»
* 6 класс- Комбинаторика (6 часов) и Вероятность случайных событий (9 часов)
* 7 класс - Частота и вероятность (6 часов);
* 8 класс – Вероятность и статистика (5 часов)
* 9 класс – Статистические исследования (9 часов)

Углубленное изучение предмета (по учебнику Н.Я. Виленкина для классов с углубленным изучением предмета) предполагает следующие программные требования к содержанию:

* 8-9 класс: Множества и элементы комбинаторики.
* 10-11класс – Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Профильный уровень математики предполагает изучение данных разделов по учебнику А.Г. Мордковича в 10 классе.

Чтобы компенсировать содержательный недостаток учебных пособий, авторы некоторых из них разработали дополнительные параграфы к курсу алгебры 7-9 классов, предлагая и поурочное планирование: А.Г. Мордкович и П.В. Семенов; М.В. Ткачева и Н.Е. Федорова [6, 8] «Элементы статистики и вероятность»

К другим учебно-методическим комплексам таких пособий пока не разработано. Выход для учителя – практика из создавшейся ситуации заключается в авторской разработке рабочей программы, элективного курса с учетом всех возникших противоречий по введению стохастической линии в курс средней школы и предлагаемых путей их разрешения.

Учитывая, что ни одна наука не должна осваиваться учениками обособленно, в отрыве друг от друга, мною была предпринята попытка найти содержательное взаимопроникновение геометрии, алгебры, арифметики, информатики и стохастики.

**Фундирование раздела математики основной школы**

**«Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей» (45 часов)**

5 класс

Множества и комбинаторика

Арифметика:

действия с натуральными числами

6 класс

Вероятность случайных событий

Арифметика:

действия с дробями;

среднее арифметическое

Статистические данные, случайные величины

Информатика:

Работа с диаграммами (Exсel)

**7 класс**

Доказательство

Геометрия: доказательство теорем

7 класс

8 класс

Геометрическая вероятность

Геометрия:

площади фигур;

**Фундирование раздела математики средней школы**

**«Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей»**

**20 часов – база, 25 часов – проф. гуманитарный, 20 часов – проф. математический**

Решение практических задач с применением вероятностных методов, метода графов

Несовместные события,

их вероятность

Элементарные и сложные события

Формулы комбинаторики

Решение комбинаторных задач

Табличное и графическое представление данных

**10 класс**

Таким образом, творчески выстраивая рабочую программу, учитель имеет возможность использовать образовательную базу других разделов или науки, создавая условия для метапредметности каждого вопроса. Но творчество учителя на этом не завершается. Гораздо большие возможности для проявления авторства и, соответственно, творчества учителя математики появляется с выбором дидактических приемов введения и дальнейшего применения основных понятий курса стохастики. Конструктивно **авторское видение спирали** фундирования понятий теории вероятностей в средней школе в совокупности с дополнительным образованием выглядит следующим образом

Дополнительное образование

Случайная величина, ее характеристики: мода, медиана, математическое ожидание

Случайная величина и азартные игры

Двумерная случайная величинавеличина

Практические умения по применению полученных знаний

Метод графов при решении задач

Энтропия и информация

Условная энтропия

Информация, ее измерение

Решение логических задач

Метод графов при решении задач

Практические умения полученных знаний

Условные вероятности

Понятие события, его классификация с вероятностной точки зрения

Вероятность случайного события, классическая вероятность

Повторные испытания

Представление о геометрической вероятности

Практические умения применять полученные знания

Метод графов при решении задач

1. Основные понятия теории вероятностей

Данный раздел работы - необходимый содержательный минимум, которым должен владеть педагог, приступающий к освоению и преподаванию курса теория вероятностей.

Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т. е. описание явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ни­ми. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта (наблюдения, эксперимента) по его заданным начальным условиям. Однако есть множество задач, для решения которых приходится учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент неопределенности.

**Теория вероятностей** - математическая наука, изучающая зако­номерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом из­учаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматрива­ет не сами реальные явления, а их упрощенные схемы - математиче­ские модели. Предметом теории вероятностей являются математи­ческие модели случайных явлений (событий). При этом под **случайным явлением** понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при не­однократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). Примеры случайных явлений: вы­падение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, дли­тельность работы телевизора и т. п. Цель теории вероятностей - осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, огра­ничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практи­чески ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы [7, с.9].

**Случайным событием** (или просто: событием) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латин­ского алфавита: А, В, С, ... .

Если появление одного события в единичном испытании исключает появление другого, такие события называются **несовместными**. Если при рассмотрении группы событий может произойти только одно из них, то его называют **единственно возможным**. Наибольшее внимание математиков в течение нескольких столетий привлекают **равновозможные события** (выпадение одной из граней кубика) [4, с.31].

Примеры: а) при подбрасывании игральной кости пространство элемен­тарных событий П состоит из шести точек: П={1,2,3,4,5,6}; б) подбрасываем монету два раза подряд, тогда П={ГГ, ГР, РГ, РР}, где Г - «герб», Р - «решетка» и общее число исходов (мощность П) |П| = 4; в) подбрасываем монету до первого появления «герба», тогда П={Г, РГ, РРГ, РРРГ,...}. В этом случае П называется дискретным пространством элементарных со­бытий.

Обычно интересуются не тем, какой конкретно исход имеет место в ре­зультате испытания, а тем, принадлежит ли исход тому или иному подмно­жеству всех исходов. Все те подмножества А, для которых по условиям экс­перимента возможен ответ одного из двух типов: «исход принадлежит А» или «исход не принадлежит А», будем называть событиями [2, с.27]. В примере б) множество А={ГГ, ГР, РГ} является событием, состоящим в том, что выпадает по крайней мере один «герб». Событие А со­стоит из трех элементарных исходов пространства П, поэтому |А| = 3.

**Суммой двух событий** А и В называется событие С=А+В, состоящее в вы­полнении события А или события В. **Произведением событий А и В** называется событие D=A·B, состоящее в совместном исполнении события А и события В. Противоположным по отношению к событию А называется событие , со­стоящее в непоявлении А и, значит, дополняющее его до П. Если каждое появление события А сопровождается появлением В, то пи­шут A В и говорят, что А предшествует В или А влечет за собой В.



Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим, или, классической вероятностью: **классической вероятностью** события А называется отношение числа благоприятных исходов (обязательно наступивших) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов [3, с.12]: Р(А) = m/n, где m – число исходов, благоприятных для события А; n- общее число несовместных единственно возможных и равновозможных исходов. С точки зрения значения случайности все события можно классифицировать следующим образом:

**СОБЫТИЯ**

**СЛУЧАЙНЫЕ**

**ДОСТОВЕРНЫЕ**

**0<Р(А)< 1**

**Р (А) = 1**

**НЕВОЗМОЖНЫЕ**

**Р (А) = 0**

Несколько событий называются **совместными**, если появление одного из них в единичном испытании не исключает появления других событий в этом же испытании. В противном случае события называются **несовместными**.

Два события называются **зависимыми**, если вероят­ность одного события зависит от появления или непояв­ления другого. Два события называются **независимыми**, если веро­ятность одного события не зависит от появления или не­появления другого. Несколько событий называются независимыми в со­вокупности, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые. Несколько событий называются **попарно независимы­ми**, если любые два из этих событий независимы.

Требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости. Это значит, что несколько событий могут являться попарно независимы­ми, но при этом они не будут независимыми в совокуп­ности. Если же несколько событий независимы в совокуп­ности, то из этого следует их попарная независимость. В связи с тем, что в дальнейшем часто нужно будет рассматривать вероятности одних событий в зависимости от появления или непоявления других, то необходимо ввести еще одно понятие.

**Условной вероятностью РА(В)** называется вероят­ность события В, вычисленная при условии, что событие А уже произошло.

Одним из важнейших понятий теории вероятностей (наряду со случайным событием и вероятностью) является понятие **случайной величины**.

Под случайной величиной понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Примерами случайной величины могут служить: 1) X — число очков, появляющих­ся при бросании игральной кости; 2) Y — число выстрелов до первого попадания в цель; 3) Z — время безотказной работы прибора и т.п. Случайная величина, принимающая конечное или счетное множе­ство значений, называется **дискретной**. Если же множество возможных значений случайной величины несчетно, то такая величина называется **непрерывной**.

