***КИНЕМАТИКА***

***ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ***

***В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД***

А.П. Быркин, С.В. Васильев, В.В. Щенников.

(Москва 2004 г.)

*Институт Автоматизации Проектирования РАН,*

*123056, г. Москва, ул. 2-ая Брестская, д. 19\18,*

*тел. 250-88-53; e-mail: ICAD @ inapro.msk.su*

# Аннотация

В представленной работе рассматривается новый (кинематический) взгляд на проблему фазовых переходов.

# Содержание

### I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Введение\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 4

Часть первая.

Кинематические основы нелинейного подобия\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 6

Часть вторая.

Кинематические инварианты подобия (движения)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_9

**II. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

Введение\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 16

Часть первая.

Вихреобразование в невязких нетеплопроводных средах\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 18

Часть вторая.

Конически-автомодельные течения идеальной несжимаемой жидкости.

Разрывы второго рода\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 27

Часть третья.

Катастрофы в жидкости. Разрывы первого рода кручения\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 35

Часть четвёртая.

Объёмный фазовый переход в окрестности оси кручения\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 39

Список используемой литературы\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_43

## I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Введение.

Известно, что проблема фазовых переходов (превращений) относится к разряду тех проблем, которые рассматриваются в рамках фундаментальных физических представлений о строении вещества. Наличие фазового перехода (как фазового превращения), в свою очередь, рождает новый тип физического взаимодействия - фазового взаимодействия, по крайней мере, двух фаз. Очевидно, что необходимым условием существования этого нового типа фундаментального взаимодействия является наличие механизма (процесса, действия) фазового разделения вещества, т.е. наличие так называемого фазового делителя.

Общеизвестно, что в базе современных физических представлений находится положение о взаимодействии тел (как фундаментальном взаимодействии). Рассматривая это взаимодействие как внешнее взаимодействие, мы можем заключить, что новое взаимодействие (фазовое взаимодействие) следует отнести к разделу внутренних взаимодействий (как взаимодействие внутри самого вещества).

Подобное разделение представлений о взаимодействии (взаимодействиях) на:

* внешнее;
* внутреннее

позволяет поставить вопрос о существовании т.н. обобщающего (общего) взаимодействия, включающего в себя оба разделённых выше взаимодействия.

Если исходить из постулата о доминанте вещественных представлений об окружающем мире, то открывается возможность говорить (заявить) об обобщающей роли химиокинетического взаимодействия, в базе которого лежит известный закон Аррениуса – закон действующих масс. У этого обобщающего взаимодействия есть одно существенное ограничение, связанное с наличием у вещества свойства т.н. химической активности. Поэтому рассматриваемое обобщение оказывается неприемлемым в тех случаях, когда речь идет о химически нейтральных веществах.

То же самое можно сказать и о другом фундаментальном взаимодействии – электромагнитном взаимодействии, которое имеет место быть при наличии у вещества свойства электрической активности. Очевидно, что это взаимодействие не охватывает случаи электронейтральных веществ.

Заметим, что именно эти случаи составляют основной предмет изучения (исследования) механики сплошных сред. Можно сделать следующий неожиданный вывод о том, что в рамках современной механики сплошных сред отсутствует представление о т.н. собственном фундаментальном взаимодействии, которое бы охватывало случаи как химически, так и электрически нейтральных веществ.

Заявляя о существовании собственного кинематического фундаментального взаимодействия – как скоростно-вихревого взаимодействия, мы, тем самым, устраняем (ликвидируем) тот пробел, который существует в рамках стандартных представлений механики сплошных сред.

Необычность этого нового взаимодействия состоит в том обстоятельстве, что оно является т.н. сверхвзаимодействием по отношению к известным взаимодействиям:

* скоростному взаимодействию;
* вихревому взаимодействию.

Кратко существо этого сверхвзаимодействия можно представить как возможность смены характера взаимодействия:

* скоростное взаимодействие сменяется вихревым взаимодействием;
* вихревое взаимодействие сменяется скоростным взаимодействием.

Углубляя представление об этом сверхвзаимодействии, мы приходим к заключению о том, что оно предстает как фазовое взаимодействие (взаимодействие фаз), когда смена взаимодействия будет являть собой смену фазы (характера) взаимодействия.

Поскольку в рассматриваемом взаимодействии участвуют основные кинематические параметры (функции) т.н. среды, то его следует номинировать как кинематическое взаимодействие, а само фазирование - как кинематическое фазирование.

Сохраняя привязку процесса фазирования к строению вещества, можно заключить о проявлении феномена кинематики строения вещества, что в рамках стандартных Лагранжевых представлений означает проявление новой степени свободы - т.н. структурной степени свободы.

Выявление феномена кинематики строения вещества позволяет заключить о наличии сверхфеномена кинематического подобия (уподобления) внешнего и внутреннего представления о движении вещества. Наличие сверхфеномена кинематического подобия даёт основание для заявления о существовании новой феноменологии - феноменологии кинематического уподобления.

Явно просматриваемая смена феноменологий позволяет заявить о смене парадигмы, базирующейся на т.н. линейной феноменологии (как феноменологии линейных представлений) на новую парадигму, базирующуюся на т.н. нелинейной феноменологии, в основание которой положен феномен кинематического (нелинейного) подобия.

Часть первая.

Кинематические основы нелинейного подобия.

Традиционно понимаемое подобие, как геометрическое подобие можно (и следует) рассматривать в качестве т.н. внешнего подобия, или подобия формы. Очевидно, что внешнее подобие не гарантирует выполнение свойства т.н. внутреннего подобия – как подобия внутреннего содержания.

Принципиальным моментом при рассмотрении проблемы внутреннего подобия является момент выявления т.н. внутренней степени свободы, обусловленной возможностью заполнения внутреннего объёма. Столь же принципиальным является ответ на вопрос о том, чем заполняется внутренний объём. Он заполняется фазовым переходом.

Последнее обстоятельство превращает фазовый переход в объёмный фазовый переход. Существенным моментом в реализации указанного заполнения является введение понятия фазовой пустоты. Примечательно, что традиционно понимаемое потенциальное (безвихревое) движение оказывается тем движением, в котором имеет место быть вихревая пустота – как пустота вихревой фазы. Эта возможность открывается в рамках представления о скоростно-вихревом взаимодействии.

Таким образом, введение в рассмотрение нового фундаментального (кинематического) взаимодействия - как скоростно-вихревого взаимодействия - означает переход к кинематической интерпретации фазового перехода. С этой точки зрения известный процесс вихреобразования (завихрения потока) предстает как процесс фазового перехода. Переход от скоростной фазы к вихревой фазе (фаза вихря).

Из приведённых рассуждений можно сделать следующий вывод принципиального характера. Традиционно трактуемые вихревые движения (потоки) следует рассматривать как движения, наделённые фазовым переходом, т.е. движения, в которых имеет место быть фазовый переход. В этом отношении все вихревые движения (потоки) оказываются подобными друг другу в смысле подобия фазовых переходов, которыми все они являются.

Именно это подобие мы будем номинировать нелинейным подобием. Для прояснения существа этого подобия необходимо специфицировать кинематический фазовый переход.

Установленный в [1] факт кинематической приводимости уравнений движения к уравнениям Риккатиевого типа обнаруживает (актуализирует) наличие особенности у решения (движения), которое стандартно интерпретируется как прекращение существования решения (движения), достигаемое на конечном интервале интегрирования уравнений. Анализ этой особенности обнаруживает поразительную сходственность её с особенностью трансзвуковых течений. Поразительность этой сходственности состоит в том, что эта особенность имеет место быть в течениях несжимаемой жидкости, у которой в явном виде отсутствует фактор сжимаемости.

Вывод, который можно сделать из приведённых рассуждений, сводится к утверждению об универсальном характере выделенной особенности, инвариантной к фактору сжимаемости.

Результат, полученный в [2], даёт основание для перенесения инвариантности на факторы сжимаемости и вязкости среды.

Если принять во внимание тот факт, что все использованные в выше приведённых рассуждениях результаты получены с непременным включением в рассмотрение фактора поперечного кручения, то можно заключить, что этот фактор является фактором приведения стандартных представлений механики сплошных сред к кинематически подобному виду.

