Завдання 1

При продажу двох видів товарів (А і В) торгове підприємство використовує чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсів на 1 од. товару, об’єм ресурсів наведені в таблиці. Дохід від реалізації 1 од. товару А складає 2 грн., товару В – 3 грн.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурси | Норма витрат ресурсів на 1 од. тов. | | Запас ресурсів |
| А | В |
| 1 | 2 | 2 | 12 |
| 2 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 4 | 0 | 16 |
| 0 | 0 | 4 | 12 |
| Дохід, грн. од. | 2 | 3 |  |

Визначити оптимальний план реалізації товарів, що забезпечує для торгового підприємства максимальний прибуток.

Розв’язок

Складаємо математичну модель задачі. Позначимо через х1 кількість товарів 1-ї моделі, що реалізує підприємство за деяким планом, а через х2 кількість товарів 2-ї моделі. Тоді прибуток, отриманий підприємством від реалізації цих товарів, складає

∫ = 2х1+3х2.

Витрати ресурсів при продажу такої кількості товарів складають відповідно:

CI =2х1 + 2х2,

CII =1х1 + 2х2,

CIII =4х1 + 0х2,

CIV =0х1 + 4х2,

Оскільки запаси ресурсів обмежені, то повинні виконуватись нерівності:

2х1 + 2х2 ≤ 12

1х1 + 2х2 ≤ 8

4х1 ≤ 16

4х2≤ 12

Оскільки, кількість товарів є величина невід'ємна, то додатково повинні виконуватись ще нерівності: х1> 0, х2> 0.

Таким чином, приходимо до математичної моделі (задачі лінійного програмування):

Знайти х1 , х2 такі, що функція ∫ = 2х1+3х2 досягає максимуму при системі обмежень:



Вирішимо пряму задачу лінійного програмування симплексним методом, з використанням симплексної таблиці.

Визначимо максимальне значення цільової функції F (X) = 2x1 + 3x2 за таких умов-обмежень.

2x1 + 2x2≤12

x1 + 2x2≤8

4x1≤16

4x2≤12

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної форми). Оскільки маємо змішані умови-обмеження, то введемо штучні змінні x.

2x1 + 2x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 = 12

1x1 + 2x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 = 8

4x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 + 0x6 = 16

0x1 + 4x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 1x6 = 12

Матриця коефіцієнтів A = a(ij) цієї системи рівнянь має вигляд:

Базисні перемінні це змінні, які входять тільки в одне рівняння системи обмежень і притому з одиничним коефіцієнтом.

Вирішимо систему рівнянь відносно базисних змінних:

x3, x4, x5, x6,

Вважаючи, що вільні змінні рівні 0, отримаємо перші опорний план:

X1 = (0,0,12,8,16,12)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 0 | x3 | 12 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | x4 | 8 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  | x5 | 16 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | x6 | 12 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Індексний рядок | F(X0) | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| 1 | x3 | 12 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
|  | x4 | 8 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
|  | x5 | 16 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
|  | x6 | 12 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| Індексний рядок | F(X1) | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідної змінної x2, тому, що це найбільший коефіцієнт по модулю.

Обчислимо значення Di по рядках як частку від ділення:

і з них виберемо найменше:

min (12 : 2 , 8 : 2 , - , 12 : 4 ) = 3

Отже, 4-ий рядок є провідним.

Дозвільний елемент дорівнює (4) і стоїть на перетині ведучого стовпця і головного рядка.

Формуємо наступну частину симплексної таблиці.

Замість змінної x в план 1 Замість змінної x2 .

Рядок, відповідної змінної x2 в планi 1, отриманий в результаті поділу всіх елементів рядка x6 плану 0 на дозвільний елемент ДE=4

На місці дозвільного елемента в плані 1 отримуємо 1.

В інших клітинах стовпця x2 плану 1 записуємо нулі.

Таким чином, у новому плані 1 заповнені рядок x2 і стовпець x2 .

Всі інші елементи нового плану 1, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника.

Для цього вибираємо зі старого плану чотири числа, які розташовані в вершинах прямокутника і завжди включають дозвільний елемент ДE.

