Чувашский республиканский институт образования

Курсовая работа

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ**

**ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Выполнила Яковлева Л. В.

учитель математики МОУ «СОШ №37

с углубленным изучением отдельных предметов»

Научный руководитель –

методист кафедры ЕНД, Хрисанова З. И.

Чебоксары – 2008

**Содержание**

Введение……………………………………………………………………………..........................3

§1.Место тригонометрии в школьном курсе геометрии……………………………………...4

§2. Анализ условия задачи.…………………………………………………………………......5

§3. Сущность и структура решения задач…………………………………………………......8

§4. Поиск плана решения задачи……………………………………………………………...10

§5. Классификация планиметрических задач с использованием тригонометрии………………………………………………………………………………………………......11

5.1. Решение задач методом площадей……………………………………………….….11

5.2. Решение задач на применение определения синуса и косинуса угла…………………………………………………………………………………………....16

5.3. Решение задач на применение определения тангенса и котангенса угла…………………………………………………………………………………………....19

5.4. Решение задач на применение теорем синуса и косинуса………………………....22

5.5. Решение задач с применением тождественных преобразований……………….....27

5.6. Решение практических задач с использованием тригонометрии……………….…29

Заключение……………………………………………………………………………………...….32

Список использованной литературы……………………………………………………………..33

**Введение**

Выбор темы «Использование тригонометрии при решении планиметрических задач» не случаен: несмотря на то, что она начинает изучаться в курсе геометрии, в курсе алгебры, подчас все вопросы приходится рассматривать «с нуля». А ведь тригонометрический материал весьма интересен и специфичен, так как находится на стыке геометрии и алгебры. В настоящее время эта тема актуальна как никогда, поскольку ЕГЭ прочно вошел в систему оценки знаний учащихся. В нем часто встречаются задачи с использованием тригонометрии, и как показали результаты его проведения, ученики очень плохо усваивают тригонометрический материал.

Тригонометрические функции играют важную роль в математике и ее приложениях. Они удобны для описания связи между сторонами и углами треугольников. Использование тригонометрии способствует утверждению взгляда на понятие функции, как на важнейшее понятие математики, связывая тем самым курс алгебры и геометрии. Велико значение тригонометрических функций в формировании диалектического мировоззрения: они, и через их посредство, многие геометрический факты находят применение в непосредственно практической деятельности, в частности, при проведении различных измерительных работ на местности, являются моделью многих периодических процессов (биение сердца, зависимость напряжения в металле от нагрузки на него и т.д.).

**§1. Место тригонометрии в школьном курсе геометрии**

Сейчас реформируется система образования вообще и математическое образование в частности. Задача школы заключается в формировании у учащихся общекультурных знаний и навыков. А такой подход к среднему образованию неизбежно приведет к перестройке изучения некоторых вопросов и разделов школьной математики. Ведь по окончании школы молодой человек не обязан помнить некоторые формулы и даже целые темы, но у него должно быть представление об основных математических разделах, он должен понимать вклад каждой темы в формирование научных представлений о мире, понимать общекультурную ценность этого материала, его практическое применение, место в структуре всей математики и значение в структурах других наук.

Опыт работы в школе показал, что тригонометрический материал, излагаемый в курсе геометрии по учебникам [1 и 2], оказывает недостаточное влияние на изучение тригонометрии в курсе алгебры, хотя пропедевтическая роль тригонометрического материала, изложенного в курсе геометрии, огромна: от его введения в курсе геометрии будет зависеть, насколько успешным будет изучение тригонометрии в курсе алгебры. Надо прийти к пониманию того, что тригонометрия в геометрии и тригонометрия в алгебре не являются никак не связанными отдельными дисциплинами, это – единый блок, изучение которого невозможно без получения первоначальных сведений о тригонометрии в курсе геометрии.

К тому же в результате начавшейся реформы тригонометрический материал, который ранее изучался в курсе IX класса, был перенесен в X класс. Поэтому на сегодняшний день те учащиеся, которые не пожелали учиться в старшей школе, знакомятся с этой темой только в курсе геометрии.

Это налагает еще большую ответственность на изучение первоначальных тригонометрических сведений в курсе геометрии.

Изучение тригонометрии должно осуществляться таким образом, чтобы у учащихся создалось целостное представление об этой теме. Тригонометрия – достаточно серьезный раздел математики, и к его изучению надо подходить со всей ответственностью. Не следует включать отдельные вопросы тригонометрии в другие разделы. Не следует также разделять материал на блоки, которые рассматриваются в отрыве друг от друга в разных классах, изучение материала надо осуществлять целостно, показывая все возможности применения тригонометрических знаний на примере задач с разумным практическим содержанием.