Известно, что интегральное представление решения уравнения Риккатиевого типа заключает в себя т.н. сингулярное ядро с особенностью типа полюса. Тогда подобие, о котором идёт речь, можно (и следует) номинировать сингулярным подобием (т.е. подобием сингулярностей).

Заметим, что фактор сингулярного подобия удалось обнаружить при выполнении условия т.н. регулярного подобия, которое в соответствии со стандартными представлениями номинируется как автомодельность. Рассматривая это подобие – как внешнее подобие, мы заключаем, что сингулярное подобие можно (и следует) рассматривать – как внутреннее подобие.

Переходя к рассмотрению отношений этих подобий (внешнего и внутреннего), мы можем констатировать (на основании результатов [1]), что сингулярное (внутреннее), подобие оказывается вложенным во внешнее (регулярное) подобие. Метаморфоза (превращение) регулярного подобия в сингулярное - это процесс сингуляризации подобия. Именно эту метаморфозу подобия мы будем номинировать фазовым переходом второго рода.

Итак, существо фазового перехода второго рода, кратко выражаясь, заключается в сохранении фактора подобия, но с изменением его характера. Регулярное подобие (как линейное подобие) сменяется нелинейным подобием (как сингулярным подобием).

Разделяя традиционное симметрическое кручение в пару, наделённую отношением кососимметрии:

* раскручивание;
* скручивание

мы получаем, с очевидностью, возможность говорить об обращении этой операции, когда раскручивание (скручивание) обращается в скручивание (раскручивание).

Если прибегнуть к формальному представлению обращения – как инверсии, то становится понятным, что эта формальная инверсия и является основным порождающим фактором нелинейности.

Мы будем постулировать, что вложенность сингулярного подобия является имманентным (собственным) свойством любого движения. Заметим (и это принципиально важно), что это свойство вполне согласуется с фундаментальным физическим представлением об атомарном строении вещества. При этом имеется в виду стандартное оболочечно-сферное представление атома.

Следует заметить, что рассматриваемое кинематическое подобие можно перенести и на атом, если полагать, что атом обладает регулярной оболочкой и сингулярным ядром. Тогда окажется, что в регулярную автомодельную оболочку будет вложено ядро, наделённое сингулярным (нелинейным) подобием.

Часть вторая.

Кинематические инварианты подобия (движения).

Из самого заголовка этого раздела следует, что мы заявляем о существовании соответствия между движением и подобием. Другими словами, само движение рассматривается в прямой связи с уподоблением.

Если расширить понимание движения до понимания изменения («всё течёт – всё изменяется»), тогда идея, высказанная выше, может быть сформулирована в следующем виде: «любое движение осуществляется так, что отвечающее ему изменение сохраняет подобие исходному положению». Заметим, что это положение выполняется в варианте (случае) движения твёрдого тела, с той лишь разницей, что подобие в этом случае заменяется (сужается до) отношением тождественности.

Для дальнейшего расширения представлений о кинематическом подобии примем во внимание известный в механике твёрдого деформируемого тела феномен модуля Юнга, который имеет прямое отношение к телесным (объёмным) представлениям. Можно заявить, что предполагаемое расширение следует рассматривать – как переход от фазового перехода 2-го рода к объёмному фазовому переходу.

Этот переход означает, что фазовый переход обретает статус объёмного процесса, в результате которого у объёма появляется новое свойство (качество) – свойство фазирования (как фазового разделения). Принципиально важно отметить, что при фазовом разделении объёма сохраняется кинематическая целостность (наполненность) каждой из составляющих.

Именно при рассмотрении свойства целостности объёма мы воспользуемся аналогией с модулем Юнга, который мы будем воспринимать как отражение свойства сохранения объёма. Вводя в рассмотрение понятие кинематического объёма, мы, тем самым, будем наделять кинематику её собственным объёмом.

Исходя из стандартных представлений кинематики, можно сформировать собственный кинематический объём, представление которого непосредственно вытекает (следует) из представления о так называемом продольнике и поперечнике кинематики.

При номинации продольника и поперечника мы будем исходить из собственного свойства протекания (проточности). Тогда вполне естественно можно говорить о скоростном продольнике. В соответствии со стандартным пониманием вихря (завихрённости) можно заключить о существовании так называемого вихревого поперечника.

Оставляя открытым вопрос, о вихревом заполнении поперечника и полагая, что это имеет место, мы получаем возможность представить кинематический объём как

,



где  - суть продольник, - суть поперечник кинематики.



Добавим к этому, что  представляет собой скорость протекания, а - суть вихрь. Для устранения нестрогости приведённых представлений мы запишем вместо  выражение .



Полагая, теперь

,



мы, тем самым, установим у кинематических представлений выполнение свойства сохранения так называемого кинематического объёма. В этом отношении приведённое выше выражение повторяет представление феномена Юнга.

Обнаруженная согласованность представлений позволяет заявить о сохранении феномена кинематического подобия при переходе от механики жидкости и газа к механике твёрдого деформируемого тела. Последнее обстоятельство даёт основание для номинации предыдущего представления в качестве так называемого кинематического инварианта, где свойство инвариантности проявляется – как инвариантность по отношению к стандартно понимаемому состоянию вещества.

Заметим, что в работе [2] приведение к кинематическим представлениям было осуществлено при выполнении условия инвариантности построений по отношению к конкретному виду уравнения состояния вещества. Таким образом, выявление феномена кинематического инварианта означает установление универсального представления кинематической связи, являющейся инвариантной по отношению к традиционно понимаемому состоянию среды.

Вывод, который можно (и следует) сделать из изложенного выше, имеет чрезвычайно важное, принципиальное значение. Этот вывод может быть сформулирован следующим образом. Фазовый переход второго рода имеет чисто кинематическую природу и присущ самой кинематике среды. Другими словами, этот фазовый переход является неотъемлемым свойством движения как такового и потому отсутствует в т.н. покоящейся среде. При этом верным оказывается и обратное положение, т.е. наличие фазового перехода 2-го рода означает отсутствие состояния покоя (т.е. так называемого режима полного торможения).

Нахождение кинематики в режиме фазового перехода 2-го рода, таким образом, гарантирует выполнение свойства непрерывности движения. Последнее, в свою очередь, означает наличие у среды кинематической сплошности (как сплошности, непрерываемости движения).

Итак, мы показали, что у среды имеются две ипостаси представления сплошности:

* вещественная сплошность;
* кинематическая сплошность.

В рамках традиционных представлений фигурировала только вещественная сплошность среды. Расширение традиционной сплошности за счёт пополнения её кинематической сплошностью позволяет перейти к качественно новому толкованию сплошности – как сверхсплошности (надсплошности). Существо этой сверхсплошности заключается в сплошной связности выделенных двух сплошностей (вещественной и кинематической).

Последнее свойство проявляется в том, что в случае нарушения вещественной сплошности, т.е. потери вещественной целостности, сохраняется кинематическая связность (как связность движения частей целого). Таким образом, понятие сверхсплошности покрывает как случай вещественной сплошности, так и случай вещественной разделённости (разреженности). Можно заявить, что в этом случае вещественная связь переходит (преображается) в кинематическую связь.

Очевидно, что имеет место и обратный переход: кинематическая связь → вещественная связь. Выделенная метаморфоза (преобразование) связи, однако, не меняет существо дела, т.е. сохраняет связь как таковую, изменяя лишь характер связи. Если при этом ввести понятие подобия связи, т.е. полагать, что кинематическая связь подобна вещественной связи, тогда можно заявить, что связность движений (как кинематическая связь) подобна связности вещества (т.е. вещественной связи). Выделенное подобие представляется как мультипликативная связь (связность).

Именно эту связь (связность) мы номинируем нелинейной связью. Резюмируя изложенное выше, можно сформулировать следующий вывод. Нелинейная (мультипликативная) связь является тем универсальным представлением связи (связности), которая покрывает как кинематическую, так и вещественную связи (связности).