НE = СE - (А\*В)/ДE

СДE - елемент старого плану, ДЕ - дозволяє елемент (4), А i В - елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами СДЕ і ДE.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| 2 | x3 | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | 3 |
|  | x4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 2 |
|  | x5 | 16 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
|  | x2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | - |
| Індексний рядок | F(X2) | 9 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3/4 | 0 |

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідної змінної x1, Так як це найбільший коефіцієнт по модулю.

Обчислимо значення Di по рядках як частка від ділення:

і з них виберемо найменше:

min (6 : 2 , 2 : 1 , 16 : 4 , - ) = 2

Отже, 2-ий рядок є провідним.

Дозвільний елемент дорівнює (1) і стоїть на перетині ведучого стовпця і головною рядка.

Формуємо наступну частину симплексної таблиці.

Замість змінної x в план 2 Замість змінної x1 .

Рядок, відповідної змінної x1 в планi 2, отриманий в результаті поділу всіх елементів рядка x4 плану 1 на дозвільний елемент ДE=1

На місці дозвільного елемента в плані 2 отримуємо 1.

В інших клітинах стовпця x1 плану 2 записуємо нулі.

Таким чином, у новому плані 2 заповнені рядок x1 і стовпець x1 .

Всі інші елементи нового плану 2, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника.

Для цього вибираємо зі старого плану чотири числа, які розташовані в вершинах прямокутника і завжди включають дозвільний елемент ДE.

НE = СE - (А\*В)/ДE

СДE - елемент старого плану, ДЕ - дозвільний елемент (1), А i В - елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами СДЕ і ДE.

Оскільки в останньому стовпці присутні кілька мінімальних елементів 4, то номер рядка вибираємо за правилом Крек.

Метод Крек полягає в наступному. Елементи рядків, що мають однакові найменші значення min=4, діляться на передбачувані дозвільні елементи, а результати заносяться в додаткові рядки. За провідний рядок вибирається той, в якому раніше зустрінеться найменше приватне при читанні таблиці зліва направо по стовпцях.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| 3 | x3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1/2 | 4 |
|  | x1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | - |
|  | x5 | 8 | 0 | 0 | 0 | -4 | 1 | 2 | 4 |
|  | x2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 12 |
| Індексний рядок | F(X3) | 13 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | -1/4 | 0 |

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідний змінної x6, тому що це найбільший коефіцієнт по модулю.

Обчислимо значення Di по рядках як частку від ділення:

і з них виберемо найменше:

min (2 : 1/2 , - , 8 : 2 , 3 : 1/4 ) = 4

Отже, 1-ий рядок є провідним.

Дозвільний елемент дорівнює (1/2) і стоїть на перетині ведучого стовпця і головною рядка.

Формуємо наступну частину симплексної таблиці.

Замість змінної x в план 3 Замість змінної x6 .

Рядок, відповідної змінної x6 в плані 3, отриманий в результаті поділу всіх елементів рядка x3 плану 2 на дозвільний елемент ДE=1/2

На місці дозволяє елемента в плані 3 отримуємо 1.

В інших клітинах стовпця x6 плану 3 записуємо нулі.

Таким чином, у новому плані 3 заповнені рядок x6 і стовпець x6 .

Всі інші елементи нового плану 3, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника.

Для цього вибираємо зі старого плану чотири числа, які розташовані в вершинах прямокутника і завжди включають дозвільний елемент ДE.

НE = СE - (А\*В)/ДE

СДE - елемент старого плану, ДЕ - дозвільний елемент (1/2), А i В - елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами СДЕ і ДE.

Оскільки, індексний рядок не містить негативних елементів - знайдений оптимальний план.

Остаточний варіант симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 4 | x6 | 4 | 0 | 0 | 2 | -4 | 0 | 1 |
|  | x1 | 4 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
|  | x5 | 0 | 0 | 0 | -4 | 4 | 1 | 0 |
|  | x2 | 2 | 0 | 1 | -1/2 | 1 | 0 | 0 |
| Індексний рядок | F(X4) | 14 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 |

Оптимальний план можна записати так:

x6 = 4

x1 = 4

x5 = 0

x2 = 2

F(X) = 2•4 + 3•2 = 14

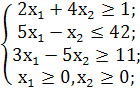
Завдання 2

Розв’язати задачі:

а) графічним методом;

б) методом симплексних таблиць;