То есть дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и т.д.). Случайные величины X и Y (примеры 1) и 2)) являются дискретными. Случайная величина Z (пример 3)) является непрерывной: ее возможные значения принадлежат промежутку [0, t), где t > 0, правая граница не определена. Отметим, что рассматриваются также случайные величины смешанного типа.

Дадим теперь строгое определение случайной величины, исходя из теоретико-мно­жественной трактовки основных понятий теории вероятностей. **Случайной величиной X** называется числовая функция, опреде­ленная на пространстве элементарных событий П, которая каждому элементарному событию w ставит в соответствие число Х(w), т.е. X = X(w) [2, с.63]. Пример. Опыт состоит в бросании монеты 2 раза. Можно рассмотреть случайное событие – появление герба и случайную величину X — число появлений герба.

Основными характеристиками случайной величины являются характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана) и характеристики рассеивания (дисперсия, среднеквадратичное отклонение) [6, с.65].

**Математическое ожидание** вычисляется по формуле М[X]=Σxipi и характеризует среднее значение случайной величины.

**Мода (М0)** – это такое значение случайной величины, для которого соответствующее значение вероятности максимально.

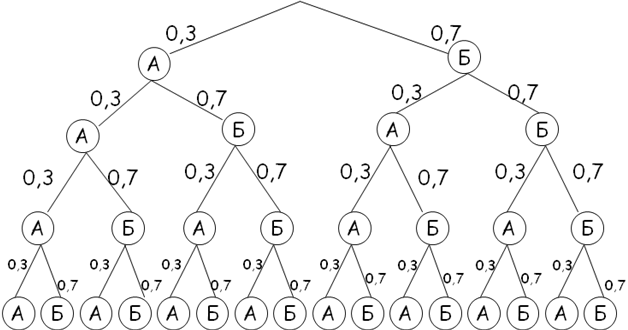
**Медианой дискретной случайной** величины (Ме) называется такое значение хk в ряду возможных значений случайной величины, которые она принимает с определенными значениями вероятностей, что приблизительно равновероятно закончится ли процесс до хk или продолжится после него.

**Дисперсией** (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: D[Х]=М(Х-М[Х])2 = М[Х2]-М2[Х].

**Среднеквадратическим отклонением** случайной величины Х называют положительное значение квадратного корня из дисперсии: σ[Х]=.



Задачи, связанные с понятиями случайного события и случайной величины, эффективно рассматривать через графическую иллюстрацию с применением вероятностного графа, на ребрах которого надписаны соответствующие значения вероятностей [2].

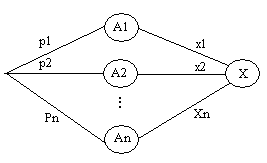


Пусть вероятность выигрыша одной игры для первого игрока равна 0,3, а вероятность выигрыша для второго игрока соответ-ственно равна 0,7. Как в таком случае разделить ставку?

Ответ: пропорционально вероятности выигрыша.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | х1 | х2 | …… | хn | …. |
| Р | р1 | р2 | …… | рn | .. |

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее нахо­дить вероятности произвольных событий, в частности, указывающее вероятности отдель­ных значений случайной величины или множества этих значений, на­зывается **законом распределения случайной величины** (или просто: рас­пределением). Про случайную величину говорят, что «она подчиняется данному закону распределения» – соотношению, устанавливающему связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде таблицы, где в верхней строке записаны значения случайной величины, а в нижней – под каждым хi – соответствующие вероятности рi



Закон распределения может иметь геометрическую иллюстрацию в виде графа распределения [6].

# Методические замечания: из опыта работы

Еще раз обозначим обязательный минимум содержания соответствующего раздела, записанный в новых стандартах школьного математического образования:

**Основная школа**: Понятия и примеры случайных событий. Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.

**Старшая школа**: Элементарные и сложные события. Вероятность и статистическая частота наступления события. Решение практических задач с применением вероятностных методов. Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества.

**Знакомство с вероятностно-статистическим материалом** целесообразно начинать с трех важнейших понятий, предваряющих определение вероятности: случайный опыт, случайное событие, элементарный исход. Со случайными событиями знакомство можно начинать уже в 5 классе, так как в этом возрасте закладываются основы вероятностной интуиции, позволяющие впоследствии усвоить формальные методы вычисления вероятностей. В этот период ученики должны научиться выделять невозможные и достоверные события.

В 6-7 классах появляется понятие случайного эксперимента, в контексте которого рассматривается любое случайное событие, формируется представление о его возможных исходах. Особое внимание следует уделить обсуждению «элементарности» исходов, поскольку непонимание этого признака повлечет дальше неизбежные ошибки при вычислении вероятностей. Принципиальным моментом этого раздела является переход от словесного описания событий и экспериментов к теоретико-множественному. На этом этапе ученики должны уметь:

* перечислять все возможные (в случае их большого количества – некоторые) исходы опыта, используя для этого их естественные обозначения;
* строить по словесному описанию события соответсвующее множество благоприятных исходов, используя при этом графы и «деревья» исходов;
* при рассмотрении примеров случайных опытов полезно рассматривать различные способы кодирования элементарных исходов, обсуждать, какие из них наиболее удобны и экономичны

классический и геометрический подход к определению вероятности должны рассматриваться как частные случаи вероятностных моделей, в которых это число удается вычислить (предсказать) без проведения опыта. Вероятность появляется как универсальная количественная мера возможности осуществления случайных событий, а все частные формулы для ее подсчета служат лишь для вычисления этой меры в определенном круге ситуаций.

При изучении этого раздела полезными оказываются уроки с применением мультимедийных средств, электронные лаборатории, позволяющие в считанные секунды смоделировать тысячи случайных экспериментов, наблюдая при этом за динамикой изменения частот и их приближением к вероятностям случайных исходов и событий.

Открыв формулу Лапласа Р(А) = m/n, ученики включаются в процесс не только экспериментального поиска ответа на вопрос о вероятности какого-либо события, но и приступают к вычислению. Важно сформировать у учеников понимание условия применимости формулы Лапласа: опыт должен иметь конечное число равновозможных исходов.

В результате нескольких лет работы по освоению практики решения задач по теории вероятностей составлены алгоритмы классического (комбинаторного ) способа и способа с помощью вероятностных графов:

|  |  |
| --- | --- |
| Классический способ | Способ решения с помощью вероятностного графа |
| Описание возможных исходов опыта, их кодирование и перечисление (полное или частичное) | Формулировка события и его благоприятного исхода |
| Обоснование равновозможности перечисленных исходов | Изображение графа – модели конкретной задачи. |
| Подсчет общего числа исходов опыта n: прямой подсчет, с помощью комбинаторных формул | Выбор благоприятных исходов |
| Описание благоприятных исходов для события А, их перечисление | Заполнение значений вероятностей над каждым ребром графа |
| Подсчет благоприятных исходов | Вычисление общей вероятности |
| Вычисление вероятности по формуле Лапласа |  |

Решение задач обоими способами представлено в следующей главе работы.

Получив ответ, необходимо обсудить с учениками его реальный смысл, привести частотную интерпретацию. Полезно выяснить, совпадает ли полученная величина с интуитивным представлением учеников о вероятности, удовлетворяет ли основным свойствам.

Для тематического и периодического контроля (особенно, когда широко применяется тестирование) в последние годы все шире применяется система интерактивного голосования и опроса Hitachi Verdict и система Votum. Преимущества электронного тестирования перед традиционными формами очевидны: не нужно тратить время на проверку контрольных – результаты обрабатываются автоматически, накапливается первичная статистика, что освобождает преподавателя от рутинной работы. Результаты контрольной можно увидеть сразу после окончания опроса, а детализированные отчеты позволяют выявить не только уровень знаний каждого ученика, но и моментально оценить, какие темы вызывают наибольшую сложность. Особенно это актуально при столь незначительном учебном времени, которое отводится на изучение Теории вероятностей. Для контроля разработаны тематические тесты оперативного контроля (Приложение 3) и итогового контроля, различные кроссворды (Приложение 1), и собственно контрольные (Приложение 4) и зачетные работы

Среди приложений к работе можно найти разработки урока, элективного занятия, технологические карты темы и отдельных уроков (Приложение 5-9)

# Вероятностный граф – наглядное средство теории вероятностей

Отличительной особенностью авторского подхода к ведению курса теории вероятностей является изложение предмета с систематическим использованием графов, что делает изучаемый материал более наглядным и доступным.