Сделаем одно принципиально важное замечание. Порождающим началом проявления сверхподобия является, очевидно, собственное кинематическое подобие, базирующееся на продольно-поперечном представлении кинематики. Тогда следует заключить, что сверхподобие в варианте вещественной связности является кинематически индуцированным подобием. Само же кинематическое подобие порождается, как было установлено в работах [1, 2], введением фактора поперечного кручения.

Если принять во внимание известный фундаментальный физический факт - наличие кручения у оболочки атома, тогда отношение внешнего и внутреннего кручений можно (и следует) представлять - как феномен самоиндукции (кручения). У этого феномена (самоиндукции) есть и другой вариант представления - как феномена самоподобия. Самым поразительным моментом этого варианта представления является возможность его номинации - как феномена автомодельности.

В отличие от стандартного понимания автомодельности как линейного подобия, рассматриваемый вариант представляет собой вариант автомодельности как нелинейного подобия. Если стандартно понимаемую автомодельность следует рассматривать как индуктивное (силовое) уподобление (подобие), то скрытый смысл самоуподобления и состоит в моменте самоорганизации – как нелинейного самоуподобления, инвариантного по отношению к фактору силовой индукции.

Заметим (и это принципиально важно), что проявление в рамках традиционной механики фактор индуктивного сопротивления оказывается ни чем иным, как реакцией на индуктивно порождённое представление о порядке (как индуктивной организации или линейном порядке). Несовместимость линейного и нелинейного порядков в рамках общего (единого) упорядочивания обуславливается принципиальным различием принципов упорядочивания. Это различие кроется в отношении этих упорядочиваний. Данное отношение включает в себя инверсию, когда переход от одного (линейного) упорядочивания к другому (нелинейному) и обратно означает обращение (инверсию) порядка.

Выше мы уже отмечали, что изменение порядка с учётом фактора инверсии порождает то аномальное отношение части и целого, когда часть оказывается больше целого. Именно включение фактора инверсии позволяет перевести отношение линейного и нелинейного порядка в разряд фазовых отношение, а смену порядков представлять как фазовый переход (фазовый переход 2-го рода).

Переход к представлению этого фазового перехода - как объёмного - приводит к тому, что представление о кинематическом инварианте превращается в т.н. объёмный инвариант, отражающим феномен сохранения фазового объёма (как объёма, заполненного фазовым переходом).

В предлагаемом варианте представлений оказывается, что традиционные представления о так называемых законах сохранения, фигурирующих в механике сплошных сред, приводятся к единому (общему) кинематическому представлению, отражающему общий кинематический принцип – принцип сохранения фазового объёма.

Достаточно очевидно, что предлагаемые представления механики сплошных сред охватывают и ту механику, которая известна как механика Мещерского, т.е. механику тел переменной массы, когда в качестве кинематического инварианта выступает фактор количества движения:

.



Сопоставляя этот инвариант с кинематическим инвариантом (в скалярной прописи)

,



мы приходим к поразительному заключению о возможности существования кинематического подобия массы и вихря, что означает подобие упорядочивания массы и вихря, т.е. наличие нелинейного подобия. При этом, естественно, вихрь трактуется как отдельная функция (т.е. отдельный вихрь).

Не расширяя рассмотрения кинематических представлений на традиционные представления физики и ограничиваясь лишь представлениями механики сплошных сред, мы заключаем, что предлагаемые представления могут охватывать и те случаи механики, которые принято относить к разряду аномальных случаев (процессов, явлений). Принципиальным моментом, при этом, является момент скрытия аномальности от возможности непосредственного наблюдения. Таким образом, можно заявить, что традиционная (нормальная) механика скрывает в себе аномалии (аномалию), т.е. аномальную механику. Можно высказать более «сильное» положение о том, что существование нормальной механики поддерживается за счёт наличия в ней аномальной механики.

Обращаясь, теперь, к кинематическим основам механики, мы можем заявить о том, что в основании нормальной механики лежит нормальная кинематика, а в основании аномальной механики – аномальная кинематика. Кратко характеризуя существо аномальной кинематики, можно заявить, что это есть та кинематика (движение) у которой движение части превосходит движение целого.

Существование подобной кинематики подтверждается, если перейти к рассмотрению кинематики так называемого кручения, в рамках которого выделить кинематику скручивания. Принципиальным моментом этого выделения (разделения) является момент разделения традиционно понимаемого симметричного кручения в пару кручений, наделённых отношением кососимметрии:

* скручивания;
* раскручивания.

Рассматривая (полагая) внешнее кручение – как раскручивание, а внутреннее кручение – как скручивание, мы получаем возможность наделения этого разделения кручений (внешнего и внутреннего) свойством взаимной инверсности, когда внутреннее кручение оказывается инверсией внешнего кручения (и обратно).

В этом случае, очевидно, можно заключить, что внешнее кручение обратимо во внутреннее кручение (и обратно). В этом варианте представление стандартного симметричного кручения превращается в делитель – нуль-фактор скручивания и раскручивания. Таким образом, введение в рассмотрение фактора кручения (как поперечного кручения) кардинальным образом изменяет саму кинематику, порождая проявление делителя (как нуль-фактора скручивания (раскручивания)) кинематики в пару кососимметрично сопряжённых кинематик (движений).

Именно этот момент двойственности кинематики был актуализирован в [1]. Придавая этой двойственности (парности) статус принципа, мы приходим к заключению о том, что вместо традиционной кинематики, базирующейся на принципе симметрии отношений, приходит новая кинематика, базирующаяся на принципе кососимметричной сопряжённости, в основании которой положено расщепление (разделение) кинематики в пару кососимметрично сопряжённых кинематик.

Принципиальным моментом этого расщепления является тот, что результатом расщепления оказывается проявление пары аномальных кинематик (как кинематик с нелинейной связью). В рамках традиционной линейной феноменологии осреднение этой пары, с очевидностью, приводит к нуль-факторности аномалии, т.е. проявлению нормальной кинематики.

Примечательно (и знаменательно), что известный образ спиралевидного движения (helical flow), предложенный Бельтрами [3], оказывается образом аномальной кинематики. Именно этим обстоятельством и объясняется тот факт, что он (этот образ) не является следствием нормальных представлений (как представлений нормальной кинематики).

Как следствие двойственности, кососимметричным сопряжением этой спирали является вторая спираль, вложенная в первую. Знаменательно, что образ спирали является образом фазового перехода 2-го рода. Тогда выполнение принципа двойственности будет означать двойственность (кососимметричную сопряжённость) этого фазового перехода. Вложенность же спиралей (друг в друга), в свою очередь, будет означать вложенность фазовых переходов 2-го рода - прямого и обратного.

Вот почему в рамках традиционной линейной феноменологии оказывается потерянным (скрытым, тайным) фактор наличия пары кинематических фазовых переходов 2-го рода. Актуализатором этого нелинейного феномена, являющимся делителем фазовых переходов, является фактор поперечного кручения. Именно эта актуализация и была осуществлена в работах [1, 2].

В этом варианте представлений существо нелинейного подобия предстает - как подобие пары спиралей и может быть выражено следующим образом: «раскручивание (спирали) происходит подобно тому, как происходит скручивание спирали». Именно это представление даёт основание для номинирования его - как объёмного подобия.

Имея в виду введённое скоростно-вихревое взаимодействие и его объёмный характер (как объёмное взаимодействие), можно заявить о принципиально новом разделении – как объёмном разделении (разделении объёма) с сохранением условия объёмности (кинематического) подобия составляющих это разделение. Именно выполнение этого условия (подобия) позволяет говорить о наличии свойства вложенности отношения разделённых составляющих друг в друга.

Свойство вложенности (вкладываемости) превращает так называемую операцию сборки (объёма) в нелинейную (кинематическую) сборку. С позиции скоростно-вихревого взаимодействия разделение объёма предстает как следующее операционное разделение:

* вихревое «опустошение» (скоростное «наполнение») в одной части;
* вихревое «наполнение» (скоростное «опустошение») в другой части.