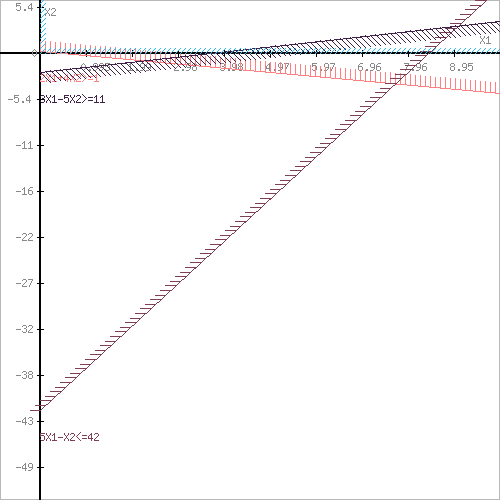
в) скласти двоїсту задачу і розв’язати її.



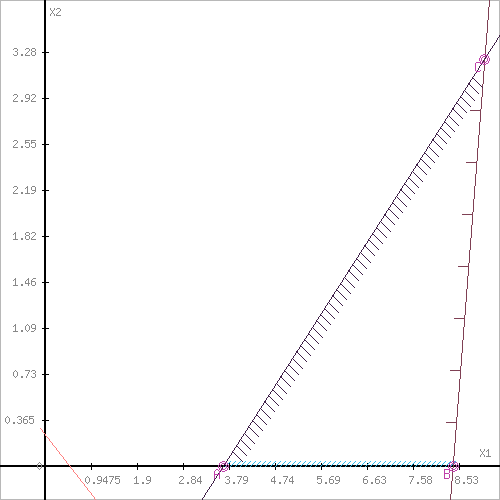
Розв’язок

Розв’язок графічним методом.

Побудуємо область допустимих рішень, тобто вирішимо графічно систему нерівностей. Для цього побудуємо кожну пряму і визначимо півплощини, задані нерівностями (півплощини позначені штрихом).



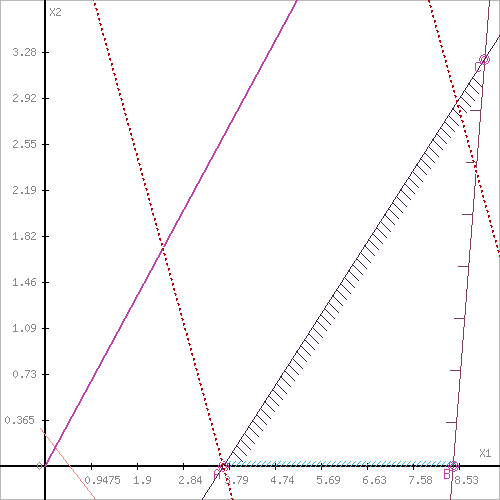
Межі області



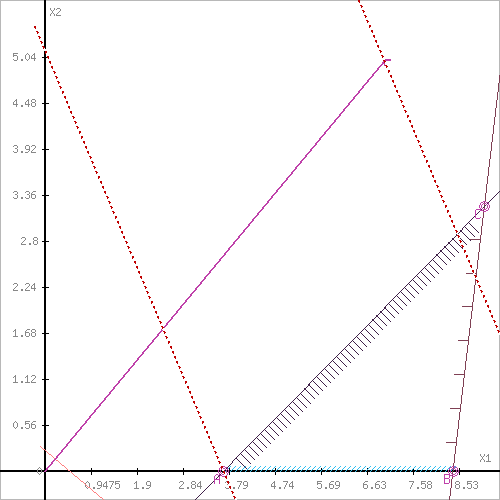
Цільова функція F(x) => min

Розглянемо цільову функцію завдання F = 7X1+5X2 => min.

Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = 0: F = 7X1+5X2 = 0. Будемо рухати цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить мінімальне рішення, тому рухався прямо до першого торкання позначеної області. На графіку ця пряма позначена пунктирною лінією.



Рівний масштаб



Перетином півплощини буде область, яка представляє собою багатокутник, координати точок якого задовольняють умові нерівностей системи обмежень задачі.

Пряма F(x) = const перетинає область у точці A. Оскільки точка A отримана в результаті перетину прямих 4 i 3, то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

x2=0

3x1-5x2≥11

Вирішивши систему рівнянь, одержимо: x1 = 3.6667, x2 = 0

Звідки знайдемо мінімальне значення цільової функції:

F(X) = 7\*3.6667 + 5\*0 = 25.67

Розв’язок методом симплексних таблиць.

