Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Южно-Российский государственный технический университет

(Новочеркасский политехнический институт)

Шахтинский институт (филиал) ЮРГТУ (НПИ)



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к курсовой работе по дисциплине**

**«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

Новочеркасск 2008

УДК 681.3(076.5)

Рецензент – доцент В.В. Луценко

Составитель **Бондаренко А.И.**

**Методические указания к курсовой работе по дисциплине «Численные методы»** / Сост. А.И. Бондаренко; Шахтинский ин-т (филиал) ЮРГТУ (НПИ). – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2008. - 12 с.

– 50 экз.

Методические указания содержат теоретический материал, примеры выполнения и требования к оформлению курсовой работы по дисциплине «Численные методы».

Предназначены для студентов второго курса специальностей 230201**«**Информационные системы и технологии**»** и 0808001 «Прикладная информатика».

УДК 681.3(076.5)

© Шахтинский институт ЮРГТУ, 2008

© Бондаренко А.И., 2008

**ВВЕДЕНИЕ**

Изучение различных процессов требует наряду с глубоким пониманием физики происходящих явлений совершенного владения современными методами вычислительной математики.

Обычно математическая модель записывается в форме как угодно сложных математических структур и, как правило, получить аналитическое решение такой задачи не удаётся. Приходится использовать численные методы вычислительной математики, реализация которых на ЭВМ требует соответствующего программного обеспечения. Результаты моделирования объекта на ЭВМ позволяют “проиграть” его поведение в самых разных, под­час экстремальных условиях. Значение такого вычислительного экспери­мента трудно переоценить, особенно если натурный эксперимент опасен, дорог или просто невозможен.

Большинство физических процессов можно сформулировать на языке дифференциальных уравнений с частными производными. Производные в этих уравнениях описывают важнейшие физические величины: скорость, ускорение, силу, температуру, трение, ток, потенциал и т.д.). Многие из таких уравнений не имеют аналитического решения и, чтобы их решить, приходится прибегать к численным методам.

В курсовой работе рассматривается одно из самых важных уравнений математической физики - уравнение Лапласа на примере решения задачи Дирихле в заданной плоской области. Отсутствие аналитического решения поставленной задачи требует выбора численного метода и его реализации на ЭВМ.

Курсовая работа является завершающим этапом изучения курса “Численные методы”. **Цель курсовой работы:**

* систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний по компьютерному моделированию типовых вычислительных алгоритмов и анализа полученной информации;
* выявление степени подготовленности студентов к самостоятельной работе в ходе решения поставленных задач.

3

1. **Аналитические методы решения уравнений в частных производных**

Существует целый арсенал методов для решения уравнений в частных производных. Перечислим некоторые аналитические методы решения таких уравнений.

*Метод разделения переменных*. Уравнение с частными производными с *n* независимыми переменными сводится к *n* обыкновенным дифференциальным уравнениям. Решение краевых задач для уравнения Лапласа может быть найдено методом разделения переменных (методом Фурье) лишь для простейших областей (круг, прямоугольник, шар цилиндр и др.).

*Метод преобразования координат*. Исходное уравнение с частными производными сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению или к другому, более простому уравнению с частными производными с помощью соответствующего преобразования координат (например, поворота координатных осей и т.п.).

*Введение новых переменных*. Исходное уравнение с частными производными преобразуется к такому уравнению с частными производными для другой неизвестной функции, которое решается легче, чем исходное.

*Метод интегральных уравнений*. Уравнение с частными производными сводится к интегральному уравнению (уравнение, в котором неизвестная функция стоит под знаком интеграла).

*Вариационные методы*. Вместо уравнения с частными производными решается некоторая задача минимизации. Оказывается, что функция, доставляющая минимум некоторому выражению, является решением исходного уравнения.

*Метод разложения по собственным функциям*. Эти собственные функции находятся как решения так называемой задачи на собственные значения, которые соответствуют исходной задаче для уравнения с частными производными.

*Метод функций Грина*. Начальные и граничные условия заменяются системой простейших источников, и задача решается для каждого простейшего источника. Полное решение исходной задачи получается в результате суммирования решений для элементарных источников.

4

**2. Численные методы решения**

**уравнения Лапласа**

В курсовой работе требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

 (1)

одним из известных численных методов. Многие установившиеся процессы различной физической природы описываются этим уравнением.