Условие нелинейной сборки превращается в условие сохранения фазового объёма - как целого кинематического объёма. Таким образом, рассматриваемое объёмное разделение (как нелинейное разделение) должно выполняться с необходимым выполнением условия сохранения кинематической целостности. Это нелинейное разделение (объёмное разделение) принципиально отличается от традиционно рассматриваемого (и используемого) линейного разделения.

Заметим (и это принципиально важно), что традиционно используемое линейное разделение рассматривалось в рамках механики, в которой отсутствовал фактор поперечного кручения. Постулируя наличие фактора поперечного кручения – как неотъемлемое свойство любого действия (движения), мы можем заключить, что линейное деление (разделение) не является целостным делением (т.е. делением «нацело»), и поэтому не может породить целостных представлений (как «частных» представлений).

В этом отношении нелинейное (объёмное) деление (разделение) сохраняет (как мы отмечали выше) целостность представлений и в этом смысле является целостным делением (делением «нацело»). Таким образом, отношение линейного и нелинейного делений (разделений) предстаёт как отношение частного и общего (целого). Принципиальным моментом при этом является момент остаточности частного разделения, когда в качестве остатка выступает фактор поперечного кручения.

Отбрасывание этого остатка порождает заведомую приближенность рассматриваемого (линейного) разделения, а значит, и приближенный характер традиционных (частных) представлений, базирующихся на этом разделении (как линейном анализе). Тогда то, что было представлено выше можно (и следует) рассматривать как начало нелинейного анализа, т.е. начала анализа целостностей (кинематических целостностей). Именно этот момент позволяет заключить, что предложенный в данной работе подход можно (и следует) рассматривать – как целостно-кинематический анализ, сопряжённый (кососимметрично) с синтезом общих (кинематических) представлений.

#### II. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Введение.

Известно (см., например, [4]), что интегральное уравнение, выражающее закон изменения углового момента материального объёма невязкой среды, мысленно ограниченного поверхностью , записанное в виде



, (0.1)



оказывается следствием пары уравнений:

- закона сохранения массы ; (0.2)



- закона изменения импульса . (0.3)



Здесь t - время, - поле скорости, - поле плотности, - поле давления; векторы - это, соответственно, радиус-вектор, выпущенный из начала координат, и внешняя нормаль к поверхности .



Не вошедшее в систему исходных интегральных уравнений (0.2), (0.3) уравнение, выражающее закон изменения углового момента, выписывается стандартно без учёта удельного внутреннего углового момента среды . С учётом внутреннего вращения в идеальных (невязких) средах закон изменения полного углового момента материального объёма следует записывать так:



. (0.4)

Эта запись выражает следующую формулировку: «Скорость изменения суммы угловых моментов внешнего и внутреннего вращений частицы идеальной (невязкой) среды равна моменту сил давления, действующих на частицу по нормали к её поверхности».

Если суммарный момент сил давления, действующих на частицу равен нулю, то это ещё не означает, что внешний угловой момент частицы будет оставаться неизменным, т.к. полный угловой момент частицы может перераспределиться между внутренним и внешним вращательными движениями в результате фазового перехода второго рода.

В лекциях Л.В. Овсянникова по газовой динамике [4] вообще нет упоминания о внутреннем угловом моменте среды, т.е. безосновательно предполагается, что никакая порция газа при своём движении не может обладать внутренним угловым моментом, отличным от нуля. В то же время, в «Механике электромагнитных сплошных сред» Ж. Можена [5] внутренний угловой момент присутствует в записи уравнений движения.

Авторы представленной работы не видят причин, по которым следовало бы не включать во внимание такую важную фазово-кинематическую характеристику среды, как внутренний угловой момент. Изменение внутреннего углового момента среды означает изменение фазового состояния среды, не связанного с агрегатным состоянием. Внутренний угловой момент среды можно рассматривать как параметр порядка фазового перехода второго рода, происходящего в сплошной среде при её движении с изменением .

Часть первая.

Вихреобразование в невязких нетеплопроводных средах.

Как известно из курса динамики невязких нетеплопроводных сплошных сред, существует явное разграничение между вихревыми и безвихревыми (потенциальными) течениями. Это разграничение можно считать прямым следствием теоремы Лагранжа, которая гласит: «Если движение невязкой среды непрерывно и баротропно и если в некоторый момент времени в какой-либо частице (в какой- либо массе среды) вихрь равен нулю, то он будет равен нулю в этой частице во все моменты времени» [4]. При этом под непрерывностью течения понимается непрерывная дифференцируемость всех функций, представляющих поведение среды, а именно, скорости , давления , плотности , удельной внутренней энергии , удельной энтропии и т.д. Условие баротропности выражается уравнением , где - полевой дифференциальный оператор Гамильтона.



Баротропное движение среды характеризуется тем, что в нём поверхности уровня плотности и давления совпадают. В несжимаемой жидкости условие баротропности выполнено всилу постоянства её плотности.

Условие баротропности для непрерывного течения нормального газа равносильно выполнению соотношения [4] и оказывается выполненным для изоэнтропического движения. Условие изоэнтропичности оказывается естественным следствием того факта, что при непрерывном движении невязкого нетеплопроводного газа энтропия в частице сохраняется. Поэтому, если в некоторой массе газа в какой-то момент времени распределение энтропии по частицам газа было постоянным, то оно будет постоянным в этой массе газа и в последующее время.



Итак, условие баротропности можно считать выполненным не только для движения жидкости, но и для непрерывного движения невязкого нетеплопроводного газа (далее, просто, газа).

Т.о. согласно теореме Лагранжа вихрь в частице идеальной среды может возникнуть только при протекании этой частицы через поверхность разрыва (в течении среды). Разрыв, через который среда течёт, называется неконтактным разрывом. Если до поверхности такого разрыва частицы среды обладают нулевой завихренностью, то после поверхности разрыва вихрь может быть отличным от нуля.



Заметим, что для газа известно всего два типа неконтактных разрывов: ударная волна и слабый разрыв на звуковой характеристике. На ударной волне функции, представляющие поведение газа терпят разрыв первого рода. На слабом разрыве только некоторые первые производные имеют разрыв первого рода, в то время как сами функции непрерывны.

Что касается движений несжимаемой жидкости, то неконтактных разрывов обнаружено вообще не было (точнее, авторам не известно о публикациях, в которых бы описывались неконтактные разрывы в несжимаемой жидкости).

Динамику идеальной несжимаемой жидкости можно считать частным случаем динамики невязкого газа. Действительно, достаточно положить , т.е. рассматривать изохорические движения газа, как уравнения движения газа переходят в уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости.



Во-первых, из уравнений сильного неконтактного разрыва (ударной волны) для газа следует невозможность подобного разрыва для жидкости.

Во-вторых, из теории слабого разрыва в газе известно, что если поверхность является поверхностью слабого разрыва, то она с необходимостью должна быть характеристикой [4]. Но характеристические поверхности в несжимаемой жидкости - это исключительно контактные характеристики, поэтому можно сделать заключение о том, что неконтактных разрывов в жидкости быть не может.

Отметим, что при выводе соотношений на сильном разрыве в газе не принимается во внимание уравнение, выражающее закон изменения углового момента, потому как считается, что это уравнение не является независимым и есть следствие двух уравнений (0.2), (0.3), выражающих законы сохранения массы и изменения импульса. Это действительно так, если не принимать во внимание такую кинематическую характеристику, как удельный внутренний угловой момент среды . С учётом внутреннего углового момента среды, закон изменения углового момента может быть представлен в виде уравнения (0.4).

Внутренний (собственный) угловой момент среды обусловлен вращательным движением мелких частиц среды (вплоть до молекул и атомов). Процесс самоорганизации в объёме среды, при котором происходит выстраивание угловых моментов частиц преимущественно в одном направлении означает фазовый переход второго рода, когда жидкость или газ не меняют своего агрегатного состояния.

Отказ от рассмотрения возможности фазового перехода второго рода лишает механику сплошных сред возможности представления одного из механизмов вихреобразования и, как следствие, возможности представления процессов, происходящих в существенно завихренных течениях сплошных сред. Ярким примером этому является широко известный среди аэродинамиков вихревой эффект Рэнка, обнаруженный на воздухе [6-10]. Устройство получило название «вихревой трубки».