Вирішимо пряму задачу лінійного програмування симплексним методом, з використанням симплексної таблиці.

Визначимо мінімальне значення цільової функції F(X) = 7x1+5x2 за таких умов-обмежень.

2x1+4x2≥1

5x1-x2≤42

3x1-5x2≥11

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної форми).

2x1 + 4x2-1x3 + 0x4 + 0x5 = 1

5x1-1x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 = 42

3x1-5x2 + 0x3 + 0x4-1x5 = 11

Введемо штучні змінні x.

2x1 + 4x2-1x3 + 0x4 + 0x5 + 1x6 + 0x7 = 1

5x1-1x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 = 42

3x1-5x2 + 0x3 + 0x4-1x5 + 0x6 + 1x7 = 11

Для постановки завдання на мінімум цільову функцію запишемо так:

F(X) = 7x1+5x2+Mx6+Mx7 => min

Отриманий базис називається штучним, а метод рішення називається методом штучного базису.

Причому штучні змінні не мають відношення до змісту поставленого завдання, однак вони дозволяють побудувати стартову точку, а процес оптимізації змушує ці змінні приймати нульові значення та забезпечити допустимість оптимального рішення.

З рівнянь висловлюємо штучні змінні:

x6 = 1-2x1-4x2+x3

x7 = 11-3x1+5x2+x5

які підставимо в цільову функцію:

F(X) = 7x1 + 5x2 + M(1-2x1-4x2+x3) + M(11-3x1+5x2+x5) => min

або

математичний модель лінійний програмування

F(X) = (7-5M)x1+(5+1M)x2+(1M)x3+(1M)x5+(12M) => min

Матриця коефіцієнтів A = a(ij) цієї системи рівнянь має вигляд:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 4 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | -5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |

Базисні перемінні це змінні, які входять тільки в одне рівняння системи обмежень і притому з одиничним коефіцієнтом.

Вирішимо систему рівнянь відносно базисних змінних:

x6, x4, x7,

Вважаючи, що вільні змінні рівні 0, отримаємо перший опорний план:

X1 = (0,0,0,42,0,1,11)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| 0 | x6 | 1 | 2 | 4 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | x4 | 42 | 5 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | x7 | 11 | 3 | -5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| Індексний рядок | F(X0) | 12M | -7+5M | -5-1M | -1M | 0 | -1M | 0 | 0 |

Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | min |
| 1 | x6 | 1 | 2 | 4 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 |
|  | x4 | 42 | 5 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8.4 |
|  | x7 | 11 | 3 | -5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3.67 |
| Індексний рядок | F(X1) | 12M | -7+5M | -5-1M | -1M | 0 | -1M | 0 | 0 | 0 |

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться позитивні коефіцієнти

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідної змінної x1, так як це найбільший коефіцієнт .

Обчислимо значення Di по рядках як частку від ділення

і з них виберемо найменше:

Отже, 1-ий рядок є ведучим

Дозвільний елемент дорівнює 2 і знаходиться на перетині ведучого стовпця і головною рядка

Формуємо наступну частину симплексної таблиці.

Замість змінної x6 в план 1 увійде змінна x1

Рядок, відповідної змінної x1 в плані 1, отриманий в результаті поділу всіх елементів рядка x6 плану 0 на дозвільний елемент ДЕ=2

На місці дозвільного елемента в плані 1 отримуємо 1.

В інших клітинах стовпця x1 плану 1 записуємо нулі.

Таким чином, у новому плані 1 заповнені рядок x1 і стовпець x1 .

Всі інші елементи нового плану 1, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника.

Для цього вибираємо зі старого плану чотири числа, які розташовані в вершинах прямокутника і завжди включають дозвільний елемент ДЕ.

НE = СE - (А\*В)/ДE

СДЕ - елемент старого плану, ДЕ - дозвільний елемент (2), А і В - елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами СДЕ і ДЕ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | min |
| 2 | x1 | 0.5 | 1 | 2 | -0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 |
|  | x4 | 39.5 | 0 | -11 | 2.5 | 1 | 0 | -2.5 | 0 | 15.8 |
|  | x7 | 9.5 | 0 | -11 | 1.5 | 0 | -1 | -1.5 | 1 | 6.33 |
| Індексний рядок | F(X2) | 3.5+9.5M | 0 | 9-11M | -3.5+1.5M | 0 | -1M | 3.5-2.5M | 0 | 0 |

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться позитивні коефіцієнти

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідної змінної x3, так як це найбільший коефіцієнт .