Ставится задача о нахождении стационарного (не изменяющегося с течением времени) распределения температуры внутри многоугольника, если известно распределение температуры вдоль его сторон, т.е. необходимо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

Одна из главных трудностей, возникающих при решении этой задачи обусловлена сложной формой границы расчетной области. Аналитические решения удается получить лишь в частных случаях - для простейших областей (прямоугольник, круг, сектор, шар). Основными методами решения поставленной задачи являются численные методы.

Универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными является метод конечных разностей (или метод сеток). Суть его в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (x,y) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки.

Будем считать, что заданная область покрыта прямоугольной сеткой. Узлы сетки, лежащие на границе области, называются граничными, а все остальные - внутренними. Прямоугольные сетки наиболее удобны при организации вычислительных алгоритмов (рис.1).

Уравнение (1) записывается для каждого внутреннего узла расчетной области, дифференциальное уравнение при этом заменяется системой алгебраических уравнений (разностными уравнениями).

Если полученная разностная краевая задача разрешима и ее решение при измельчении сетки приближается (сходится) к решению

5

исходной задачи для дифференциального уравнения, то оно и принимается за приближенное решение исходной задачи.



**Рис.1. Прямоугольные сетки для решения задачи Дирихле**

Производные, входящие в дифференциальное уравнение (1), заменяются соответствующими разностными отношениями:

;

.

Эти вычислительные шаблоны применяют там, где узлы прямоугольной сетки не являются равноотстоящими. Если α=β=h1, а γ=δ=h2, то применяют следующий вычислительный шаблон:

;   
 .

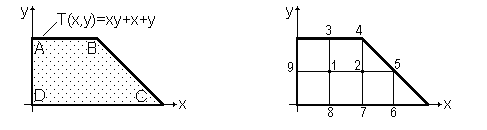
В случае квадратной сетки уравнение (1) для нулевого узла будет иметь вид: 

Так как вычислительные шаблоны связывают лишь несколько соседних узлов сетки, то матрица коэффициентов системы линейных уравнений для определения узловых неизвестных оказывается “разряженной”, т.е. содержит много нулевых элементов.

Рассмотрим пример использования приведенных вычислительных шаблонов для решения уравнения (1).

6

Пусть на сторонах трапеции (рис. 2), заданной координатами вершин A(0,2), B(2,2), C(4,0), D(0,0) известно распределение температуры T(x,y)=xy+x+y. Необходимо найти распределение температуры внутри области.



**Рис. 2. Заданная расчетная область**

Покроем квадратной сеткой рассматриваемую область (рис. 2) и составим систему линейных уравнений для определения неизвестных значений T1 и T2:

 (2)

Вычислим значение температуры в граничных узлах (Т3 – Т9) сетки по заданной функции на границе T(x,y)=xy+x+y и подставим в систему уравнений (2). Получим систему для определения неизвестных значений T1 и T2:



Искомое решение T1 =3, T2 = 5. Выбор числа узлов сетки зависит от требуемой точности. Зная значения температуры в узлах, можно найти температуру в любой точке области, применяя интерполяционные формулы для функций нескольких переменных.

Если значения функции *z=f*(*x,y*) известны в вершинах прямоу-гольника *a≤ х≤ b, c≤ y≤ d* : *z1= f(a,c)*, *z2= f(b,c), z3= f(b,d), z4= f(a,d)*, то в любой точке (*x,y*) этого прямоугольника значения функции *z=f(x,y)* могут быть найдены по следующей формуле(*hx = b - a, hy = d - c*):



7

Для получения координат точек изотерм можно применить фор-мулы линейной интерполяции. Пусть в двух соседних узлах сетки

(*x1,y1*) и (*x2,y2*) известны значения температуры Т1 и Т2. Если необходимо найти координаты точки c заданной температурой T0

min(Т1,Т2)≤T0≤ max(Т1,Т2),

то можно воспользоваться формулами

, .

Для рассматриваемой области (рис. 2) координаты изотермы T0=2 будут равны: (0;2), (0,5;1), (1;0,5), (2;0).

