Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Уральский государственный педагогический университет»

Математический факультет

Кафедра геометрии

# **ГЕОМЕТРИЯ**

**Методические рекомендации**

**для студентов III курса**

**математического факультета**

**Часть 2**

##### Екатеринбург 2008

**Составитель**: Толстопятов В.П., к. ф.-м. н., доцент кафедры геометрии

**Геометрия.** Методические рекомендации для студентов III курса математического факультета. Часть 2 / Урал. гос. пед. ун-т: Сост. В.П. Толстопятов. Екатеринбург, 2008. 21 с.

Данное пособие является составной частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Геометрия». Оно призвано оказать помощь студентам в самостоятельной работе по изучению теоретического материала, выполнению индивидуальных заданий. В него включены: программа курса, тематические планы лекций и практических занятий, материалы для практических занятий, домашних заданий и контрольных работ, а также вопросы к экзамену.

**Содержание**

1. Программа курса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .4
2. Лекции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .6
3. Практические занятия . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
4. Материалы для практических занятий и домаш-  
   них работ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
5. Вариант тестового задания для контроля оста-

точных знаний . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .14

1. Вопросы к экзамену . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .16
2. Литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

**1. Программа курса**

*Аксиоматический метод*

Аксиоматический метод в “Началах” Евклида, его характерные черты: выделение исходных понятий и аксиом, логическое построение теории, вспомогательная роль чертежей. Слабости “наивного” аксиоматического метода: попытки определения основных понятий, расчленение аксиоматики на аксиомы и постулаты; неполнота аксиоматики, вынуждающая апеллировать к “очевидности”, игнорирование проблемы непротиворечивости. История пятого постулата Евклида, доказательства равносильных ему утверждений о сумме углов треугольника, о единственности параллельной прямой. Теоремы Лежандра-Саккери (из абсолютной геометрии) о сумме углов треугольников.

Понятие математической структуры и модели, сигнатура и род, теория данного рода, примеры. Изоморфизм моделей и категоричность теории. Непротиворечивость теории и способ ее доказательства с помощью построения модели. Схема доказательства непротиворечивости числовых систем и действительных векторных пространств, геометрии в аксиоматике Г. Вейля. Понятие независимости аксиомы, примеры из алгебры и геометрии. Эквивалентность теорий.

*Построение школьного курса геометрии*

Аксиоматика планиметрии по Гильберту. Аксиомы соединения, их следствия и конечная модель. Аксиомы порядка и конгруэнтности, их следствия и арифметические (рациональная и действительная) модели. Аксиомы Архимеда, Кантора и Дедекинда, их следствия. Абсолютная геометрия, ее декартова модель.

Эквивалентность аксиоматик Гильберта и Г. Вейля. Аксиоматика учебника Л.С. Атанасяна и др. Аксиоматика А.В. Погорелова. \* Аксиоматика А.Н. Колмогорова. \* Аксиоматика А. Д. Александрова.

*Геометрия Н.И. Лобачевского*

Аксиоматика гиперболической планиметрии, ее непротиворечивость (модель Кэли-Клейна).

Треугольники, четыре признака конгруэнтности. Четырехугольники. Четырехугольник Хайама-Саккери.

Параллельность, ее симметричность и транзитивность. Ось симметрии полосы. Секущая равного наклона. Расходящиеся прямые, их общий перпендикуляр. Поведение расстояния от точки, бегущей по прямой, до прямой, параллельной или расходящейся с данной прямой.

Угол параллельности, функция Лобачевского. Перпендикуляр к стороне угла. Существование абсолютной единицы длины.

Эквидистанта, ее нелинейность, симметричность и касательные. Орициклы, их конгруэнтность, пересечение с прямыми. Орисфера, модель евклидовой геометрии на ней.

Измерение расстояний и углов на карте Кэли-Клейна. Формула Лобачевского для угла параллельности.

*Сферическая геометрия*

«Прямые» на сфере, сферические углы и движения. Сферические двуугольники, их углы и площади. Сферический треугольник, сумма его углов. Полярность сферических треугольников. Теоремы синусов и косинусов. Эллиптическая геометрия Римана и ее связь с действительной проективной планиметрией.