**§2. Анализ условия задачи**

Решение задач – это работа несколько необычная, а именно умственная работа. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придется работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа.

Если приглядеться к любой задаче, то увидим, что она представляет собой требования или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче. Поэтому, приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых надо решать задачу. Все это называется анализом задачи.

*Задача1.* В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

Получив задачу, мы, естественно, ее внимательно читаем. Первое, что мы можем заметить, состоит в следующем: в ней имеются определенные утверждения и требования. В ней утверждается, что «в прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см». Требование задачи состоит в том, что нужно «найти катеты треугольника».

Как видим, формулировка любой задачи состоит из нескольких утверждений и требований. Утверждения задачи называются условиями задачи.

Отсюда ясно, что первое, что нужно сделать при анализе задачи, - это расчленить формулировку задачи на условия и требования. Заметим, что в задаче обычно не одно условие, а несколько независимых элементарных (то есть нерасчленимых дальше) условий; требований в задаче также может быть не одно. Поэтому необходимо расчленить все утверждения и требования задачи на отдельные элементарные условия и требования.

В данной задаче можно вычленить такие элементарные условия:

1) треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;

2) в этот треугольник вписана окружность;

3) точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;

4) длина одного из этих отрезков равна 5 см;

5) длина другого отрезка равна 12 см.

Требования этой задачи можно расчленить на два элементарных.

1. найти длину одного катета треугольника;
2. найти длину другого катета треугольника.

Почему же именно эти условия вычленены из формулировки задачи? Все дело в том, что, производя анализ задачи, вычленяя из формулировки задачи ее условия, мы все время должны соотносить этот анализ с требованием задачи, как бы постоянно оглядываться на требование. Иными словами, анализ задачи всегда направлен на требования задачи.

Для некоторых более сложных задач рассмотренный выше анализ (расчленение задачи на отдельные условия и требования) целесообразно продолжить. А именно установить, как устроены (из чего состоят) вычлененные условия.

*Задача2.* К двум окружностям, радиусы которых 4 см и 6 см, проведены внутренние общие касательные, оказавшиеся взаимно перпендикулярными. Вычислить расстояние между центрами окружностей.

Эта задача содержит такие условия:

1. дана окружность центра , радиус которого равен 4 см (здесь слово «дано» означает, что эта окружность построена из произвольного центра );
2. из некоторого другого центра  проведена окружность радиуса 6 см;
3. эти две окружности построены так, что к ним можно провести общие внутренние касательные;
4. общие внутренние касательные к этим двум окружностям взаимно перпендикулярны.

Анализируя эти условия, можно заметить, что каждое из них состоит из одного или нескольких объектов и некоторой их характеристики. Так, объектом первого условия является окружность, а ее характеристикой: радиус этой окружности равен 4 см. Во втором условии объектом является также окружность с характеристикой: ее радиус равен 6 см. В третьем условии два объекта: указанные выше две окружности, а характеристикой является их взаимное расположение на плоскости: они расположены так, что к ним можно провести внутренние общие касательные. Наконец, четвертое условие содержит два объекта: общие внутренние касательные к окружностям, в качестве их характеристики указано их отношение: они взаимно перпендикулярны.

Итак, мы видим, что в каждом условии задачи имеется один или два (в некоторых случаях больше) объекта; если в условии один объект, то указывается его характеристика в виде некоторого свойства этого объекта; если же объекта два, то характеристикой служит некоторое отношение этих объектов.

Довольно часто анализ задачи сопряжен с большими трудностями.

*Задача3.* Две окружности касаются в точке  и касаются одной и той же прямой соответственно в точках  и . Какую фигуру образует множество всех точек , если радиусы данных окружностей будут принимать всевозможные значения?

На первый взгляд кажется, что в задаче речь идет о двух окружностях. Но прочтите еще раз внимательно вопрос задачи: требуется установить, какую фигуру образуют точка  (точка  - переменная). Значит, речь идет о множествах окружностей и множестве точек их касания. Исходя из этого, задачу можно расчленить на такие условия:

1. Дано множество окружностей, каждая из которых касается данной прямой в данной на ней точке .

Здесь объектом является множество окружностей, а их характеристикой – свойство каждой окружности этого множества: она касается данной прямой в точке .

1. Дано множество окружностей, каждая из которых касается данной прямой (с той стороны, что и первое множество окружностей) в данной точке .

Объект и характеристика этого условия аналогичны первому условию.