**Графом** называется два множества с отношением инцидентности между их элементами, называемыми вершинами и ребрами. Любое ребро связано не более чем с двумя вершинами. [2, с.26]

**Деревом** называется связный граф без циклов. Очень важное понятие для подхода изложения теории вероятностей. При помощи дерева удобно изображать исходы того или иного испытания. [2, с.27]

**Граф называется вероятностным**, если рядом с каждым его ребром записать соответствующую вероятность. [2, с.29]

Вероятность события вычисляется путем сложения вероятностей благоприятного исхода, которую в свою очередь определяем произведением вероятностей каждого ребра, соответствующего этому благоприятному событию.

Если вернуться к анализу имеющихся учебных пособий, то в учебнике Дорофеева, учебных пособиях, Мордковича вводится понятие «дерево исходов», «дерево возможных вариантов». В учебном пособии Ткачевой и Федоровой вводится понятие графа для подсчета вариантов. Но при изучении тем «Случайные события» и «Случайные величины» возможности эффективного инструмента - вероятностного графа - для решения соответствующего круга задач даже не предполагается, что опять ложится в основу профессиональной инициативы учителя.

**Задача 1**. Пусть два брата считают до числа, которое оказалось суммой «выброшенных» пальцев одной руки каждого. Тот, на котором остановился счет, выходит, а оставшийся убирает квартиру. Играет ли роль, с кого начинать счет?

Рассмотрим решение задачи двумя способами.

1 способ – комбинаторный.

Очевидно, что выбор таким образом дежурного является случайным. Обратим внимание на то, что первый, с кого начинается счет, не убирает квартиру, если сумма «выброшенных» пальцев окажется нечетной, а второй – если четной.

**I игрок:**

3 = 1+2 = 2+1

5 = 1+4 = 4+1 = 2+3 = 3+2

7 = 2+5 = 5+2 = 3+4 = 4+3

9 = 4+5 = 5+4

**II игрок:** 2= 1+1

4 = 1+3 = 3+1 = 2+2

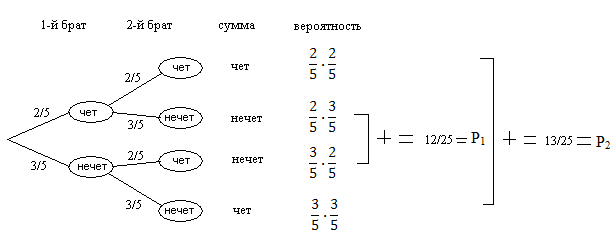
6 = 1+5 = 5+1 = 2+4 = 4+2 =3+3

8 = 3+5 = 5+3 = 4 +4

10 =5+5

Для первого игрока получили 12 благоприятных ему исходов, а для второго 13, следовательно, при игре в «считалки» предпочтительней стоять вторым.

2 способ. Составим вероятностное дерево исходов:



Р2 > Р1 и, следовательно, при игре в «считалки» выгодней стоять вторым. В последнем решении использованы интерпретации на графах теорем сложения и умножения вероятностей:

P (A+B) = P (A) + P (B) и в частности

P (A+B) =P (A) + P (B), если A и B – несовместные события

P (AB) = P (A)P (B), если A и B – независимые события.



Рассмотрим двумя способами решение одной из классических задач теории вероятностей – задачи Гюйгенса.

**Задача Гюйгенса**: В урне 2 белых и 4 черных шара. Один азартный человек держит пари с другим, что среди вынутых 3 шаров будет ровно 1 белый. В каком отношении находятся шансы спорящих.

**Решение:**

1 способ. Традиционное решение - комбинаторное:

Испытание Ω = {вынимание шаров}, событие А, благоприятствующее одному из спорящих: А ={достать ровно один белый шар}.

Учитывая, что порядок вынимаемых трех шаров не важен, то

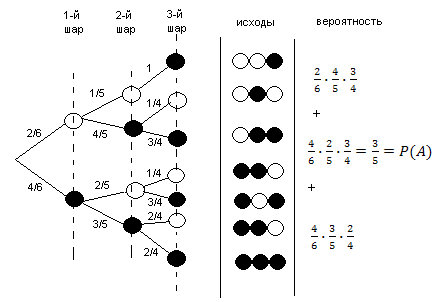


Один белый шар можно достать в случаев, а 2 черных - . По основному правилу комбинаторики . Отсюда , а по свойству вероятности P()=1-P(A)=. Cледовательно, P(A): P()=3:2



Ответ: шансы спорящих находятся как 3:2, т.е. скорее так и будет: среди 3 вынутых шаров будет ровно 1 белый.

2 способ. Использование вероятностного графа.

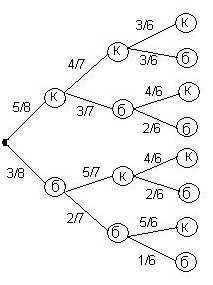


Возможность решения задач по теории вероятностей с помощью графов появляется уже в 6 классе, в процессе изучения темы «Обыкновенные дроби. Арифметические действия с обыкновенными дробями». Значит, к этому моменту можно ввести понятие случайных, достоверных и недостоверных событий, показать простейшие задачи, решаемые с помощью вероятностного графа.

1. Какова вероятность выпадения тройки при однократном бросании кубика?
2. Какова вероятность выбора красного шара из урны с 3 белыми шарами и 5 красными?

Практика показывает, что трудностей на данном этапе у учащихся не возникает. Иллюстрация с помощью графа делает данный процесс творческим и наглядным. При этом формируется практический навык анализа происходящего, сравнение и выбор. Причем, графический метод не требует знания формул комбинаторики и способствует развитию аналитических навыков:

1. Какова вероятность выбора одного красного шара среди трех выбранных шаров из урны в предыдущей задаче?



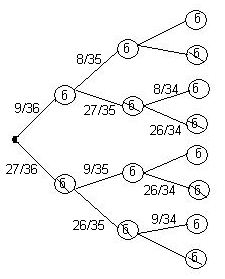
Решение:

Испытание состоит из 3 серий вынимания 1 шара. При этом вынуть можно или красный шар или белый. Количество шаров вообще и определенного цвета с каждой предыдущей серией уменьшается. Вероятности каждого события надписаны у ребер графа, их вычисления не вызывают затруднений. Общее значение вероятности события А получаем путем последовательного суммирования произведений значений вероятностей благоприятных исходов (обозначены черным маркером)

А={1 красный цвет} Р(А)=

*На данной задаче можно построить еще ряд вопросов, ответы на которые легко найти, используя данный граф: B={2 красных}, С={3 одинаковых цвета}и т.д.*

Ответ: P(A)=



1. В наборе содержатся кегли 4 цветов: белые, красные, зеленые и желтые. Какова вероятность того, что среди 3 выбранных кеглей из набора в 36 кеглей будет только одна белого цвета?

Решение: A={только одна кегля белого цвета}

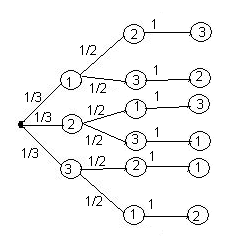
Аналогично предыдущей задаче при построении графа учитываем то, что при вынимании 1 кегли определенного цвета их количество уменьшается. В данном испытании благоприятным исходом считается кегля белого цвета (их в наборе 9), неблагоприятным все остальные, независимо от цвета.

P(A)=

Ответ: P(A)

*Мои ученики предложили рациональный подход: строим граф, определяем благоприятные исходы и вероятности надписываем над ребрами графа только при благоприятных исходах, что значительно экономит время, делает решение более осознанным (зачем делать лишнюю работу). Они правы, но тогда число дополнительных вопросов для быстрого ответа по готовому графу будет ограничено. Можно предложить дозаполнить граф дома, а потом при необходимости к нему вернуться.*

После решения 2 задач (любых) при формировании вероятностной культуры, целесообразно задавать вопросы: что более вероятно…, какой ответ соответствует большей вероятности и т.д. с точки зрения математики ученики сравнивают полученные ответы, с точки зрения теории вероятностей они формируют четкое понимание, что максимальная вероятность = 1, более вероятны события, вероятность наступления которых близка именно к этому значению. В двух предыдущих задачах обе вероятности меньше 50%. Вероятность события во второй задаче больше, чем в первой, но обе они свидетельствуют одинаково о маловероятности наступления данного события.