2. Лекции

1. Понятие математической структуры. Основные свойства системы аксиом.
2. Понятие математической структуры. Основные свойства системы аксиом.
3. Основные математические структуры курса геометрии.
4. Основные этапы истории развития геометрии.
5. Обзор системы аксиом Гильберта евклидовой плоскости.
6. Обзор системы аксиом Гильберта евклидовой плоскости.
7. Обзор аксиоматики  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка.
8. Обзор аксиоматики  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка.
9. Исследование аксиоматики  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка.
10. Исследование аксиоматики  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка. Независимость аксиомы параллельных.
11. Треугольники и четырехугольники в плоскости Лобачевского.
12. Параллельность прямых на плоскости Лобачевского.
13. Окружности, эквидистанты, орициклы.
14. Различные определения длины отрезка. Понятие площади плоской фигуры. Равновеликость и равносоставленность многоугольных фигур.
15. Понятие объема. Равновеликость и равносоставленность многогранных тел. Величина и ее измерение.

##### 3. Практические занятия

1. Общие вопросы аксиоматики. Проверка требований, предъявляемых к аксиомам.
2. Общие вопросы аксиоматики. Проверка требований, предъявляемых к аксиомам.
3. Аксиоматика Вейля евклидовой плоскости.
4. Контроль остаточных знаний.
5. Предложения, эквивалентные V постулату Евклида относительно системы аксиом Гильберта абсолютной геометрии.
6. Предложения, эквивалентные V постулату Евклида относительно системы аксиом Гильберта абсолютной геометрии.
7. Различные варианты обоснования школьного курса геометрии.
8. Различные варианты обоснования школьного курса геометрии.
9. Интерпретация Пуанкаре плоскости Лобачевского.
10. Элементы геометрии Лобачевского.
11. Геометрии Кэли-Клейна на плоскости.
12. Геометрии Кэли-Клейна на плоскости.
13. Геометрии Кэли-Клейна на плоскости.

**4. Материалы для практических занятий,**

**домашних заданий и контрольных работ**

**Занятие 1-2.** Общие вопросы аксиоматики. Проверка требований, предъявляемых к аксиомам.

Вопросы для обсуждения:

1. Сущность аксиоматического построения геометрии. Определение математической структуры.
2. Основные требования, предъявляемые к системе аксиом, методы проверки выполнения этих требований**.**

Задачи

1. Задана структура рода группы:

База: символ , обозначающий непустое множество.

Отношения:  – тернарное отношение, определяющее отображение . Если , то будем записывать .

Аксиомы:

.

.

.

Доказать: а) аксиома  не зависит от аксиом  и ;

б) аксиома , – не зависит от аксиом  – .

1. Задана структура конечной проективной плоскости порядка :

База: символы , обозначающие непустые множества, элементы которых будем называть соответственно точками и прямыми.

Отношения:  – отношение принадлежности. Если , то будем говорить, что точка  лежит на прямой , или прямая  проходит через точку , и записывать .

Аксиомы:

 Для любых двух различных точек существует единственная прямая, проходящая через эти точки.

 Для любых двух различных прямых существует единственная общая точка.

 Существуют хотя бы четыре различные точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

 Каждой прямой принадлежит точно  точек, где  и  – некоторое натуральное число.

1. Проверить, что конфигурация Фано является моделью конечной проективной плоскости порядка 2.

, ,

; ; ;

; ; ;

.

1. Доказать независимость аксиом  от остальных аксиом конечной проективной плоскости.
2. Определен род структур:

База: символы , обозначающие непустые множества, элементы которых будем называть соответственно точками и прямыми.

Отношения:  – отношение принадлежности.

Аксиомы:

 Каждая прямая есть множество точек.

 Для любых двух различных точек существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.

 На каждой прямой лежит, по крайней мере, две точки.

 Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

 Для любой прямой  и любой точки , не лежащей на этой прямой, существует прямая, проходящая через точку  и не пересекающая прямую .

 Для любой прямой  и любой точки , не лежащей на этой прямой, существует не более одной прямой, проходящей через точку , и не пересекающей прямую .

1. Выяснить, какие из аксиом  –  выполняются в следующей модели:

, , , , .

1. Выяснить, какие из аксиом  –  выполняются в следующей модели:

, , , .

1. Доказать непротиворечивость системы аксиом  – .
2. Выяснить вопрос о независимости аксиом системы  – .
3. Определен род структур:

База: символы , обозначающие непустые множества, элементы которых будем называть соответственно точками и прямыми.

Отношения:  – отношение принадлежности.

Аксиомы:

 На каждой прямой лежит, по крайней мере, две точки.

 Для любых двух различных точек существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.

 Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

1. Доказать непротиворечивость системы аксиом  – .
2. Доказать независимость аксиом , ,  от остальных аксиом системы.