1. Из этих двух множеств образованы такие пары окружностей, причем первый элемент пары есть окружность первого множества, а второй элемент пары – окружность второго множества, которые взаимно касаются.

Объектом этого условия является множество пар окружностей, а их характеристикой – отношение: окружности, входящие в пару, взаимно касаются.

Заметим, что в это множество пар окружностей войдут не все окружности первого и второго множеств окружностей, а лишь те из них, которые удовлетворяют указанному отношению (взаимное касание).

4.  - есть точка, в которой взаимно касаются соответствующие окружности, входящие в образованные пары (по 3 условию). Объектом этого условия является точка  (переменная точка), а ее характеристикой - свойство: эта точка есть точка касания окружностей, входящих в пару.

5. Множество точек  есть некоторая геометрическая фигура. Объектом условия является множество точек  взаимного касания окружностей, входящих в пары, а характеристикой – искомое свойство этого множества как геометрической фигуры.

Требование задачи состоит как раз в том, чтобы найти эту последнюю характеристику объекта пятого условия.

Результаты предварительного анализа задач надо как-то зафиксировать, записать. Та словесная, описательная форма записи, которую мы использовали выше, конечно, малоудобна. Более удобной, компактной и в то же время достаточно наглядной формой записи результатов анализа задач является схематическая запись задачи (модель задачи).

Для схематической записи геометрических задач полезно использовать чертеж той фигуры, которая рассматривается в задаче. При построении такого чертежа надо выполнить ряд требований. Укажем главные из них.

1. Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи (геометрической фигуры, или совокупности фигур, или какой-то части этих фигур) с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых их характеристик. Если в тексте задачи указаны какие-либо обозначения фигуры или ее элементов, то эти обозначения должны быть и на чертеже; если же в задаче никаких обозначений нет, то следует воспользоваться общепринятыми обозначениями или придумать наиболее удобные.
2. Этот чертеж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта названа трапеция, но не указан ее вид, то не следует строить равнобедренную или прямоугольную трапецию и т.д.
3. При построении чертежа нет надобности выдерживать строго какой-либо определенный масштаб. Однако желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры. Например, если задана медиана треугольника, то соответствующий ей отрезок на чертеже должен проходить приблизительно через середину стороны треугольника и т.д. Точно так же надо соблюдать на чертеже такие отношения, как параллельность, перпендикулярность и др.
4. При построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать все правила черчения. Там, где это можно и целесообразно, лучше строить какие-либо плоскостные сечения этих фигур.

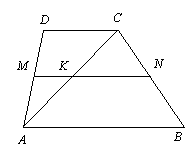
Кроме чертежа, для схематической записи геометрических задач используется еще краткая запись всех условий и требований задачи. В этой краткой записи, пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, записываются все характеристики и отношения, указанные в условиях задачи. Названия фигур или отдельных ее частей желательно заменить записью их определений.

**§3. Сущность и структура решения задач**

Что значит решить задачу? Можно ответить так: решить задачу – это значит найти ее ответ. В какой-то степени это верно, но все дело в том, как понимать слово «найти». Можно ли считать, что человек решил задачу, если он, например, подсмотрел в ответы задачника, ведь он по сути нашел ответ. Очевидно, что нет. Значит, решение задачи состоит не просто в том, чтобы найти ответ. Чтобы разобраться в этом, придется внимательно приглядеться к процессу решения задачи.

*Задача4.* Длины оснований трапеции равны 4см и 10см. Найти длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

Сначала посмотрим схематическую запись задачи.



Дано: 

см; см.

Найти:  и .

Решение. Как известно, средняя линия трапеции параллельна ее основаниям. Значит,  и . Диагональ  делит трапецию на два треугольника. Рассмотрим каждый из них. В треугольник  отрезок  является средней линией, ибо  как часть отрезка , и точка  по условию есть середина стороны . А средняя линия треугольника равна половине основания. Значит, , а так как см, то 5см.

Аналогично, рассматривая , мы убеждаемся, что  есть средняя линия этого треугольника и поэтому , но см, следовательно, см.

Итак, искомые длины отрезков найдены, задача решена.