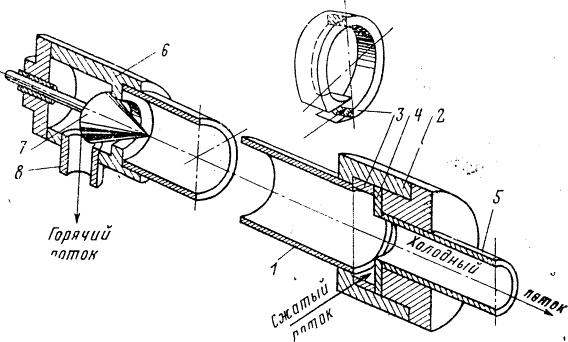


Рисунок 1. Вихревая трубка Рэнка.

Парадоксальность эффекта заключается в том, что если воздух рассматривать как невязкий нетеплопроводный газ, то согласно интегралу Бернулли для непрерывного стационарного движении газа, в вихревой трубке все порции воздуха должны иметь одинаковое удельное теплосодержание - удельную энтальпию торможения. На практике же это далеко не так.

Авторы представленной работы небезосновательно полагают, что представленный вихревой эффект связан с фазовым переходом второго рода. Эффект кинематического фазового перехода второго рода, так же, как эффект вихреобразования, оказывается тесно связан с потерей непрерывности движения.

В газе хорошо известен механизм потери непрерывности движения, называемый градиентной катастрофой [4]. Напомним, что градиентной катастрофой называется явление неограниченного роста градиентов основных величин (скорости, давления и т.д.). Непрерывное движение становиться невозможным и продолжается, но как движение с сильными разрывами. Это одна из важнейших особенностей движения газа. Эта особенность есть следствие нелинейности исходных гиперболических уравнений непрерывных движений газа, а точнее, следствие того, что транспортные уравнения вдоль характеристик оказываются уравнениями типа Риккати. Из теории уравнений Риккати известно, что их решения могут обращаться в бесконечность на конечном интервале изменения независимого переменного.

Интересно, что в несжимаемой невязкой жидкости на основании уравнений непрерывных движений так же были обнаружены течения, характеризующиеся неограниченностью не только производных, но и самих функций (поля скорости, давления) [1, 11]. Однако не было выдвинуто предложение о разрешении градиентной и функциональной катастрофы в жидкости подобно разрешению градиентной катастрофы в газе (точнее, авторам представленной работы не известно о предложении разрешения парадокса разрыва второго рода в жидкости за счёт образования разрыва первого рода). Очевидно, что отсутствие такого предложения продиктовано тем обстоятельством, что в несжимаемой жидкости не известны неконтактные сильные разрывы (разрывы первого рода).

Включение во внимание фазово-кинематической степени свободы, связанной с изменением внутреннего углового момента среды, позволяет построить представление о разрывах первого рода в жидкости и разрешить парадокс бесконечности как градиентов, так и самих функций, моделирующих течение жидкости.

Возникновение бесконечных градиентов функций и самих функций в невязкой несжимаемой жидкости продемонстрируем на примере стационарных осесимметричных конически-автомодельных течений, основываясь на уравнениях Эйлера непрерывных движений жидкости.

Система уравнений Эйлера, моделирующая течения идеальной несжимаемой жидкости в пространстве включает в себя скалярное уравнение неразрывности и векторное уравнение Эйлера [3]:

(1.1)



Уравнение неразрывности - это дифференциальное следствие уравнения (0.2), выражающего закон сохранения массы в частице жидкости, уравнение Эйлера - это следствие уравнения (0.3), выражающего закон изменения импульса частицы жидкости.

В стационарном варианте (установившиеся течения) все частные производные по времени обнуляются, т.е. . С учётом этого, представим систему уравнений установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости (1.1) в сферической системе координат [3]:



Здесь - соответственно радиальная и нормальная к полярному радиусу в меридиональной плоскости составляющие скорости, - окружная составляющая скорости, которую в осесимметричном случае, рассматриваемом далее, условимся называть кручением.



В осесимметричном течении , и предыдущая система уравнений преобразуется к виду



(1.2)

В сферической системе координат в уравнениях стационарных осесимметричных течений идеальной жидкости (1.2) функции скорости и давления являются функциями двух переменных: полярного радиуса и полярного угла .



Далее в работе будут рассматриваться стационарные осесимметричные конически-автомодельные течения идеальной жидкости, уравнения которых можно получить из системы (1.2) путём подстановки функций скорости и давления, имеющих представление мультипликации пары функций, каждая из которых является функцией одной переменной: полярного радиуса и угла .



Термин «автомодельный» буквально означает «себе подобный». В это понятие вкладывается тот смысл, что распределения величин, зависящих от нескольких переменных, при разных значениях одной из переменных связаны друг с другом некоторым преобразованием масштабов измерения самих величин. Поэтому автомодельными принято называть такие решения, которые получаются применением теории размерностей. Более общий групповой подход показывает, что это не что иное, как инвариантные решения относительно группы растяжений [4].

Коническая автомодельность в данном случае будет означать, что при разных значениях полярного радиуса, тройки функций (три проекции вектора скорости) на любой конической поверхности подобны, т.е. отличаются одна от другой только общим множителем, зависящим от .



Согласно работам [11, 12], посвящённым конически-автомодельным течениям жидкости, их представление таково:



(1.3)

,



где - безразмерный параметр конической автомодельности.

Подстановка этих выражений в систему уравнений (1.2) приводит к стационарным осесимметричным конически-автомодельным уравнениям Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости. Следуя [12], систему автомодельных уравнений запишем в виде

(1.4)



Штрих означает дифференцирование по своему аргументу.

Отыскание автомодельных решений позволяет понизить ранг системы дифференциальных уравнений (1.2) и свести задачу к отысканию решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4). Замечательная особенность представленных в работе конически-автомодельных решений состоит в их независимости от каких бы то ни было масштабов.

Заметим, что из представления (1.3) следует, что в конически-автомодельных течениях с параметром существует особенность в начале координат. Функции скорости и давления обращаются в бесконечность.



В случае указанная особенность отсутствует. Функции скорости и давления стремятся к бесконечности при бесконечном удалении от начала координат.



В случае функции скорости и давления конически-автомодельного течения зависят только от одной угловой координаты и не зависят от расстояния до начала координат. В этом случае отсутствует как особенность в начале координат, так и на бесконечности.



Далее в работе будут подробно исследованы два варианта параметра автомодельности: и . Для этих случаев удалось полностью проинтегрировать систему (1.4) и получить аналитические представления решений. Забегая вперёд, отметим, что в случае  в вихревых конических течениях обнаружено существование конических «фронтов сингулярности» - конических поверхностей разрыва второго рода поля скорости. В случае  конические фронты сингулярности скорости отсутствуют, однако возможны решения, в которых на конической поверхности вихрь обращается в бесконечность. Это означает, что производные скорости терпят разрыв второго рода.



Прежде чем приступить к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4), ещё раз обратимся к интегральному уравнению (0.4)

(0.4)



применительно к стационарным осесимметричным течениям жидкости. Наличие оси симметрии позволяет вывести скалярное следствие этого векторного интегрального уравнения и получить уравнение, выражающее закон сохранения углового момента относительно оси симметрии.

Специфицируем материальный объём, по которому ведётся интегрирование в (0.4) осесимметричным тором (см. рис.2 на стр.42), ось симметрии которого совпадает с осью симметрии потока жидкости, и рассмотрим проекцию полученного уравнения на эту ось. Очевидно, что поверхностный интеграл в правой части полученного скалярного уравнения обратиться в нуль всилу того, что и нормаль к поверхности тора и радиус-вектор лежат в меридиональной плоскости и их векторное произведение имеет только окружную составляющую, проекция которой на ось симметрии равна нулю. Из всех составляющих поля скорости только кручение даёт вклад в объёмный интеграл в левой части уравнения (по той же причине).