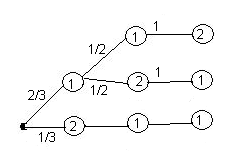
1. На трех карточках написаны цифры 1,2 или 3. Случайным образом из этого набора выбирают последовательно по одной карточке и кладут в ряд, образуя трехзначное число. Какова вероятность того, что образуется число: 1). 123, 2). 213, 3) 132, 4) 231, 5). 312, 6). 321. [6, с.47]

Решение: 1) A={число 123} P(A)=

Анализируя граф, несложно заметить, что любое другое число получается именно с такой же вероятностью.

Ответ: P(A)=

Данную задачу можно несколько усложнить с точки зрения теории вероятностей, если какую-нибудь карточку предложить дважды. Например, карточка «2». То есть из 4 карточек составить указанные числа.

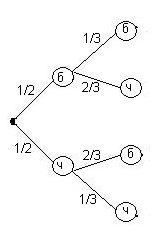


6. На каждой из двух карточек написана цифра 1, а на третьей – цифра 2. Эти три карточки перемешиваются и случайным образом выкладываются в ряд. Какие числа при этом могут получиться и найдите вероятность получения каждого из них. [6, .47]

Решение:

Очередность вынимания той или иной цифры и , соответственно, составление того или иного числа несложно отразить на графе, рассуждая логически: первой цифрой может оказаться и «1» и «2», но каждая со своей долей вероятности. Дальнейшие сценарии определяются аналогично и фиксируются графом. Определив вероятности, произведя необходимые вычисления, получаем ответ: различных чисел может быть только три и вероятность каждого соответственно равна:

P(112)=; P(121)=; P(211)= 



1. В ящике находятся 2 белых и 2 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какие комбинации могут получиться и найти вероятность каждой из них. [6, с.48]

Решение: P(бб) =; P(бч) =; P(чб) =; P(чч) =

Применение полученных знаний и первичных навыков может быть осуществлено при решении следующей задачи в различных (соответствующих) разделах математики.

8. Из карточек с числами 1,2,3,4,5 выбирают три. Найдите вероятность следующих событий:

1). Существует прямоугольный треугольник с такими сторонами;

2). Существует произвольный треугольник с такими сторонами;

3). Произведение этих чисел оканчивается на ноль;

4). Сумма этих чисел меньше 10.

Решение. Для всех данных (и вообще возможных) задач достаточно построить ОДИН граф, далее провести анализ выборки по условию конкретной задачи. Подсчет возможных комбинаций трех чисел из пяти можно провести и комбинаторным способом . Построение данного графа, в итоге которого будет 60 комбинаций – дело трудоемкое, но для решения нескольких задач на одном графе оправдывает подготовительные задачи.



1). Р(А) = 6/60; 2). Р(А) = 17/60; 3). Р(А) = 27/60; 4). Р(А) = 34/60

*Мои ученики предложили использовать для этого электронные таблицы Excel.*

Данную задачу можно несколько усложнить с точки зрения теории вероятностей, если какую-нибудь карточку предложить дважды.

Итак, достаточно оптимально происходит решение задач на подсчет вероятности случайных событий с помощью вероятностного графа, что также позволяет не только решать данные задачи, но и моделировать новые, изменяя условие или вопрос.

С помощью графов успешно решаются задачи и других разделов теории вероятностей. Напомним, что условной вероятностью события А при условии, что событие В произошло, называется отношение Р (А\*В) / Р (В)

9. Слово «МАТЕМАТИКА» разделено на отдельные буквы, из них произвольным образом отбираются и выкладываются по порядку четыре буквы. Какова вероятность получения слова «МАМА»?

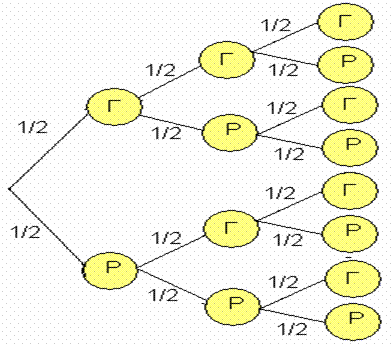
Решение. Пусть событие А={получить слово «МАМА»}. Возьмем в дереве испытаний ветвь, соответствующую событию А, и найдем ее вес:



При изучении темы «Случайные величины» вводятся основные характеристики случайной величины – математическое ожидание, мода, медиана, вычисление которых с помощью графов также более наглядно и структурировано.



**10. К**акую игру следует выбрать: с призом в 8 рублей за выпадение, по крайней мере, одного герба (А), или с призом в 16 рублей за выпадение ровно двух гербов (В) при трех подбрасываниях монет. [1, с.68]



Решение:

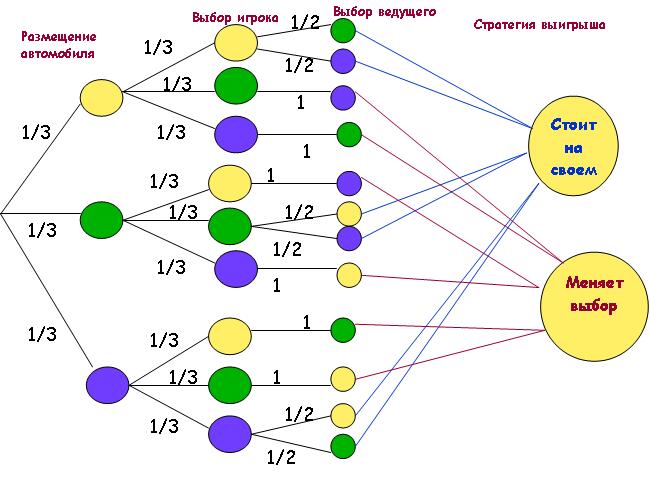
Р(А) = 7\*1/23=7/8 M[A] = 8\*7/8=7 P(B) = 3\*1/23=3/8 M[B] = 16\*3/8=6

Вывод: выгоднее выбрать игру с призом в 8 рублей

Большие возможности для анализа условия задачи и понимания сути решения дает применение графов при решении задач, связанных с выработкой стратегии игры. Несложные вычисления позволяют определить наиболее выигрышную тактику игрока.

**Задача Монти – Холла** [1, с.39]. (американская Теле игра «Заключим пари»)

За одной из трех дверей находится приз – автомобиль, за двумя другими – пустая комната. Играющему предлагается открыть одну из трех дверей.



Игра проходит в три этапа:

1. Игроку предлагают выбрать дверь
2. Ведущий открывает одну из двух оставшихся. (он знает где приз и никогда не откроет эту дверь)
3. Игроку предоставляется выбор – оставить свой выбор прежним или изменить его

**Р(А)= Р(Б) =**

Оптимальность образовательного процесса при решении подобных задач достигается благодаря применению интерактивной доски. Однажды созданный и разобранный вероятностный граф в компьютерной программе может быть многократно проанализирован в соответствии с вопросом задачи, и сделанная выборка нужных ситуаций позволяет сэкономить время на уроке, посвятив его разбору множества вопросов, а не вырисовыванию многоструктурного графа.

# 5. Модуль «Энтропия и информация» - метапредметность школьного курса Теория вероятностей

Как и многие изучаемые в школьном курсе математики темы предполагают возможность изучения дополнительных разделов через элективные курсы, факультативы, научно-исследовательскую деятельность, так и «Теория вероятностей и математическая статистика» может иметь продолжение и возможность интеграции с обязательными темами изучения в средней школе. Знакомство учащихся с нетрадиционными вопросами теории вероятностей позволяет увидеть возможности продолжения понятия вероятности и их применения для решения школьных логических задач, рассмотреть практическое применение некоторых вопросов программного материала. Одним из таких вопросов является решение логических задач с помощью понятия энтропии.

Изучая теорию вероятностей, статистику важно показать ученикам применимость получаемых знаний. Построенная таким образом система позволяет это сделать через метапредметные модули, реализуемые на уроках, в проектной деятельности.

**Энтропия - мера неопределенности – количество информации**

**Азартные**

**игры**

**Решение логических задач**

**Компьютер - объект**

**Компьютер - средство**

**Алгебра**

**Геометрия**

**Статистика**

**Теория вероятностей**

**Математика**

**ИНТЕРАТИВНЫЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ**

**ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ, ТЕМАТИЧЕСКИЕ САЙТЫ, ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕСТЫ, ЭЛЕКТРОННЫЕ ПОСОБИЯ**

**Информатика**

В основной школе учащиеся знакомятся с понятием графа (дерева возможных вариантов), в рамках элективных курсов могут рассматривать (рассматривают) логические задачи на выделение элемента множества (задачи на взвешивание, угадывание задуманного, о лжецах) и их решение с помощью графов и логических рассуждений. Но при этом остается открытым вопрос о минимально возможном числе взвешиваний или вопросов. Учащиеся не владеют математическими знаниями для решения подобных задач с целью получения однозначно неопровержимого ответа. Конечно, при построении графов развивается логическое мышление, внимание, формируется умение выдвигать гипотезы, но поиск возможных числовых ответов порой не может убедить, что это «наименьшее».