**Занятие 3.** Аксиоматика Вейля евклидовой плоскости.

1. Определить структуру евклидовой плоскости в схеме Вейля.
2. Доказать непротиворечивость аксиоматики Вейля евклидовой плоскости.
3. Определить в схеме Вейля прямую, отрезок, луч, полуплоскость, параллельные и перпендикулярные прямые, параллелограмм, окружность, круг.
4. Доказать, что существуют три точки, не лежащие на одной прямой.
5. Доказать, что существуют пары прямых, проходящих через общую точку.
6. Доказать теорему косинусов.
7. Доказать теорему о средней линии треугольника.
8. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
9. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

**Занятие 4.** Контроль остаточных знаний.

**Занятие 5-6.** Предложения, эквивалентные V постулату Евклида относительно аксиом Гильберта абсолютной геометрии.

На занятии обсуждаются доклады студентов с доказательствами эквивалентности относительно системы аксиом Гильберта абсолютной геометрии V постулата Евклида и каждого из следующих предложений [11], [15]:

1. Две прямые, не пересекающиеся между собой, образуют с любой третьей секущей их прямой равные соответственные углы.
2. Предложение Плейфера: Через точку, не лежащую на прямой, проходит не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.
3. Предложение Лежандра: Перпендикуляр и наклонная к прямой всегда пересекаются.
4. Предложение Вольфганга Бойяи: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.
5. Сумма углов всякого треугольника равна двум прямым углам.
6. Предложение Посидония: В плоскости существуют, по меньшей мере, три точки, равноотстоящие от данной прямой и лежащие на одной прямой.
7. Предложение Валлиса: В плоскости существует хотя бы одна пара неравных, подобных треугольников.
8. Предложение Насир-Эддина: Если в простом четырехугольнике  углы при основании  прямые, а угол при вершине  острый, то .
9. Предложение Лежандра: Через всякую внутреннюю точку угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

**Занятие 7-8.** Различные варианты обоснования школьного курса геометрии.

Обсуждение докладов студентов с обзором аксиоматик А.Н. Колмогорова, А.В. Погорелова, А.Д. Александрова школьного курса геометрии [1], [3], [4], [5], [7], [14], [16], [17].

**Занятие 9.** Интерпретация Пуанкаре плоскости Лобачевского [11], [15], [18].

Доклады студентов.

**Занятие 10.** Элементы геометрии Лобачевского.

Доклады студентов с доказательствами следующих утверждений на плоскости Лобачевского:

1. Вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, острый.
2. Вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, не равны.
3. Длина отрезка, соединяющего середины двух сторон треугольника, больше половины длины третьей стороны.
4. В прямоугольном треугольнике величина хотя бы одного из острых углов меньше, чем .
5. В прямоугольном треугольнике с острым углом , катет, лежащий против этого угла, больше половины гипотенузы.

**Занятие 11-13.** Геометрии Кэли-Клейна на плоскости.

Обсуждение докладов студентов по следующим темам:

1. Схема Кэли и Клейна мероопределения расстояний на прямой и углов в пучке прямых. Девять геометрий Кэли-Клейна на плоскости [12], [19].
2. Модель, свойства параллельных прямых, метрические соотношения между элементами треугольника, формулы движений, циклы в каждой из следующих геометрий на плоскости:

1) евклидова геометрия; 2) геометрия Галилея; 3) псевдоевклидова геометрия Минковского; 4) эллиптическая геометрия Римана; 5) гиперболическая геометрия Лобачевского; 6) дважды гиперболическая геометрия Лобачевского; 7) антиевклидова геометрия; 8) антипсевдоевклидова геометрия; 9) антигиперболическая геометрия.

**5. Вариант тестового задания**

**для контроля остаточных знаний**

1. Векторная функция  является гладкой

а) при всех действительных ;

б) при всех действительных , ;

в) при всех действительных ;

г) при всех действительных ;

д) при всех действительных .

1. Движение плоскости, отличное от тождественного, имеющее прямую неподвижных точек, является

а) поворотом; б) параллельным переносом;

в) гомотетией; г) осевой симметрией;

д) скользящей симметрией.

1. Уравнение  определяет на плоскости относительно прямоугольной системы координат

а) эллипс; б) гиперболу; в) параболу; г) мнимый эллипс; д) пару мнимых параллельных прямых.

1. Векторы  определяют репер Френе в точке  гладкой кривой. Бинормаль к кривой в точке  задается уравнением

а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) .

1. Проективная прямая, проходящая через точки  и , задается уравнением

а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) .