Для решения поставленной задачи можно применить метод конечных элементов (МКЭ), который впервые был применен для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных в середине 50-х годов ХХ столетия и с тех пор завоевал широкую популярность. Основная идея МКЭ состоит в том, что область расчета делится на конечное число элементов произвольной геометрической формы, и для каждого элемента рассматриваются так называемые базисные функции *αi*, принимающие значения, равные 1 в *i* - м узле элемента и нулевые во всех других узлах.

Тогда значение искомой функции внутри элемента выражается через узловые неизвестные в виде

.

Наиболее распространенными конечными элементами для двумерных задач являются треугольные элементы (рис.1) с линейными базисными функциями (S - площадь треугольника):

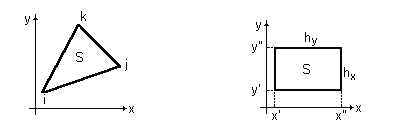
,

,

.

Положительное значение площади S обеспечивается нумерацией вершин треугольника против часовой стрелки.

8



**Рис. 3. Треугольный и прямоугольный конечные элементы**

Пусть область расчета D c границей Г покрыта треугольными элементами. Вершины, расположенные внутри области, определяют узловые неизвестные. Для их определения составляют систему линейных уравнений:

, (3)

где u j - значения искомой функции в узле j, а коэффициенты  определяются следующим интегралом:

. (4)

Внутреннее суммирование в системе уравнений (3) ведется по всем внутренним узлам, принадлежащим k-му элементу, а внешнее - по всем элементам, содержащим узел j. В рассматриваемой системе уравнений число узловых неизвестных равно числу уравнений. Для треугольных элементов

,

,

.

Невозможно дать общие рекомендации по триангуляции произвольной области. Существуют различные способы повышения точности при использовании МКЭ. Один из них - использование нелинейных конечных элементов и элементов специального вида для более точной аппроксимации границы области расчета и искомой функции.

Для прямоугольного конечного элемента (рис.3) могут быть построены нелинейные базисные функции

9

.

Коэффициенты системы МКЭ для прямоугольного элемента можно получить из интеграла (4).

МКЭ является одним из наиболее эффективных численных методов решения краевых задач, но, как и любой метод, он имеет свои недостатки. Так, точность полученных результатов зависит от триангуляции области. Количество выбранных треугольников, их вид и расположение могут влиять на точность получаемых решений. Особенно это относится к решению краевых задач в областях с угловыми точками.

**3. ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ**

Каждый студент получает индивидуальное задание, в котором указывается тема работы: “Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа” и ее этапы выполнения:

- составление системы линейных уравнений, аппроксимирующих уравнение Лапласа в области многоугольника, заданного координатами вершин с известным распределением температуры вдоль его сторон;

- нахождение узловых неизвестных и вычисление максимальной относительной погрешности полученных результатов;

- построение семейства изотерм в расчетной области.

Задание утверждается заведующим кафедрой МИСТ и подписывается руководителем курсовой работы. На бланке указываются дата получения задания и срок выполнения работы.

Содержание курсовой работы излагается в пояснительной записке, где в лаконичной форме должна быть раскрыта суть выполняемой работы. В ней должны быть следующие разделы: введение, описание метода решения задачи, расчетная часть, анализ полученных результатов, список использованной литературы, листинг разработанной программы.

Оформление пояснительной записки выполняется с помощью любого текстового редактора. Объем работы 10-15 страниц машинописного текста.

10

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1.Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллипти- ческих уравнений. -М.: Наука. Физматлит. 1976.

2. Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной   
математике. -М.: Высшая школа. 1990.

3. С.Фарлоу. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер.с англ. - М.: Мир. 1985.

4. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. -М.: Высшая школа. 1983.

5. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. -М.: Наука. 1972.

6. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. -М.: Мир.1982.

7. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука. 1983.

8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. -М.:Мир. 1980.

9. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. -М.: Высш. шк. 1994.

11

Учебно-практическое издание

**Методические указания и задания к лабораторным работам**

**по дисциплине «Численные методы»**

Составитель **Бондаренко Александр Иванович**

Редактор И.И. Кузнецова

Темплан 2008г. Подписано в печать 14.01.2008 г.

Формат 60х841/16. Бумага офсетная. Ризография.

Усл.-печ.л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,75. Тираж 50 .

Южно-Российский государственный технический университет

Адрес ун-та: 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

Шахтинский институт (филиал) ЮРГТУ (НПИ)

Адрес ин-та: 346500, г. Шахты, пл. Ленина, 1