Введение в средней школе понятия логарифма, и его свойств, интеграция данной темы с вопросами теории вероятностей, рассмотренными в основной школе, позволяет не только дать однозначный ответ на вопрос задачи о наименьшем количестве взвешиваний (вопросов), но и продемонстрировать практическое приложение понятия логарифма.

Все это раскрывает тема «Энтропия и информация» (Приложение 10), которая не является общепринятым материалом курса «Теория вероятностей», но способствует установить аналогии новых результатов с ранее рассматриваемыми. Удачно занятия по данной теме проводить параллельно с изучением темы «Логарифмы», но возможно более позднее обращение к теме «Энтропия и информация» чем изучение логарифмов. В таком случае – «Энтропия и информация» - модуль (14 часов) целостного метапредметного элективного предмета «В мире информации», рассчитанного на 34 часа. Первый подход – практическое применение изучаемого, второй подход и практическое применение изученного и его повторение. Возможно, при достаточно высоком уровне подготовки обучающихся данный курс (14 часов) предложить уже в 9 классе, объяснив понятие

логарифма и предоставив информацию по его простейшим свойствам. В моей практике осуществлены все три подхода.

**Цели курса «Энтропия и информация»**

* Развитие логического мышления и формирование базы математических знаний;
* Практическое применение изучаемого (изученного) программного материала средней школы;
* Построение простейших вероятностных моделей реальных процессов и явлений, учитывающих влияние случая;
* Создание определенного алгоритма для оценки предсказуемости случая;
* Решение логических задач с применением понятия энтропии;

**Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:**

* Расширить представления учащихся о дискретной математике, ее возможностях при вполне жизненных ситуациях;
* Показать учащимся возможности математики для измерения и сравнении неопределенностей различных ситуаций;
* Ввести новые математические понятия энтропии и количества информации;
* Установить зависимость степени неопределенности от числа равновероятных исходов;
* Определить связь количества информации с мерой неопределенностей;
* Показать способы использования ориентированного графа и кодового дерева для построения рассуждений и выводов;
* Интегрировать алгебраический и графический методы для решения задач о лжецах, на взвешивание и др.;
* Предложить комплекс логических задач, решаемых методом подсчета информации.

**В результате освоения данного курса ученик должен научиться:**

* Различать количественные характеристики случайного события: вероятность и степень неопределенности (энтропию);
* Выполнять простейшие вычисления и преобразования, связанные с логарифмом по основанию 2;
* Уметь находить степень неопределенности через известную (найденную) вероятность случайного события;
* Сравнивать два события по их неопределенности;
* Находить количество информации об опыте для оптимизации его результатов;
* Применять полученные умения и навыки для решения логических задач алгебраическим и графическим методами.

Актуальность программы определяется необходимостью осознания учащимися связи теории вероятностей и алгебры с практикой жизни. Курс предполагает овладение широким понятийным аппаратом, знакомство с различными логическими структурами определений, развитие умений подводить объект под понятие, применять определения в процессе рассуждений. Теоретический и практический материал курса в силу своей компактности, информативности предоставляет возможности школьникам быстрее и с меньшими трудностями проследить процесс обобщения понятий. Во многом этому способствует авторский мультимедийный продукт. (Приложение 11)

Усвоению знаний должно способствовать развитие умения анализировать, выявлять закономерности, обобщать, логически излагать свои мысли, ставить и разрешать проблемы. Курс должен помочь школьникам овладеть способами исследовательской деятельности, стать фактором формирования творческого мышления. Как методическое пособие можно использовать тематический буклет педагога. (Приложение 12)

  Общие принципы отбора содержания материала:

* актуальность,
* наглядность,
* доступность,
* обеспечение мотивации,
* целостность,

Системность содержания достигается логикой развертывания учебного материала таким образом, что изучение всех последующих тем обеспечивается предыдущими, а между частными и общими знаниями прослеживаются связи.

Организация учебной работы предусматривает:

* проблемное изложение и изучение материала (выделение ключевых вопросов, проблемный, эвристический характер их рассмотрения),
* выполнение самостоятельной поисковой, творческой работы учащимися индивидуально, в группах, микрогруппах, коллективе;
* реализацию принципа совместного целеполагания: «цель учителя – цель ученика».

**Учебно-тематический план:** Каждое занятие по 2 часа.

1. Случайные события. Мера их неопределенности. Формула Хартли.

2. Энтропия по Шеннону. Свойства энтропии.

3. Условная энтропия. Решение задач на условную энтропию.

4. Количество информации. Решение задач.

5. Решение логических задач на взвешивание через энтропию и количество информации (Приложение 13)

6. Решение логических задач о лжецах через энтропию и количество информации.

7. Защита творческих проектов.

Итого: 14 часов (можно увеличить количество часов на решение логических задач)

# Организация проектной и исследовательской деятельности обучающихся при освоении курса теория вероятностей

Основным принципом учебно – исследовательской работы является учет образовательных потребностей ученика, выходящих за рамки того или иного предмета, овладение методами самостоятельного научного исследования. Под исследовательской деятельностью учащихся сегодня понимается такая форма организации учебно-воспитательной работы, которая связана с решением учащимися творческой, исследовательской задачи с заранее неизвестным для них, в первую очередь, результатом в различных областях науки, техники, искусства и предполагающая наличие основных этапов характерных для научного исследования:

* Постановку проблемы,
* Ознакомление с литературой по данной проблематике,
* Овладение методикой исследования,
* Сбор собственного материала, его анализ и обобщение,
* Выводы.

Исследовательская работа предполагает индивидуальный темп и способ продвижения, обеспечивая при этом достаточно высокий уровень знания. При подборе темы полезно обратить внимание на смежные области знания: иногда на стыке двух научных дисциплин, например экономики и математики, можно найти такие темы, которые как бы забыты и той и другой отраслями науки, но имеют определенные исследовательские перспективы и интересны для ребят.

Система действий учителя и учащихся при выборе и утверждении тем предполагаемых исследований может быть следующей:

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель отбирает возможные темы | Ученики самостоятельно подбирают темы |
| Учитель предлагает учащимся возможные темы | Учащиеся обсуждают и принимают решение |
| Учитель участвует в обсуждении тем, предложенных учащимися | Ученики предлагают для обсуждения самостоятельно подобранные темы |
| Учитель организует совместное утверждение тем | Ученики принимают решение. |

Раздел математики Теория вероятностей также предполагает включение обучающихся в научно-исследовательскую деятельность, реализацию проектов, подготовку тематических сообщений.

Информационную ценность имеет тематическое сообщение учеников «Из истории теории вероятностей» (Приложение 14), и сообщение учителя «Теория вероятностей», сопровождающаяся презентацией (Приложение 7).

Метапредметный характер имеет проект обучающихся «Информация и логические задачи» (Приложение 15), в рамках которого рассматривается методика решения задач на взвешивание, на угадывание (Приложение 10 - 11). Демонстрируется метод половинного деления, дающий наиболее оптимальный способ решения.

Среди всех проектов моих учеников самым ярким, результативным, практико-ориентированным является проект «Теория вероятностей и жизнь» (запуск проекта - Приложение 16), направленный не только на метапредметность изучаемой науки, но и на демонстрацию роли теории вероятностей для формирования устойчивого отношения к азартным играм, лежащим в основе появления науки, и являющиеся определенным пороком мира взрослых. Результатом данного проекта стали тематические буклеты (Приложение 17), презентации (Приложение 18, 19), исследовательские работы (Приложение 20)

Проект рассчитан на учащихся 9-11 классов, является краткосрочным, информационно-исследовательским, основан на изучении раздела математики Теория вероятностей. В ходе реализации проекта, который может быть запущен еще до изучения данной темы в рамках воспитательного мероприятия через презентацию учителя «Дети в окружении пороков взрослых», учащиеся не только познакомятся с основными понятиями и формулами теории вероятностей, но и увидят, как теория вероятностей помогает предостеречь от воздействия азартных игр на незадачливых игроманов. Именно теория вероятностей помогает определить размер начальной ставки в игре, чтобы она стала безобидной или благоприятной, поможет распределить сделанные ставки, если игра завершена досрочно, и, вообще, подскажет, стоит ли играть, если его величество Случаем в организованных заведениях для игроманов руководит его величество Человек (знающий основы теории вероятностей и рассчитавший свой успех). Кроме воспитательного значения, проект имеет образовательный потенциал, так как демонстрирует прикладное значение изучаемого раздела математики.