Итак, проекция уравнения (0.4) на ось симметрии применительно к материальному тору даёт уравнение:

,



где - проекция удельного внутреннего углового момента жидкости на ось симметрии потока, а первое слагаемое в подынтегральном выражении есть ничто иное, как циркуляция жидкости вокруг оси симметрии .



Это уравнение выполнено для любого осесимметричного материального тора жидкости, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии потока. Устремляя толщину выбираемого тора к нулю (тор стремится к окружности), легко видеть, что в любом осесимметричном течении сумма циркуляции и проекции внутреннего углового момента на ось симметрии есть интеграл движения. Т.е. для любой материальной частицы жидкости, движущейся в осесимметричном течении, сумма является величиной постоянной.



Для стационарного осесимметричного течения жидкости величина будет функцией только линии тока, т.е.



(1.5)



Если «заморозить» фазово-кинематическую степень свободы (), то интеграл движения (1.5) переходит в хорошо известный интеграл циркуляции



,



являющийся следствием уравнений Эйлера (1.2).

Очевидное противоречие интеграла (1.5) и интеграла циркуляции оказывается порождением того обстоятельства, что исходное уравнение импульсов (0.3) (и его следствие - уравнение Эйлера) не учитывает возможности фазового перехода второго рода, происходящего с изменением как внутреннего, так и внешнего углового момента.

Для того чтобы как-то спасти положение и не отказываться от уравнений Эйлера вообще, будем полагать, что если фазовый переход второго рода происходит, то он происходит мгновенно (скачкообразно). Т.е. плотность внутреннего углового момента в частице среды меняется только через разрыв первого рода. Тогда вне поверхности разрыва (поверхности фазового перехода второго рода) и применимы стандартные уравнения Эйлера непрерывного движения жидкости (1.1).



Предположим, что в стационарном осесимметричном течении идеальной несжимаемой жидкости происходит фазовый переход второго рода с изменением . Это означает, что в течении существует некоторая неподвижная осесимметричная поверхность, через которую жидкость течёт, и на которой  имеет разрыв первого рода. Согласно интегралу (1.5) циркуляция так же терпит разрыв первого рода на поверхности рассматриваемого фазового перехода. Разрыв циркуляции означает разрыв кручения .



Забегая вперёд, отметим, что в представленной работе авторам оказывается достаточно рассмотрения возможности разрывов первого рода только кручения, при этом остальные составляющие скорости и давление полагаются непрерывными. Заметим, что непрерывность меридиональных составляющих скорости ещё не означает непрерывности их производных. Более того, оказывается, что на поверхности фазового перехода вихрь, так же как кручение, терпит разрыв первого рода.

Часть вторая.

Конически-автомодельные течения идеальной несжимаемой жидкости. Разрывы второго рода

В предыдущей части представленной работы была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений стационарных осесимметричных конически-автомодельных течений идеальной несжимаемой жидкости (1.4):

(1.4)



(Штрих означает дифференцирование по своему аргументу)

Из первого уравнения этой системы сразу следует выражение

. (2.1)



Заметим, что второе уравнение исходной системы (1.4) можно переписать в виде

. (2.2)



Исключение функции из пары уравнений системы (1.4) приводит к уравнению



, (2.3)



где введено обозначение .



Последнее уравнение исходной системы перепишем как

. (2.4)



С учётом последнего уравнения, уравнение (2.3) можно представить в виде

. (2.5)



Легко видеть, что

,



а из уравнения (2.2) следует

,



поэтому уравнение (2.5) можно переписать как

.



Введём обозначения

,



, (2.6)



.



В новых обозначениях последнее уравнение запишется следующим образом

.



С учётом уравнения (2.1), переписанного в новых обозначениях как

, (2.7)



последнее уравнение представим в виде

. (2.8)



Легко видеть, что уравнение (2.4) в новых обозначениях приобретает вид

, (2.9)



а уравнение (2.2) запишется как

. (2.10)



Из каждого из двух уравнений (2.8) и (2.9) сразу следуют два интеграла:

и , (2.11)



где и - постоянные. Т.о. имеются два инварианта конических течений:



и .



Заметим, что размерность инварианта  совпадает с размерностью , в то время как размерность инварианта  совпадает с размерностью . Очевидно, что из этой пары инвариантов можно составить безразмерный инвариант, например:



или . (2.12)



Заметим, что безразмерный инвариант конических течений (2.12) оказывается инвариантным и по отношению к параметру конической автомодельности .



С учётом безразмерного инварианта, умножение уравнения (2.10) на приводит к уравнению



.



Произведём замену переменной

, (2.13)



тогда последнее уравнение запишется в виде

, (2.14)



где индекс «х» означает дифференцирование по новой переменной.

Уравнение (2.14) будем рассматривать совместно с (2.7) и (2.9), которые, с учётом замены переменной (2.13), перепишутся, соответственно, как

, (2.15)



. (2.16)



Уравнения (2.14) - (2.16) составляют систему уравнений, равносильную исходной автомодельной системе (1.4), в которой введены обозначения (2.6), (2.12), (2.13).

Введём в рассмотрение следующие безразмерные функции:

, ,



тогда систему уравнений (2.14) - (2.16) можно записать через новые функции следующим образом:



Заметим, что если , то оба из уравнений этой системы являются уравнениями типа Риккати [13]. Из теории уравнений Риккати известно, что решения таких уравнений могут обращаться в бесконечность (неограниченно нарастать или убывать) на конечном интервале изменения аргумента.



Далее в представленной работе будут рассмотрены примеры конических течений идеальной несжимаемой жидкости, в которых реализуются разрывы второго рода поля скорости и поля вихря на так называемых конических фронтах сингулярности и оси кручения (оси симметрии).

**Случай .**

Система уравнений (2.14) – (2.16), равносильная исходной системе конически-автомодельных уравнений (1.4), в случае **** расщепляется в пару независимых подсистем. Действительно, из уравнения (2.16) следует, что

. (2.17)



Выписанное уравнение полностью определяет кручение конически- автомодельного потока.

Оставшиеся уравнения (2.14), (2.15) с учётом определения безразмерного инварианта (2.12) запишутся как



Общее решение этой системы уравнений представим в виде

(2.18)



где - это некоторые постоянные, причём .



Имея выражения для компонентов поля скорости, из последнего определения (2.6), последнего интеграла (2.11) получим выражение для функции :



(2.19)



Очевидно, что функции решения (2.18), представляющие меридиональную проекцию целостного конического (конически-автомодельного) течения с кручением в случае ****, ни как не связаны с функцией, представляющей кручение. Т.о. представление целостного трёхмерного конического течения расщепляется в пару независимых представлений: кручение и меридиональное двумерное коническое течение.

На основании решения (2.18) рассмотрим пример , . Если положить , то существует такая коническая поверхность , при приближении к которой функция неограниченно нарастает. Эта коническая поверхность оказывается поверхностью разрыва второго рода поля радиальной (линейной) составляющей скорости. Такого рода поверхности условимся называть «фронтами сингулярности».



Выпишем выражение для поля вихря конических течений:



(2.20)

(штрих, по-прежнему, означает дифференцирование по аргументу ).

В случае только одна окружная компонента поля вихря может быть отличной от нуля. Из выражения (2.20) и решения (2.18) следует, что она равна .



Если постоянная равна нулю, то течение потенциально и функция  имеет постоянное значение. Т.о. в потенциальных конических течениях фронтов сингулярности быть не может.



В конических течениях с параметром автомодельности большем нуля изначально существует особенность полей скорости и давления в начале координат. С этой особенностью связано и сингулярное поведение функции скорости на коническом фронте.

Рассмотрим конические течения, в которых указанная особенность в начале координат отсутствует, например, течение с . В этом случае поля скорости и давления оказываются функциями только одной угловой координаты.



**Случай .**



Из (2.11) следует, что

, (2.21)



.



Кроме того, уравнения (2.15), (2.14) с учётом (2.21) можно записать следующим образом:

,



,



где двойной индекс «хх» означает вторую производную по переменной .



Общее решение последнего уравнения представим в виде

, (2.22)



где - это некоторые постоянные, причём .