1. Найти проекцию точки  на прямую .
2. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности  в точке .
3. Найти уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равно 8, а эксцентриситет равен .
4. Найти длину вектора , если .
5. Определить вид множества всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до точки  в два раза больше расстояния до точки .
6. **Вопросы к экзамену**
7. Род структур. Поле действительных чисел, евклидово n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, аффинное n-мерное пространство, евклидово n-мерное точечное пространство, проективное n-мерное пространство, метрическое пространство, топологическое пространство как примеры родов структур.
8. Теория рода структур. Примеры эквивалентных систем аксиом.
9. Модель системы аксиом. Изоморфизм моделей системы аксиом. Примеры моделей систем аксиом поля действительных чисел, евклидова n-мерного векторного пространства над полем действительных чисел, аффинного n-мерного пространства, евклидова n-мерного точечного пространства, проективного n-мерного пространства, метрического пространства, топологического пространства.
10. Непротиворечивость, минимальность и полнота системы аксиом.
11. Основные этапы истории развития геометрии.
12. «Начала» Евклида, их историческое значение, недостатки.
13. Эквивалентность предложений относительно системы аксиом. Эквиваленты пятого постулата Евклида, доказательство одного из них.
14. Обзор системы аксиом Гильберта евклидовой геометрии.
15. Обзор аксиоматики  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка.
16. Абсолютная геометрия, ее основное содержание.
17. Независимость аксиомы параллельных от остальных аксиом системы  евклидовой плоскости в учебном пособии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.П. Позняка. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.
18. Независимость аксиомы параллельных от аксиом абсолютной геометрии. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.
19. Треугольники и четырехугольники в плоскости Лобачевского.
20. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского. Определение параллельных прямых, признак параллельности прямых, теорема существования параллельных прямых.
21. Свойства параллельных прямых в плоскости Лобачевского. Функция Лобачевского.
22. Пучки прямых на плоскости Лобачевского. Окружность, эквидистанта, орицикл как траектории пучков прямых.
23. Различные определения длины отрезка. Теорема существования и единственности измерения отрезков при заданной единице измерения.
24. Измерение площадей плоских фигур. Равновеликость и равносоставленность многоугольников.
25. Измерение объемов фигур.
26. Понятие системы положительных скалярных величин.

**7. Литература**

1. Абрамов, А.М. Логические основы курса планиметрии [Текст] / А.М. Абрамов // Математика в школе. – 1974. – №5. – С. 51-62.
2. Александров, А.Д. Геометрия [Текст] / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
3. Александров, А.Д. О строгости изложения в учебном пособии А.В. Погорелова [Текст] / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1985. – №5. – С. 64-68.
4. Александров, А.Д. Основания геометрии [Текст] / А.Д. Александров. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
5. Александров А.Д. Геометрия 8-9 [Текст] / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1995. – 415 с.
6. Атанасян, Л.С. Основания школьного курса планиметрии [Текст] / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1987. – 351 с.
7. Атанасян, Л.С. Геометрия [Текст]: Учеб. пособие, Ч.2 / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1987. – 351 с.
8. Базылев, В.Т. Геометрия [Текст]: Учеб. пособие, Ч. 2 / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев. – М.: Просвещение, 1975. – 367 с.
9. Бахвалов, С.В. Основания геометрии [Текст] / С.В. Бахвалов, В.П. Иваницкая. – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.
10. Болтянский, В.Г. Элементарная геометрия [Текст] / В.Г. Болтянский. – М.: Просвещение, 1985. – 320 с.
11. Ефимов, Н.Е. Высшая геометрия [Текст] / Н.Е. Ефимов. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
12. Каган, В.Ф. Основания геометрии. Ч. 2 [Текст] / В.Ф. Каган. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 344 с.
13. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия [Текст] / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
14. Колмогоров, А.Н. О пробном учебнике геометрии для VI класса [Текст] / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович // Математика в школе. – 1970. – №4. – С. 21-35.
15. Костин, В.И. Основания геометрии [Текст] / В.И. Костин. – М.: Учпедгиз, 1946. – 302 с.
16. Погорелов, А.В. Геометрия 7-9 [Текст] / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2001. – 224 с.
17. Погорелов, А.В. Основания геометрии [Текст] / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1979. – 151 с.
18. Широков, П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского [Текст] / П.А. Широков. – М.: Наука, 1983. – 77 с.
19. Яглом, И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия [Текст] / И.М. Яглом. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 303 с.

Учебно-методическое издание

Геометрия. Методические рекомендации для студентов III курса математического факультета. Часть 2

Составители:

Толстопятов В. П., к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры геометрии

Подписано в печать Формат 60х84/16

Бумага для множительных аппаратов. Усл. печ. л. 1,5

Тираж 100 экз. Заказ

Уральский государственный педагогический университет

620017 Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26