Заключение

У. Уивер пишет: «Теория вероятностей и статистика — две важные области, неразрывно связанные с нашей повсед­невной деятельностью. Мир промышленности, страхо­вые компании в большой степени являются должниками вероятностных законов. Сама физика имеет существенно вероятностную природу; такова же в основе своей и био­логия. Между тем, несмотря на эту важность, универ­сальный характер теории вероятностей и статистики все еще не стал общепринятым среди деятелей образования» [9, с. 376-377].

Изучая случайные события и явления, осуществляя поиск закономерностей не только в математике и других науках, актуальными становятся вопросы о степени случайности, о возможностях, которые могут снизить степень случайности события, переводя его в разряд реальности бытия. Именно, исходя из этого, представленный авторский опыт введения теории вероятности становится актуальным, предполагающим дальнейшее совершенство.

Литература

1. Афанасьев В.В., Суворова М.А. Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8-11 классов: учебное пособие. Ярославль: Академия развития, 2006. - 192 с.
2. Афанасьев В.В. Теория вероятностей: Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «математика». М.: Владос, 2007. – 350 с.
3. Афанасьев В.В. Теория вероятностей в вопросах и задачах: Учебное пособие. Я.: ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2004.- 250 с.
4. Афанасьев В.В., Мамонтов С.И. Случайные события: Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 1999. – 48с.
5. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учебное пособие для учащихся шк. И кл. с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1996. – 288 с.
6. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп. Параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. М.: Мнемозина, 2004. – 112 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис – пресс, 2004. – 256с.
8. Ткачева М.В. Элементы статистики и вероятность: Учебное пособие для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2005. – 112 с.
9. Шадриков В.Д. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб.пособие.М.:Гардарики, 2002. – 383 с.
10. http://www.azartgames.ru/public/gambler\_test.shtml

## Приложение1. Тематический сайт «Теория вероятностей». Аннотация и мультимедийное пособие

## Приложение 2. Анализ учебно-методических комплексов для эффективности введения стохастической линии в школьное образование

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| УМК | класс | Программные требования к содержанию изучаемого материала |
| **МАТЕМАТИКА** | | |
| Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд | | |
| 5-6 класс | отсутствуют | |
| **Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин** | | |
| 5 класс | В теме Натуральные числа (12 часов) начинается изучение новой содержательной линии «Анализ данных».  Здесь предлагается естественный и доступный детям этого возраста метод решения комбинаторных задач, заключающийся в непосредственном переборе возможных вариантов (комбинаций). Он носит общий характер, и применим в тех случаях, когда число вариантов невелико. В качестве специального приема перебора вариантов рассматривается построение дерева. | |
| 6 класс | **КОМБИНАТОРИКА (6 часов).** Решение комбинаторных задач. Применение правила умножения в комбинаторике.  **Основная цель:** развить умения решать комбинаторные задачи методом полного перебора вариантов, познакомить с приемом решения комбинаторных задач умножением.  Как и в V классе, продолжается решение задач путем систематического перебора возможных вариантов. Однако теперь учащиеся имеют дело с большим количеством элементов и в более сложных ситуациях. Здесь они знакомятся с кодированием как способом представления информации, упрощения записей.  Продвижением вперед является знакомство на содержательном уровне с комбинаторным правилом умножения. При этом целесообразно использовать следующий подход. Учащимся предлагаются задачи с большим количеством вариантов решений, когда построение дерева оказывается технически трудоемким. В то же время, если дерево симметричное, его легко представить по отдельному фрагменту, а значит легко с помощью умножения подсчитать число возможных вариантов. Термин «правило умножения» здесь не вводится, и какое-либо формальное правило действий не предполагается. Учащиеся остаются на уровне содержательного подхода, зрительной основой действий по-прежнему служит дерево, изображенное на бумаге или представленное мысленно. Дляставленное мысленно.ержательного подхода, зрительной основой действий по-прежнему служит дерево, изображенное на бумаге или пр предупреждения формирования неправильного стереотипа в систему задач включены задания, в которых ответ нельзя получить умножением.  **ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ (9 часов).** Эксперименты со случайными исходами. Частота и вероятность случайного события.  **Основная цель:** научить оценивать вероятность случайного события на основе определения частоты события в ходе эксперимента.  Особенностью принятой в учебнике методики является статистический подход к понятию вероятности: вероятность случайного события оценивается по его частоте при проведении достаточно большой серии экспериментов. Такой подход требует реального проведения опытов в ходе учебного процесса. Так как для стабилизации частоты необходимо большое число экспериментов, рекомендуется такая форма уроков, как работа в малых группах. Каждый ученик проводит свой эксперимент, затем объединяются результаты членов каждой группы, объединяются результаты всех групп. Для удобства фиксирования результатов экспериментов в рабочей тетради помещены специальные таблицы.  Помимо способа количественной оценки вероятности дается представление о возможности определения вероятности случайного события без проведения экспериментов (в случае геометрического подхода, когда речь идет о равновозможных событиях).  Основной итог темы носит, прежде всего, содержательный характер: это разрушение типичных интуитивных вероятностных предрассудков и формирование правильных представлений о вероятности в разнообразных житейских ситуациях. Кроме того, учащиеся должны решать несложные задачи на нахождение вероятности в случае, когда возможные исходы равновероятны. | |
| Нурк Э.Р., Тельгмаа А.Э. | | |
| 5-6 класс | отсутствуют | |
| Шеврин Л.Н., Гейн А.Г., Коряков И.О., Волков М.В. | | |
| 5-6 класс | отсутствуют | |
| Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. | | |
| 5-6 класс | отсутствуют | |
| Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.  (продолжение учебников Л.Г. Петерсон для начальной школы) | | |
| 5 класс | В теме **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК (30 часов)** рассматриваются вопросы метода перебора, но не формируется понятие вероятности. | |
| **АЛГЕБРА** | | |
| Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. | | |
| Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. | | |
| Муравин К.С., Муравин Г.К., Дорофеев Г.В. | | |
| Мордкович А.Г. | | |
| Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. | | |
| 7-9 | отсутствуют | |
| **Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А.** | | |
| 7 класс | **«ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ» (6 часов).** Завершающая тема 7 класса.  Частота случайного события. Оценка вероятности случайного события по частоте. Вероятностная шкала.  **Основная цель:** показать возможность оценивания вероятности случайного события по его частоте.  Особенностью принятой в учебнике методики является статистический подход к понятию вероятности: вероятность случайного события оценивается по его частоте при проведении достаточно большой серии экспериментов. Такой подход требует реального проведения опытов в ходе учебного процесса. Так как для стабилизации частоты необходимо большое число экспериментов, рекомендуется такая форма уроков, как работа в малых группах. Каждый ученик проводит свой эксперимент, затем объединяются результаты членов каждой группы, объединяются результаты всех групп[[3]](#footnote-3).  Процесс стабилизации частоты полезно иллюстрировать с помощью графиков, при этом разным группам учащихся можно поручить построение различных графиков.  Дается количественная оценка вероятности случайного события, которая получает наглядное истолкование с помощью вероятностной шкалы. | |
| 8 класс | **«ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАСТИКА» (5 часов).** Завершающая тема 8 класса.  Статистические характеристики ряда данных: мода, медиана, среднее арифметическое, размах. Таблица частот. Вероятность равновозможных событий. Классическая формула вычисления вероятности события и условия ее применения. Геометрические вероятности.  **Основная цель:** сформировать представление о возможностях описания и обработки данных с помощью различных средних, познакомить учащихся с вычислениями вероятности случайного события с помощью классической формулы вероятности из геометрических соображений.  При изучении темы учащиеся знакомятся с ситуациями, требующими вычисления средних для адекватного описания ряда величин. При вычислении среднего арифметического используется таблица частот.  Основное внимание следует уделить целесообразности использования моды, медианы или среднего арифметического в зависимости от ситуации и умению вычислять соответствующие характеристики.  В предыдущих классах уже был рассмотрен статистический подход к понятию вероятности. На его основе теперь вводится гипотеза о равновероятности, позволяющая в ситуации с равновозможными исходами применять классическую формулу вычисления вероятности события. Кроме того рассматривается геометрический подход к понятию вероятности, позволяющий в некоторых ситуациях с бесконечным количеством исходов вычислять вероятность наступления события как отношение площадей фигур.  Наконец, при изучении и классического, и геометрического подхода следует особое внимание уделить условиям, при которых применимы соответствующие формулы. | |
| 9 класс | **«СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ» (6 часов)** Завершающая тема 9 класса.  Генеральная совокупность и выборка. Ранжирование данных. Полигон частот. Интервальный ряд. Гистограмма. Выборочная дисперсия, среднее квадратичное отклонение.  **Основная цель:** в данной главе представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии курса алгебры основной школы. В ней рассматриваются доступные учащимся примеры комплексных статистических исследований, в которых используются полученные ранее знания о случайных экспериментах, способах представления данных и статистических характеристиках.  В ходе описания исследований вводятся некоторые новые статистические понятия, отражающие специфику данного исследования. Они позволяют понять как центральные тенденции ряда данных, так и меру вариации. Заметим, что включение данного материала направлено, прежде всего, на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые в СМИ. Предполагается не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первоначальное знакомство с понятийным аппаратом этой области знаний, необходимой каждому современному человеку. | |
| **АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА** | | |
| Колгоморов А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П./ Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В./ Башмаков М.И. | | |
| 10-11 | отсутствуют | |
| УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКИ | | |
| Содержание обучения: включает полностью содержание курса математики соответствующих классов общеобразовательной школы и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу и углубляющих его по основным идейным линиям. Включены также самостоятельные разделы: комплексные числа, элементы комбинаторики, элементы теории вероятностей и статистики, которые в настоящее время в школе не изучаются, однако являются важными содержательными компонентами системы непрерывного математического образования. В квадратных скобках указаны дополнительные вопросы и темы, которые изучаются по усмотрению учителя.  8-9 класс: Множества и элементы комбинаторики.  [Комбинаторный принцип умножения. Число элементов прямого произведения двух множеств. Число подмножеств конечного множества. Число k – элементных подмножеств конечного множества из n элементов (число сочетаний). Число перестановок. Понятие вероятности события. Подсчет вероятностей простейших событий.]  10-11 класс: Элементы комбинаторики и теории вероятностей.  Метод математической индукции. Комбинаторные принципы сложения и умножения. Основные формулы комбинаторики. Размещения, сочетания и перестановки (без повторения и с повторениями). [Бином Ньютона. Принцип Дирихле].  Элементы теории вероятностей и математической статистики. Случайные события. Классическое определение вероятности. Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики. Правило сложения вероятностей. Условные вероятности. Правила умножения вероятностей. Независимые события. Формула Бернулли. Случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия. Понятие о законе больших чисел. Понятие о нормальном законе распределения.  Генеральная совокупность и выборка. Параметры генеральной совокупности и их оценка по выборке. Оценка параметров. Понятие об уровнях значимости и достоверности. Оценка вероятности события по частоте. Понятие о проверке статистических гипотез. | | |
| Виленкин Н.Я., Ивашев – Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. | | |
| ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ (12 часов)  Метод математической индукции. Комбинаторные принципы сложения и умножения. Основные формулы комбинаторики. Размещения, сочетания и перестановки (без повторения и с повторениями). [Бином Ньютона. Принцип Дирихле]. | | |
| ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ (20 часов)  Случайные события. Классическое определение вероятности. Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики. Правило сложения вероятностей. Условные вероятности. Правила умножения вероятностей. Независимые события. Формула Бернулли. Случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия. Понятие о законе больших чисел. Понятие о нормальном законе распределения.  Генеральная совокупность и выборка. Параметры генеральной совокупности и их оценка по выборке. Оценка параметров. Понятие об уровнях значимости и достоверности. Оценка вероятности события по частоте. Понятие о проверке статистических гипотез. | | |