Далее имеем следующие представления:

, (2.23)



. (2.24)



Как следует из решения (2.22) - (2.24), в конических течениях с параметром автомодельности , в отличие от течений с параметром , конических разрывов второго рода поля скорости быть не может. Поле скорости непрерывно всюду, за исключением, может быть, оси .



Однако в таких течениях на конических поверхностях может реализовываться разрыв второго рода поля вихря. Покажем это.

С использованием выражения поля вихря конических течений (2.20) легко показать, что такие течения оказываются соленоидальными течениями, причём функция подобия вихревого и скоростного полей соленоидального течения, определяемая соотношением



, (2.25)



запишется в виде

. (2.26)



Из решения (2.22) - (2.24) и представления (2.26) становится очевидным, что коническая поверхность, на которой реализуется условие непротекания (), может оказаться фронтом сингулярности для продольной составляющей поля вихря точно так же, как в течениях с подобная коническая поверхность оказывалась фронтом сингулярности для радиальной составляющей поля скорости.



Из того же представления (2.25) и (2.26) очевидно, что при отсутствии кручения () течение потенциально и конического фронта сингулярности производных не существует.



Часть третья.

Катастрофы в жидкости. Разрывы первого рода кручения.

**Случай .**



Явление бесконечного вихря в коническом течении с нулевым параметром автомодельности, описанное в предыдущей части представленной работы, естественно было бы назвать «градиентной катастрофой» по аналогии с названием подобного явления в сверхзвуковом течении невязкого нетеплопроводного газа.

Напомним, что в простых волнах сжатия в газе градиентная катастрофа неизбежна [4]. При этом полагается, что в действительности бесконечных градиентов не образуется, а образуется течение с сильными разрывами (ударными волнами).

По аналогии с этим будем полагать, что в окрестности конического фронта сингулярности вихря () на некоторой конической поверхности в жидкости реализуется сильный разрыв. Возможность сильного неконтактного разрыва в жидкости показана в первой части работы. Напомним, что эта возможность вытекает из возможности фазового перехода второго рода и связана с разрывом первого рода параметра порядка - внутреннего углового момента. Как следует из полученного уравнения (1.5), изменение параметра порядка связано с изменением циркуляции. Поэтому фазовый переход второго рода, описываемый разрывом параметра порядка, связан с разрывом кручения.



Покажем, что возможности разрыва кручения оказывается вполне достаточно для избежания явления градиентной катастрофы в жидкости. При этом остальные (меридиональные) проекции поля скорости и поле давления остаются непрерывными.

Предположим, что в вихревом коническом течении с нулевым параметром автомодельности, при протекании жидкости через поверхность в направлении  происходит фазовый переход второго рода, сопряжённый с разрывом кручения, и кручение прекращается. Если кручение отсутствует (), то течение потенциально и градиентной катастрофы более возникнуть не может.



При разрыве кручения функции и , представляющие меридиональные проекции скорости, могут оставаться непрерывными на поверхности фазового перехода . Покажем это.



Условия непрерывности функций  и  согласно (2.22), (2.23) выразятся в уравнениях:

, (3.1)



,



где квадратные скобки обозначают «скачок» значений коэффициентов на поверхности фазового перехода, т.е. разность значений после и до поверхности разрыва.

Обнуление коэффициента после поверхности разрыва означает определённость скачка . При заданной правой части пара уравнений (3.1) оказывается системой линейных уравнений относительно неизвестных скачков остальных двух коэффициентов , определяющих коническое течение. Линейная система (3.1) всегда имеет единственное решение, т.к. определитель этой системы не равен нулю (точнее, определитель равен единице).



Существование решения системы (3.1) означает, что функции и одновременно могут оставаться непрерывными на поверхности разрыва кручения (поверхности фазового перехода второго рода).



Что касается непрерывности функции давления, то, как следует из последнего определения (2.6) и первого выражения (2.21)

.



Из последнего уравнения очевидно, что при непрерывности меридиональных составляющих скорости, необходимое условие непрерывности давления на поверхности запишется как



,



из которого следует, что коэффициент терпит разрыв на поверхности фазового перехода.



Итак, меридиональные проекции скорости и давление остаются непрерывными на поверхности фазового перехода второго рода, в то время как кручение, вихрь и внутренний угловой момент имеют разрыв первого рода. Существование фазового перехода предотвращает наступление градиентной катастрофы.

**Случай .**

Наличие конического фронта сингулярности  в течении с единичным параметром автомодельности означает, что исходное течение вихревое (). Предположение о том, что в окрестности существует коническая поверхность фазового перехода второго рода  означает, что при переходе через  в направлении к фронту  коэффициенты, определяющие решение (2.18) испытывают скачок (разрыв первого рода). Причём становится равным нулю, течение становится потенциальным и сингулярности не возникает.



Покажем, что при таком изменении коэффициентов функции и могут оставаться непрерывными. Для этого используем графический метод.



В исходном вихревом решении представляет из себя параболу с ветвями, направленными вниз (см. рис.3 на стр.42). Пересечение одной из ветвей с осью 0x даёт точку .



Функция исходного решения представлена на рис.4 (для определённости функцию выбрали положительной). Производная функции в точке  обращается в бесконечность, отсюда следует сингулярность радиальной составляющей скорости.



Выберем точку вблизи точки  (см. рисунки). Обнуление коэффициента  после означает, что дискриминант квадратного трёхчлена, представляющего функцию  становится равным нулю. Это, в свою очередь означает, что графиком функции  после  становится прямая линия. Для обеспечения непрерывности функций  и  в  потребуем, чтобы эта прямая касалась исходного графика в точке . Заметим, что образом этой касательной на плоскости () оказывается парабола с ветвями, направленными вверх, причём эта парабола касается как исходной параболы (в т. ), так и оси 0x в некоторой точке, лежащей за т. (см. рис.3).



Итак, непрерывность меридиональных составляющих скорости обеспечена. Найдём условие непрерывности давления. Согласно выражению (2.19), условие непрерывности функции  на поверхности фазового перехода совместно с условиями непрерывности меридиональных составляющих скорости приводит к уравнению

, (3.2)

которое означает разрыв кручения на поверхности фазового перехода.

Заметим, что коэффициент исходного вихревого решения отрицательный (парабола с ветвями, направленными вниз), а коэффициент  присоединённого потенциального течения положительный (парабола с ветвями, направленными вверх), поэтому скачок коэффициента  положителен. Из положительности этого скачка и уравнения (3.2) следует, что скачок функции отрицателен и кручение (по абсолютному значению) всегда меньше в присоединённом потенциальном течении, чем в исходном вихревом.



Если , т.е. конический фронт сингулярности вырождается в полупрямую на оси симметрии течения (оси кручения), то для предотвращения сингулярности на оси кроме обеспечения потенциальности течения в окрестности , необходимо обеспечить обнуление кручения (). В противном случае согласно решению (2.17) на оси должно возникнуть бесконечное кручение.



Часть четвёртая.

Объёмный фазовый переход в окрестности оси кручения.

Непрерывность меридиональных составляющих скорости и давления, согласно основополагающему уравнению (0.4), означает неизменность поперечной (по отношению к оси кручения) составляющей внутреннего углового момента жидкости . Т.о. изменяется только продольная составляющая , а именно, . И это изменение связано с изменением циркуляции согласно уравнению (1.5).



Неизменность (отсутствие) поперечной составляющей внутреннего углового момента с очевидностью означает состоятельность меридиональных проекций уравнения (0.3), выражающего закон изменения импульса в предположении отсутствия фазового перехода. Следствием этого оказывается состоятельность меридиональных проекций уравнения Эйлера (второе и третье уравнения системы (1.2)). Что касается поперечной проекции уравнения Эйлера (последнее уравнение системы (1.2)), то это уравнение оказывается состоятельным только в предположении отсутствия фазового перехода второго рода. Следствием этого предположения оказывается хорошо известный интеграл циркуляции.