Приведенное решение можно представить в виде схемы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № шага | Общие положения математики | Условия задачи или их следствия | Результат |
| 1 | Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям. | MN – средняя линия трапеции ABCD. | MN//AB, MN//CD/ |
| 2 | Диагональ делит трапецию на два треугольника. | ABCD – трапеция, AC – ее диагональ. | ABC и ACD – треугольники. |
| 3-4 | Отрезок, проходящий через середину стороны треугольника параллельно другой стороне, является средней линией треугольника. | В ΔABC точка N – середина BC и NK//AB, в ΔACD точка M - середина AD и MK//CD. | NK – средняя линия ΔABC, MK – средняя линия ΔACD. |
| 5-6 | Средняя линия треугольника равна половине основания. | NK – средняя линия ΔABC, AB=10см, MK – средняя линия ΔACD, CD=4см. | см  см |

Из приведенных примеров можно сделать следующий вывод:

*Решить задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, - ее ответ.*

На приведенное определение следует смотреть как на первичное, самое общее толкование сущности решения задач.

Если под процессом решения задач понимать процесс, начинается с момента получения задачи до момента полного завершения ее решения, то, очевидно, что этот процесс состоит не только из изложения уже найденного решения, а из ряда этапов, одним из которых и является изложение решения.

Итак, весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

1. анализ задачи;
2. схематическая запись задачи;
3. поиск способа решения задачи;
4. осуществление решения задачи;
5. проверка решения задачи;
6. исследование решения;
7. формулирование ответа задачи;
8. познавательный анализ решения задачи.

**§4. Поиск плана решения задачи**

Поиск плана решения составляет центральную часть всего процесса решения. Найдя план, его осуществление уже не составляет особого труда, оно требует лишь технических умений выполнения тех действий и операций, которые изучаются в курсе математики.

Однако начинать процесс решения задачи надо с глубокого и всестороннего анализа задачи и построения ее схематической записи, целью проведения которой является поиск плана решения задачи.

Сформулируем основные рекомендации для поиска решения математических задач.

1. Прочтя задачу, надо попытаться установить, к какому виду задач она принадлежит (стандартная, нестандартная).
2. Если вы узнали в ней стандартную задачу знакомого вида, то примените для ее решения известное вам общее правило.
3. Если же задача не является стандартной, то следует действовать в следующих направлениях:

а) вычленять из задачи или разбивать ее на подзадачи стандартного вида (способ разбиения);

б) ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов);

в) переформулировать ее, заменить ее другой равносильной задачей (способ моделирования).

4. Для того, чтобы легче было осуществлять указанные способы, полезно предварительно построить наглядную вспомогательную модель задачи – ее схематическую запись.

5. Решение нестандартных задач есть искусство, которым можно овладеть лишь в результате глубокого постоянного самоанализа действий по решению задач и постоянной тренировки в решении разнообразных задач.

**§5. Классификация планиметрических задач с использованием тригонометрии.**

В основном применение тригонометрии при решении геометрических задач идет по четырем направлениям:

1) использование формулы площади треугольника;

2) использование соотношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

а) по определению синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов;

б) применение тождественных преобразований;

3) использование двух «теорем-тружеников» - теоремы синусов и теоремы косинусов;

4) при решении практических задач.

**5.1.** Решение задач методом площадей.

***Задача1.***Площадь равнобочной трапеции равна , угол между ее диагоналями, противолежащей боковой стороне, равен . Найти высоту трапеции.



**Решение.**

* 1. *Анализ и схематическая запись задачи.* Расчленим условие задачи на несколько составляющих. Условие «площадь равнобочной трапеции равна » говорит нам о следующем: 1) дана трапеция; б) данная трапеция равнобочная, то есть ее боковые стороны равны (а также ее диагонали); в) и площадь этой трапеции равна .

Из следующего фрагмента условия «угол между ее диагоналями, противолежащей боковой стороне, равен » выделим следующие положения: г) в данной трапеции проведены диагонали; д) угол, образованный этими диагоналями, и лежащий напротив боковой стороны трапеции, равен .



И собственно вопрос задачи: найти высоту трапеции.

На основе полученных данных мы можем сделать краткую запись и построить схематический рисунок:

Дано:  - трапеция, , , , .

****Найти: .

* 1. *Поиск и осуществление решения. Исследование задачи.* Эти три этапа процесса решения в данном случае удобно производить совместно. Мы знаем формулу нахождения площади трапеции по диагоналям и углу между ними:

,

отсюда найдем длину диагонали:

.

Рассмотрим . Этот треугольник прямоугольный; нам известна длина диагонали и если мы можем найти один угол, то найдем и сторону . Найдем угол . , тогда . Так как точка пересечения диагоналей делит их пополам, то полученный треугольник  будет равнобедренным. Так как , то сумма углов  и  равна , а так как углы при основании в равнобедренном треугольнике равны, то каждый из них равен . Тогда по определению синуса угла найдем сторону : , отсюда



.