## Приложение 3. Контролирующий тест. Система электронного контроля

## Приложение 4. Контрольная работа № 1

**Задача №1.** В таблице приведены результаты последнего тиража лотереи, в которой нужно было угадать 6 номеров из 49. Выигрыш выдавался за 3 и более угаданных номера:

|  |  |
| --- | --- |
| **Кол-во угаданных номеров** | **Кол-во карточек** |
| 0 | 5400 |
| 1 | 4750 |
| 2 | 1525 |
| 3 | 303 |
| 4 | 20 |
| 5 | 2 |
| 6 | 0 |

а). Оцените по этим данным вероятность остаться без выигрыша.

б). Найдите точное значение этой вероятности и сравните ее с результатом, полученным в пункте а).

**Задача № 2.** У маленькой Вари две одинаковые пары варежек. Уходя на улицу, она наугад берет две варежки. Какова вероятность того, что они окажутся парными (то есть на разные руки)?

**Задача № 3.** В урне 10 шаров. Вероятность, что среди двух одновременно вынутых из нее шаров не будет ни одного белого, 1/15. Сколько в урне белых шаров?

**Задача №4.** Из отрезка [0;1] выбирают два числа х и у. Какова вероятность, что наибольшее из них больше ½? Наименьшее из них больше ½?

**Задача № 5.** Витя выписывает в порядке возрастания все пятизначные числа, которые можно составить из цифр 0;1;2. Сколько всего чисел он выпишет? Какое число будет первым? Какое – последним? Какое число он запишет после 20 122? А перед ним?

**Задача № 6.** У Вас есть 9 разных книг из серии «Занимательная математика». Сколькими способами можно:

1. расставить их на полке;
2. подарить 3 из них победителям школьной олимпиады, занявшим первые три призовых места;
3. выбрать три из них для подарка своему племяннику;
4. распределить их поровну между тремя учениками?

**Задача №7.** Найдите вероятность того, что снова получится то же самое слово, если перемешать и выложить в ряд буквы слова:

1). МЫЛО;

2). РАМА;

3). МАМА

**Задача № 8.** У случайного прохожего выясняют его день рождения. Сколько элементарных исходов у этого опыта? Рассмотрим события:

А={он родился в январе};

В={он родился в апреле};

С={он родился 30 – го числа};

D={он родился зимой};

Найдите количество элементарных исходов в каждом из следующих событий:

1). (А ∩С) В



2). А



3). (А



4) А



**Задача № 9.** Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка – 0,7; для второго – 0,6. Какова вероятность того, что:

1). Оба промахнуться;

2). Оба попадут;

3). Хотя бы один попадет;

4). Хотя бы один промахнется.

**Задача № 10.** Какое минимальное количество монет надо взять, чтобы вероятность хотя бы одного «орла» при их подбрасывании была больше 0,99?

**Задача № 11.** В ящике 4 детали – 2 исправные, 2 – бракованные. Из ящика наугад вынимают по одной детали, пока не извлекут все бракованные. Сколько деталей, вероятнее всего, будет при этом извлечено?

**Задача № 12.** Спортсмен – биатлонист должен поразить 3 мишени пятью выстрелами. На каждый выстрел он тратит 10 секунд и попадает в цель с вероятностью ½. Случайная величина Х – общее время, которое он проведет на огневом рубеже. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

## Приложение 5. Технологическая карта темы «Элементы теории вероятностей»

Приложение 6. Разработка урока «Предмет теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей»

## Приложение 7. Презентация к уроку «Предмет теории вероятностей. Основные понятия»

## Приложение 8. Технологическая карта конструирования урока «Условная вероятность. Полная вероятность»

## Приложение 9. Технологическая карта конструирования урока «Случайные события и азартные игры»

## Приложение 10. Методическое пособие «Энтропия и информация. Решение логических задач». 36с.

## Приложение 11. «Энтропия и информация» мультимедиа – комплекс. CD – диск, методическое пособие. 12с.

## Приложение 12. Буклет тематического модуля «Энтропия и информация»

## Приложение 13. Технологическая карта конструирования занятия «Решение логических задач с помощью подсчета энтропии и количества информации»

## Приложение 14. Тематический реферат «История становления теории вероятностей»

Доманина Екатерина, 8 класс

*Нет науки, более достойной наших размышлений*

Лаплас

Считается, что зарождение теории вероятностей началось с того, что придворный французского короля, азартный игрок шевалье де Мере (1607-1648) обратился к французскому физику, математику и философу Блезу Паскалю (1623-1662) со следующими вопросами:

* сколько раз надо бросить две игральные кости, чтобы случаев выпадения пары шестерок было больше, чем случаев невыпадения пары шестерок?
* как справедливо разделить поставленные на кон деньги, если игроки прекратили эту игру преждевременно?