В случае объёмного фазового перехода второго рода, происходящего с непрерывным изменением продольной составляющей внутреннего углового момента (поперечная составляющая отсутствует), необходимо воспользоваться расширением интеграла циркуляции, а именно интегралом (1.5). Т.о. система уравнений, описывающая стационарные осесимметричные течения идеальной несжимаемой жидкости с объёмным фазовым переходом второго рода запишется следующим образом:



(4.1)

Для конически-автомодельных течений из (4.1) следует система уравнений, аналогичная системе (1.4), из которой исключено последнее уравнение:

(4.2)



При приближении жидкости к оси симметрии всё кручение (вся циркуляция) сбрасывается во внутренний угловой момент жидкости согласно уравнению (1.5). Т.о. фазово-кинематическая степень свободы внутреннего углового момента позволяет разрешить парадокс бесконечного кручения на оси.

Отметим ещё, что как решения уравнений Эйлера идеальной (невязкой) жидкости содержат решения с бесконечным кручением на оси симметрии, так и решения уравнений Навье - Стокса, моделирующих течения реальной (вязкой) жидкости содержат подобные решения.

Действительно, в [14] была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая редуцирована из исходной системы уравнений Навье - Стокса



записанной в сферической системе координат () для стационарных осесимметричных конически-автомодельных течений с кручением несжимаемой жидкости. Выпишем эту систему



(4.3)

Здесь , - кинематическая вязкость (постоянная). Заметим, что параметр конической автомодельности .



Очевидно, что одно из решений последнего уравнения относительно функции кручения

(4.4)

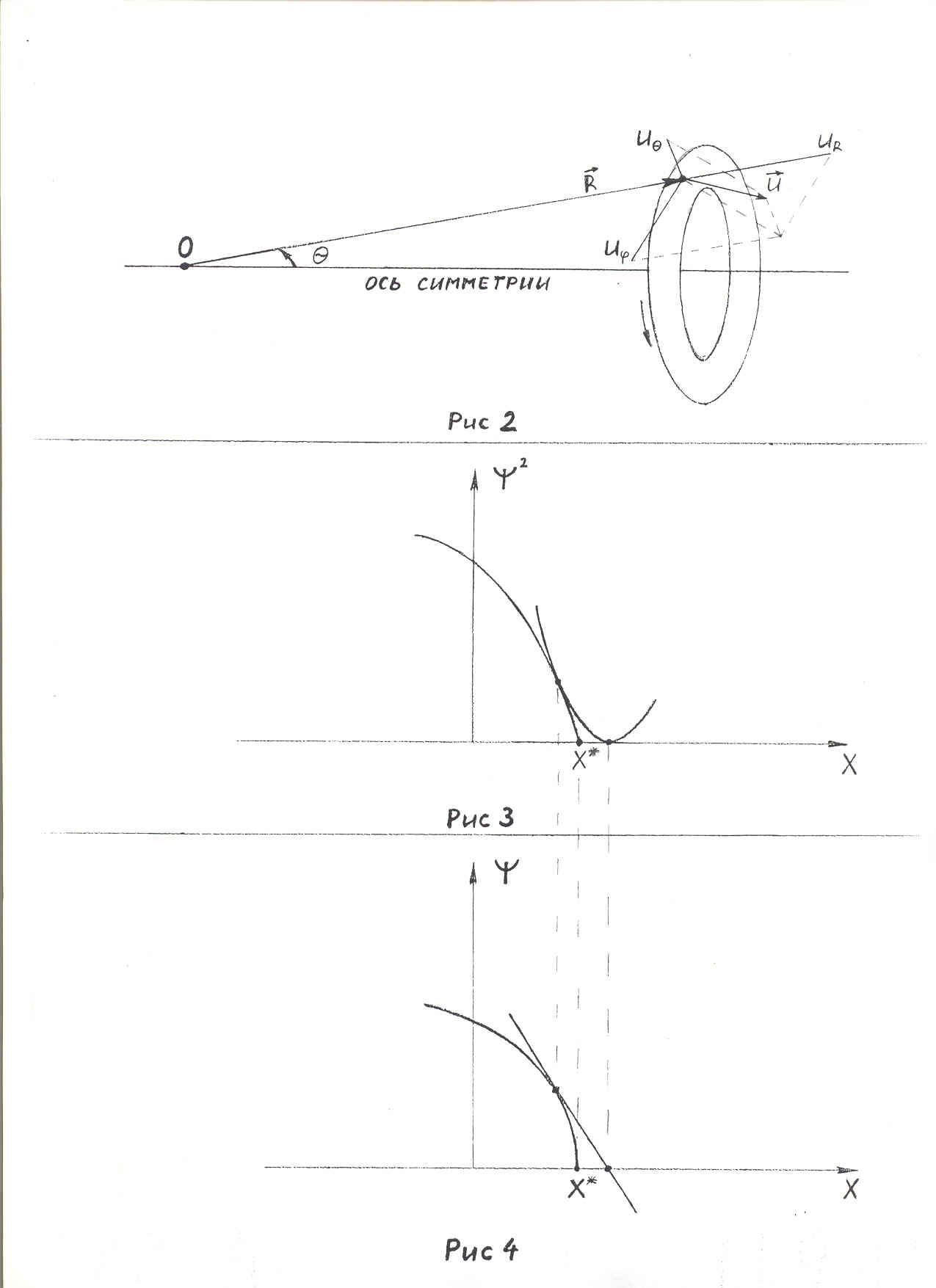


и совпадает с решением, полученным для конических течений идеальной жидкости в случае  (см. (2.17)). Боле того, с кручением (4.4) система (4.3) расщепляется в пару независимых систем подобно тому, как это было продемонстрировано для идеальной жидкости. Для этого достаточно исключить функцию  из пары уравнений системы (4.3), как будет получена система из пары уравнений относительно меридиональных проекций скорости с исключённым кручением.

Решение (4.4) соответствует течению с всюду постоянной циркуляцией (). Такие течения имеют сингулярное кручение на оси. Всилу указанного подобия, представленные решения уравнений Эйлера и уравнений Навье - Стокса в окрестности оси кручения можно назвать «сингулярно-подобными».

Уравнения течений с кручением сжимаемого газа (как невязкого, так и вязкого) так же имеют решения, «сингулярно-подобные» решениям уравнений Эйлера (1.1). Эти решения соответствуют течениям с всюду постоянной циркуляцией [2].

В заключение авторы выражают признательность Ковалёву А.А., который оказал существенную финансовую поддержку авторам при выполнении представленной работы.



**Список используемой литературы**

1. Быркин А.П., Васильев С.В., Щенников В.В., Двойственность функциональных представлений в конических течениях с кручением (случай идеальной несжимаемой жидкости), препринт ИАП РАН (Москва, 2003).
2. Ершков С.В., Щенников В.В., Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, №7.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В., Теоретическая гидромеханика. - М.: Физматгиз. - 1963.
4. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, - М.: Наука, 1981.
5. Можен Ж., Механика электромагнитных сплошных сред, - М.: Мир, 1991.
6. G.J. Ranque, Method and apparatus for obtaining from a fluid under pressure two currents of fluids at different temperatures, - United States Patent Office (1,952,281), Mar. 27, 1934.
7. R. Hilsch, The use of the expansion of gases in centrifugal field as cooling process, The review of scientific instruments, V.18, № 2, February, 1947.
8. C. Fulton, Ranque’s tube, Refrigerating Engineering, № 5, 1950.
9. W. George, Jr. Scheper, The vortex tube – internal flow data and a heat transfer theory. Refrigerating Engineering, October, 1951.
10. Алексеев В.П., Мартыновский В.С., Эффект вихревого температурного разделения перегретых паров и опытная проверка гипотезы Хилша – Фультона, Известия Академии Наук СССР, №1, 1956.
11. R. Fernandez – Feria, J. Fernandez de la Mora, M. Perez – Saborid and A. Barrero, Conically similar swirling flows at high Reynolds numbers, Q. J I Mech. appl. Math. (1999) 52 (1), 1 – 53.
12. Быркин А.П., Щенников В.В., О конически подобных течениях жидкости и газа, Часть I «Несжимаемая жидкость», Учёные записки ЦАГИ (2002) 33 (1-2).
13. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (пер. с нем). - М.: Наука. - 1971.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред, - М.- Л.: Гостехтеориздат, 1944.