6. *Проверка решения.* В данном случае проверка решения сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденной формуле действительно можно вычислить такое, которое принадлежит области его определения. Очевидно, что должно соблюдаться лишь одно условие: . Так как по условию задачи может изменяться от  до , то  будет всегда положительным; переменная  всегда положительна, значит, условие  выполняется в любом случае.

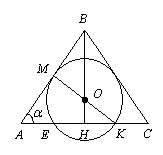


7. *Ответ.* .

8. *Исследование решения.* При решении задачи надо анализировать каждый шаг решения с точки зрения его выполнимости при предварительно найденных или заданных условиях и при необходимости эти условия уточнять, суживая тем самым области изменения параметров.

***Задача2.*** В равнобедренном треугольнике  угол  равен . Окружность радиусом 1 касается боковых сторон  и  треугольника и пересекает его основание  в точках  и  (точка  лежит между  и );  - точка касания окружности и стороны ; . Вычислить площадь .

Дано:  - равнобедренный, ,  - окружность радиуса 1, .



Найти: .

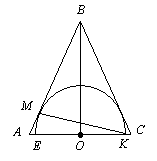
Решение: Прежде всего, нужно провести расчеты, которые позволят выяснить местоположение центра окружности; пока лишь ясно, что этот центр лежит на высоте  равнобедренного , так как стороны  и  - касательные к окружности, а потому центр окружности лежит на биссектрисе  угла между этими касательными.

Введем обозначение: . Проведем радиус  в точку касания , тогда  тоже равен  ( и  - углы со взаимно-перпендикулярными сторонами). По условию . Воспользовавшись формулой , получим ; тогда .

Из  находим: ; . Далее,

; .

Это значит, что , а потому точки  и  должны совпадать, т.е. для дальнейшего решения задачи надо сделать новый (правильный) рисунок.



Площадь треугольника  будем искать по формуле . Известно, что .

Таким образом, задача свелась к отысканию длины отрезка .

Воспользуемся тем, что . Положим , тогда , и получим уравнение , откуда . Тогда  и, следовательно,

.

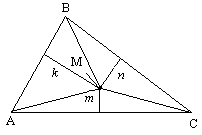
Ответ: .

***Задача3.*** Найти площадь  с углами , зная, что расстояние от произвольной точки , взятой внутри треугольника, до его сторон равны соответственно ,  и .

Дано: , .

Найти: .

Решение: Площадь  можно найти по формуле , но для этого надо найти  и . Положим . Тогда по теореме синусов



,

откуда находим: .

Итак, задача сводится к отысканию значения .

Для составления уравнения применим метод площадей: выберем в качестве опорного элемента площадь  треугольника .

С одной стороны,

.

С другой стороны,



.

Значит, , откуда находим:

.

Подставив это значение  в первую из отмеченных выше формул для площади , получим:

.

Ответ: .

***Замечание.*** Какие же средства используются для составления уравнений в геометрических задачах или, иными словами, какие геометрические факты используются для составления уравнений? Перечислим эти факты:

- теорема Пифагора;

- теорема о биссектрисе треугольника;

- пропорциональность сторон или других линейных элементов в подобных треугольниках;

- метрические соотношения в прямоугольном треугольнике (включая тригонометрические соотношения между сторонами и углами), параллелограмме, окружности;

- различные формулы для вычисления площадей (прежде всего, треугольников);

- теорема синусов, теорема косинусов.

**5.2.** Решение задач на применение определения синуса, косинуса.

***Задача4.*** Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная длину ее диагонали  и величину угла между этой диагональю и большим основанием.



**Решение.**

1. *Анализ условия задачи.* Читая условие задачи, выделяем нужные моменты: а) дана трапеция; б) ее боковые стороны равны; в) длина диагонали ее равна ; г) угол между диагональю и большим основанием равно .



Выясняем вопрос задачи: необходимо найти площадь трапеции.

1. *Схематическая запись задачи.* Сделаем рисунок и запишем краткую запись.

Дано:  - трапеция, , , .

Найти: .

3-5. *Поиск и осуществление решения. Исследование задачи.* Запишем формулу для нахождения площади трапеции.

,

где  - высота трапеции.

Из треугольника  по определению синуса найдем высоту трапеции:

,

тогда по теореме Пифагора имеем:

.

Так как  равна средней линии трапеции, то

.

Теперь найдем площадь трапеции:

.

6. *Проверка решения.* Очевидно, что данное решение верно для любых значений .

7. *Ответ.* .

8. *Исследование решения.* Каким бы ни были параметры  и , задача всегда имеет единственное решение.