Задачи с подобным содержанием вопроса встречаются и раньше: рассмотрим задачу, сформулированную в книге итальянского математика Луки Пачоли «Сумма знаний по арифметике, геометрии, учение о пропорциях и пропорциональности» (1494г.): Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку в 22 дуката. В связи с некоторыми обстоятельствами игра не может быть закончена, причем одна сторона в этот момент имеет 50 очков, а другая – 30 очков. Какую часть общей ставки должна получить каждая сторона? Разные математики (Пачоли, Тарталья, Паскаль, Ферма) предлагали разные подходы к решению данной задачи и ей подобных. Наиболее правильными следует признать способы решения, предложенные Б.Паскалем и П.Ферма, которые в своих решениях опирались на вероятностные рассуждения [1, с.14-17].

Из сохранившейся переписки между Паскалем и французским математиком Пьером Ферма (1601-1665) по поводу решения этих задач, можно сделать вывод, что вопросы относительно азартной игры перешли в разряд математических исследований. Известно, что на второй вопрос искали ответ разные ученые в различных странах, а это свидетельствует о значимости интереса к поиску вероятностных закономерностей в игровых ситуациях, что позволяет говорить о сочетании Случая и математических расчетов. Вслед за играми в кости ученых 17 века заинтересовали игры «на деление ставок» [1, с.27]:

* В урне 2 белых и 4 черных шара. Один азартный человек держит пари с другим, что среди вынутых трех шаров будет ровно 1 белый. В каком отношении находятся шансы спорящих?
* Трое игроков по очереди извлекают по одному шару из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара. Побеждает тот, кто первый извлечет белый шар. В каком отношении находятся шансы спорящих?

В России первые исследования по теории вероятно­стей были выполнены к середине XIX столетия. Они свя­заны с именами замечательных русских ученых-матема­тиков Н. И. Лобачевского (1792-1856), М. В. Остроград­ского (1801-1861), В. Я. Буняковского (1804-1889).

«Основания математической теории вероятностей» (1846 г.) В. Я. Буняковского имели большое значение для ознакомления русских математиков, как первое фундаментальное руководство по теории вероятностей, изданное в России. В этой работе Буняковский наряду с оригинальным изложением самой теории вероятностей осветил вопросы ее практического применения. Кроме того, здесь он впервые дал терминологию новой науки на русском языке. Это было сделано настолько удачно, что она не подверг­лась существенным изменениям до сих пор. Многие из последующих научных работ Буняковского были тесно связаны с развитием русской промышленности и хозяй­ства. Они содействовали успешному распространению теории вероятностей в России. Благодаря трудам Буня­ковского преподавание теории вероятностей в русских университетах поднялось на новую ступень и стало на­много шире и глубже по сравнению с зарубежными.

Во второй половине XIX столетия следует целый ряд блестящих открытий русских математиков. После работ выдающегося русского математика и меха­ника П. Л. Чебышева (1821-1894), его учеников А. М. Ляпунова (1857-1918) и А. А. Маркова (1856-1922) во всем мире теорию вероятностей стали называть «русской наукой».

Эти замечательные традиции были продолжены со­ветскими учеными. Работы С. Н. Бернштейна (1880-1968), начатые им еще до 1917 г., оказали серьезное влияние на дальнейшее распространение идей теории вероятностей в нашей стране. Им была воспитана целая плеяда ученых, образовавших ленинградскую школу теории вероятно­стей.

В середине 20-х годов А. Я. Хинчин (1894-1959) и А. Н. Колмогоров (1903-1987) создали московскую школу теории вероятностей. Решающее значение имела работа А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.), которая ознаменовала собой начало нового ис­торического этапа в развитии этой науки. Вклад академика А. Н. Колмогорова - Героя Социа­листического Труда, лауреата Ленинской премии, первого в истории лауреата международной математической пре­мии Больцано, почетного члена многих академий мира — в современную математику огромен. Трудно даже пере­числить те области науки, в которых им получены фун­даментальные результаты. И все же можно смело утвер­ждать, что самым большим его научным достижением яв­ляется создание современной теории вероятностей. Заслуга А. Н. Колмогорова состоит не только в раз­работке новых научных теорий, но еще в большей степени в том, что он воспитал целую плеяду талантливых уче­ных, которые бук­вально преобразовали лицо этой науки. Значителен вклад в теорию вероятностей выдающегося математика, акаде­мика Ю. В. Линника (1915-1972), который после Вели­кой Отечественной войны возглавлял широкие исследова­ния, проводившиеся в Ленинграде и Вильнюсе.

Сейчас, пожалуй, нет области знания, в которой не использовались бы методы теории вероятностей. Приме­нение вероятностно-статистических методов стало тради­ционным во многих науках. К ним относятся физика, гео­дезия, теория измерений и др. В последнее время теория вероятностей неожиданно стала использоваться в таких науках, где этого и нельзя было ожидать. Это медицина и биология, военная наука и космонавтика, теория стихо­сложения и лингвистика, психология и теория обучения... Кроме того, на основе вероятностных методов появился целый ряд новых наук, отпочковавшихся от теории ве­роятностей. Это теория информации, теория надежности, статистический контроль качества, планирование экспе­римента и др. Теория вероятностей являет­ся математической основой одной из новых наук XX в. - кибернетики, что в свою очередь способствовало еще большему возрастанию при­кладного значения теории вероятностей.

Научно-техническая революция поставила перед со­ветскими учеными-специалистами в области теории веро­ятностей новые задачи, направленные на тесное соеди­нение науки с практикой, что является наиболее характерной чертой для советской вероятностной школы. Примером этому служит то, как машиностроители приме­няют теорию надежности Б. В. Гнеденко, металловеды используют теорию прочности В. М. Финкеля, работники промышленных предприятий проводят контроль качества по методу А. Н. Колмогорова.

Начиная со второй половины XX в. количественное измерение явлений, математическое моделирование раз­личных процессов, в том числе производственных, стали непременным атрибутом научного творчества во многих направлениях. «Наука о случае», вероятностно-статисти­ческие методы вошли в арсенал важ­нейших инструментов большого круга людей: инженеров, экономистов, врачей и многих других специалистов раз­личных отраслей народного хозяйства. Во всем мире на­столько усилился интерес к этой науке, что теория веро­ятностей стала модной в самом лучшем смысле этого слова.

Вводимому курсу предписывается не только образовательное, но и боль­шое воспитательное значение. Так, академик Б.Б. Голицын в начале XX века говорил: «Признаю за таким курсом высокообразовательное значение, как введение ко всяким стохастическим исследованиям и методам, имеющим та­кое широкое применение в различных областях знания и в практической жизни. Большое значение имеет этот курс и для более сознательного и глу­бокого усвоения отечествоведения, каковому курсу я придаю первенствую­щее значение в средней школе» [3, с.3].

Разве в данной цитате не заключена идея глубокого философского осмысления значения теории вероятностей – науки, позволяющей грамотному человеку достаточно уверенно чувствовать себя при многократной встрече со случайными событиями; науки, связывающей действительность мира профессий с действительностью мира игры, и, тем самым влиять на формирование мировоззрения человека? И этот процесс длится уже много веков.

Приложение 15. Презентация проекта «Информация и логические задачи»

## Приложение 16. Презентация запуска проекта «Теория вероятностей и жизнь»

## Приложение 17. Буклет «От теории вероятностей – к теории азартных игр» в рамках проекта «Теория вероятностей и жизнь»

## Приложение 18. Презентация «Дети в мире пороков взрослых» в рамках проекта «Теория вероятностей и жизнь»

## Приложение 19. Аннотация исследовательской работы «Вероятностные игры» учеников 8 класса

## Приложение 20. Презентация к исследовательской работе «Вероятностные игры»

1. http://www.nadegda-teorver.narod.ru [↑](#footnote-ref-1)
2. http://www.nadegda-teorver.narod.ru [↑](#footnote-ref-2)
3. Сравните с требованиями 5-6 класса [↑](#footnote-ref-3)