***Задача5.*** В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне и равна , острый угол трапеции . Найти площадь трапеции.



Дано:  - равнобедренная трапеция, , , .

Найти: .

Решение: Площадь трапеции:

,

где три неизвестных. Найдем их.

Из : ; из : .

Рассмотрим .

;

Тогда,

.

Теперь мы можем найти площадь:



.

Ответ: .

***Задача6.*** В параллелограмме высоты равны  и , угол между ними . Найти его площадь.



Дано:  - параллелограмм, , - высоты параллелограмма,  - точка пересечения высот, .

Найти: .

Решение: Треугольник  - прямоугольный, тогда . Из треугольника  найдем:

.

Тогда по формуле площади параллелограмма:

.

Ответ: 

**Замечание.** Зная стороны прямоугольного треугольника, мы можем найти его острые углы. Сначала находим один из синусов этих углов, используя равенства , . Затем по найденному синусу находим величину этого угла. Второй угол дополняет найденный до .

Или решается обратная задача: по острому углу и одной из сторон прямоугольного треугольника найти остальные его элементы. Возможны два случая: 1) даны острый угол и гипотенуза; 2) даны острый угол и катет.

**5.3.** Решение задач на применение определения тангенса, котангенса.

***Задача7.*** В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного .



1-2. *Анализ и схематическая запись задачи.* Эта задача содержит такие условия: а) дан прямоугольный треугольник; б) из вершины острого угла проведена медиана; в) из вершины этого же угла проведена биссектриса; в) величина данного угла равна . И вопрос задачи: найти угол между медианой и биссектрисой. На основе этого сделаем краткую запись и нарисуем чертеж.



Дано:  - прямоугольный,  - биссектриса,  - медиана, , , .

Найти: .

3-5. *Поиск и осуществление решения.* *Исследование задачи.* Обозначим искомый угол через . Тогда из  найдем

,

с другой стороны из 

,

отсюда выразим

.

Подставляя последнее равенство в первое, найдем:

; ; .

6. *Проверка решения.* По условию задачи на переменные нет ограничений, значит найденная формула выполняется в любом случае.

7. *Ответ.* .

8. *Исследование решения.*

***Задача8.*** Высота равнобочной трапеции равна , а угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен . Найти среднюю линию трапеции.



Дано:  - равнобочная трапеция, ,  - диагонали, .

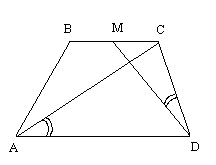
Найти: среднюю линию.

Решение: Рассмотрим , как смежный к . Тогда , и

.

А  есть величина, равная средней линии трапеции.

Ответ: .



***Задача9.*** В равнобедренной трапеции острый угол равен , радиус вписанного круга . Найти площадь трапеции.



Дано:  - равнобочная трапеция,  - окружность с центром в точке  и радиусом , .

Найти: .

Решение: Запишем формулу площади трапеции:

,

следовательно, мы имеем две неизвестные ().

Рассмотрим . Применяя определение тангенса, найдем основание :

.

Из  найдем ():

.

Тогда ; и , , следовательно, имеем:



.

Ответ: .

***Задача10.*** В равнобедренном треугольнике величина угла при вершине равна , а площадь его равна . Найти длину основания треугольника.



Дано:  - равнобедренный, , , .

Найти: .

Решение: Запишем формулу нахождения площади треугольника: . Здесь два неизвестных: длины основания и высоты. Через тангенс угла найдем высоту.

.

Подставим полученное значение в формулу площади и выразим основание треугольника:

,

,

.

Ответ: .

**5.4.** Решение задач на применение теорем синуса, косинуса.

***Задача11.*** Длина основания равнобедренного треугольника равна , а угол при вершине - . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.



**Решение.**

* 1. *Анализ и схематическая запись задачи.* Расчленим условие задачи на составляющие: 1) дан треугольник; б) данный треугольник равнобедренный, то есть его боковые стороны равны; в) длина основания треугольника ; г) угол, лежащий напротив основания, равен ; д) из угла при основании (так как треугольник равнобедренный, не имеет значения из которого угла) проведена биссектриса.



И вопрос задачи: найти длину биссектрисы.

На основе полученных данных мы можем сделать краткую запись и построить схематический рисунок:

Дано:  - треугольник, , ,  - биссектриса, , .

Найти: .

3-5. *Поиск и осуществление решения. Исследование задачи.* Так как треугольник равнобедренный, то углы при основании равны, следовательно , тогда . Так как  - биссектриса, то . Тогда из треугольника  по теореме синусов:

.

Так как  и , то

.

Отсюда найдем биссектрису :

.

6. *Проверка решения.* Очевидно, что данное решение верно для любых значений .

7. *Ответ.* .

8. *Исследование решения.* Каким бы ни были параметры  и , задача всегда имеет единственное решение.

***Задача12.*** Один из углов трапеции равен , а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований – 8 см.

Дано:  - трапеция,  - средняя линия, , , , .

Найти: .

Решение: По определению средней линии , отсюда найдем большее основание трапеции:

.

Рассмотрим треугольник . По теореме синусов найдем сторону :

.

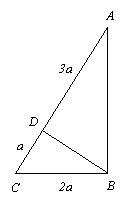
Так как треугольники  и  подобны, то . Из треугольника :

;

.

Ответ: 2.

***Задача13.*** В треугольнике  известно, что  и . На стороне  взята точка  так, что . Найти отношение радиуса окружности, описанной около , к радиусу окружности, вписанной в .



Дано: , , , .

Найти: .

Решение. Введем вспомогательный параметр . Тогда .

Чтобы найти радиус  окружности, описанной около треугольника , вычислим сторону  по теореме косинусов, а затем воспользуемся теоремой синусов. Имеем: , т.е. , откуда находим, что . По условию , значит, . По теореме синусов , значит, , откуда находим .

Радиус  окружности, вписанной в треугольник , найдем по формуле , где  - площадь,  - полупериметр . Уже известно, что . Сторону  найдем из  по теореме косинусов: , откуда . Значит, . Площадь  треугольника  вычислим по формуле Герона:





.

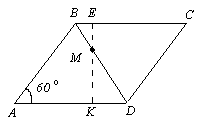
Значит,

.

Ответ: .

***Задача14.*** В ромбе  со стороной  и острым углом  проведен отрезок  (), который пересекает диагональ  в точке  так, что . Известно, что . Найти длину отрезка .

Дано:  - ромб, , , , , , .



Найти: .

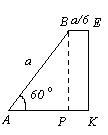
Решение: Положим ; тогда из подобия треугольников  и  следует, что  (поскольку ). Тогда . Введем еще одно обозначение:  - высота ромба  и одновременно – высота трапеции  и высота трапеции .

;

.

По условию , значит, , откуда .

Нам нужно найти длину отрезка . Сначала найдем длину , для чего воспользуемся «выносным» чертежом. Рассмотрим трапецию , в которой  (напомним, что , а ),  (напомним, что , т.е. ).



Проведем отрезок , тогда

.

Применим к  теорему косинусов:

;

.

Значит, .

Так как , то .

Ответ: .

***Задача15.*** Дан остроугольный треугольник , в котором ; ; . В каком отношении ортоцентр делит высоту, проведенную из вершины ?

Дано: , , , ,  - высота.

Найти: .

Решение: Опишем около  окружность, радиус которой обозначим через  (вспомогательный параметр).

Проведем  и учтем, что , где  - ортоцентр.

Рассмотрим . Так как  измеряется дугой , , а  измеряется половиной дуги , то . Тогда .

По теореме синусов, примененной к , , значит, , и тогда из  получаем: .

;





.

Итак, .

Ответ: .

**Замечание.** Задача «решить треугольник по некоторым заданным его элементам» может рассматриваться в двух вариантах.

а) Имеется треугольник, и известны некоторые его элементы. Найти остальные его элементы.

б) Заданы некоторые отрезки и углы (или их величины). Найти (построить) треугольник, для которого заданные отрезки и углы являются заданными его элементами.

Теорема синусов позволяет решить треугольник по стороне и двум углам и по двум сторонам и углу против одной из них.

**5.5.** Решение задач на применение тождественных преобразований.

***Задача16.*** Около круга радиуса  описан равнобедренный треугольник с углом . Определите стороны треугольника.

**Решение.**

1. *Анализ условия задачи.* Выделим основные данные из условия задачи: а) дан круг радиуса  (пусть его центр находится в точке ); б) вокруг круга описан треугольник; в) данный треугольник равнобедренный, то есть боковые его стороны равны; г) угол, лежащий напротив основания, равен .

Вопрос задачи: необходимо найти длины сторон треугольника.

1. *Схематическая запись задачи.* Сделаем рисунок и запишем краткую запись.

Дано: , , , .

Найти: , .

3-5. *Поиск и осуществление решения. Исследование задачи.* Так как , то . Тогда рассмотрим : , тогда найдем по теореме синусов:

;

так как  не табличное значение, с помощью тождественных преобразований найдем его значение:

;

.

Тогда по теореме Пифагора:



;

Отсюда .

Найдем сторону . Так как , то , тогда .

 подобен , тогда справедливо:

,

.

Так как и  равны, то , тогда ;



,

выразим  через :

,

,

.

6. *Проверка решения.* Так как решение задачи не зависит от параметров, то правильность решения очевидна.

7. *Ответ.* , .

8. *Исследование решения.* Решение единственно, так как нет параметров, в зависимости от которых менялось бы решение.

**5.6.** Решение практических задач с использованием тригонометрии.

***Задача17.*** Определить высоту недоступного предмета.

**Решение.** Предполагаем, что есть возможность перемещаться по горизонтали в направлении к предмету. Выберем два пункта  и , и в каждом из них найдем угол, под которым виден предмет. Так получается геометрическая задача: в треугольнике  известны сторона ,  и внешний угол ; найти высоту, опущенную из вершины .

Обозначим искомую высоту  через  и положим , . Из треугольника  высота . Поэтому надо найти . По теореме синусов . Угол  внешний для треугольника . Следовательно, .

Отсюда . Теперь мы можем вычислить , а затем .

***Замечание.*** Важно дать понять ученикам, что условие любой практической задачи сводится к условию обычной геометрической задачи, и уже после этого ученик может решать задачу.

А вот несколько занимательных практических задач.

***Задача18.*** Эта задача из древнего китайского трактата «Математика в девяти книгах»: «Имеется квадратный водоем со стороной в один чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на один чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина водоема и какова длина камыша». (Чжан и чи – меры длины, 1 чжан = 10 чи.)

***Задача19.*** Эта задача из книги польского математика Г. Штейнгауза «100 задач». Называется эта задача «Французские города».

«Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние по воздуху, как и все расстояния в этой задаче, от Шалона до Витри равно 30 км, от Витри до Шомона 80 км, от Шомона до Сэн-Кантэна 236 км, от Сэн-Кантэна до Ремса 86 км, от Ремса до Шалона 40 км. Вычислить в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет сделать только доктор Сильвестр Шарадек!» Но может быть, и вы попробуете?

***Задача20.*** Какая лестница более крутая: в 20 ступенек, поднимающаяся на 3 м, или в 15 ступенек, поднимающаяся на 2 м?

***Задача21.*** Пожарная лестница, стоящая на машине, может быть выдвинута на 20 м, а ее крутизна может достигать . Основание лестницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?

***Задача22.*** Корабль плывет на восток с постоянной скоростью . В некоторый момент времени пеленг на маяк равен , а спустя время  он равен . Через какое время маяк будет для этого корабля точно на севере? (Пеленг – это угол между направлением на север и направлением на маяк.)

***Задача23.***Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Найдите длину желоба.

***Задача24.*** Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого 7 м, составляет 4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом.

***Задача25.*** Футбольный мяч находится в точке  футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований  и  стоек ворот. Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол  попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

***Задача26.*** Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить. Основание башни он видит под углом  к горизонту, а вершину – под углом  к горизонту. Какова высота башни?

**Заключение.**

В данной работе было подробно описано, каким образом улучшить усвояемость тригонометрического материала учениками, как научить их решать задачи любой сложности, логически мыслить при решении задач, а не только уметь решать по шаблону. Были собраны и проклассифицированы планиметрические задачи с использованием тригонометрии по принципу их решения, даны некоторые методические рекомендации учителям, а также общий принцип решения планиметрических задач с использованием тригонометрии.

**Список использованной литературы:**

1. Погорелов А. В. Геометрия. Учебник для 7-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1997.
2. Атанасян Л. С. и др. Геометрия 7-9. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2001.
3. Вернер А. Л. и др. Геометрия. Учебное пособие для 8 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2001.
4. Александров А. Д. и др. Учебник для 7-9 классов общеобразовательной школы. – М.: Просвещение, 1995.
5. Вернер А. Л. Уроки Александрова // Математика в школе. – 2002. - №7.
6. Вернер А. Л. Роль и место тригонометрии в курсе геометрии основной школы // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 2002. - №41.
7. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи. 1999.
8. Кильдяева Л. Г. Дифференцированный подход к обучению геометрии учащихся основной школы. – Саранск, 2006.
9. Зарецкий В. И. Изучение тригонометрических функций в средней школе. – Минск, 1970.
10. Андронов И. К., Окунев А. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. – М., 1967.
11. Панчишкин А. А., Шавгулидзе Е. Т. Тригонометрические функции в задачах. – М., 1986.