Обчислимо значення Di по рядках як частку від ділення

і з них виберемо найменше:

Отже, 3-ий рядок є ведучим

Дозвільний елемент дорівнює 1.5 і знаходиться на перетині ведучого стовпця і головною рядка

Формуємо наступну частину симплексної таблиці.

Замість змінної x7 в план 2 увійде змінна x3

Рядок, відповідної змінної x3 в плані 2, отримана в результаті поділу всіх елементів рядка x7 плану 1 на дозвільний елемент ДЕ=1.5

На місці дозвільного елемента в плані 2 отримуємо 1.

В інших клітинах стовпця x3 плану 2 записуємо нулі.

Таким чином, у новому плані 2 заповнені рядок x3 і стовпець x3 .

Всі інші елементи нового плану 2, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника.

Кінець ітерацій: індексний рядок не містить негативних елементів - знайдений оптимальний план

Остаточний варіант симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| 3 | x1 | 3.67 | 1 | -1.67 | 0 | 0 | -0.3333 | 0 | 0.3333 |
|  | x4 | 23.67 | 0 | 7.33 | 0 | 1 | 1.67 | 0 | -1.67 |
|  | x3 | 6.33 | 0 | -7.33 | 1 | 0 | -0.6667 | -1 | 0.6667 |
| Індексний рядок | F(X3) | 25.67 | 0 | -16.67 | 0 | 0 | -2.33 | -1M | 2.33-1M |

Оптимальний план можна записати так:

x1 = 3.67

x4 = 23.67

x3 = 6.33

F(X) = 7\*3.67 = 25.67

Складемо двоїсту задачу до прямої задачі.

2y1+5y2+3y3≤7

4y1-y2-5y3≤5

y1+42y2+11y3 => max

y1 ≥ 0

y2 ≤ 0

y3 ≥ 0

Рішення двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів.

Використовуючи останню інтерпретацію прямої задачі знайдемо, оптимальний план двоїстої задачі.

З першої теореми двоїстості випливає, що Y = C\*A-1.

Складемо матрицю A з компонентів векторів, що входять в оптимальний базис.

Визначивши зворотну матрицю А-1 через алгебраїчні доповнення, отримаємо:

Як видно з останнього плану симплексної таблиці, зворотна матриця A-1 розташована в стовпцях додаткових змінних .

Тоді Y = C\*A-1 =

Оптимальний план двоїстої задачі дорівнює:

y1 = 0

y2 = 0

y3 = 2.33

Z(Y) = 1\*0+42\*0+11\*2.33 = 25.67

Завдання 3

Знайти початковий розв’язок транспортної задачі методом «північно-західного кута» і мінімальної вартості. Вибравши один із знайдених початкових розв’язків, знайти оптимальний розв’язок транспортної задачі.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 5 | 1 | 4 | 200 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 140 |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 160 |
| 90 | 110 | 220 | 80 | 500 |

Розв’язок

Побудова математичної моделі. Нехай xij — кількість продукції, що перевозиться з і-го пункту виробництва до j-го споживача . Перевіримо необхідність і достатність умов розв'язання задачі:

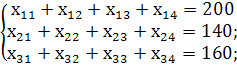


Умова балансу дотримується. Запаси рівні потребам. Отже, модель транспортної задачі є закритою.

Занесемо вихідні дані у таблицю.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 | Запаси |
| А1 | 3 | 5 | 1 | 4 | 200 |
| А2 | 4 | 1 | 2 | 3 | 140 |
| А3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 160 |
| Потреби | 90 | 110 | 220 | 80 |  |

Розпочинаємо будувати математичну модель даної задачі:



Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що весь вантаж потрібно перевезти по пунктах повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: вантаж, що може надходити до споживача від чотирьох баз, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:



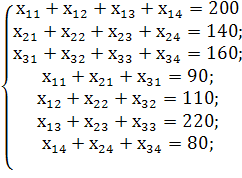
Загальні витрати, пов’язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

minZ=3x11+5x12+1x13+4x14+4x21+1x22+2x23+3x24+1x31+2x32+3x33+4x34.

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

minZ=3x11+5x12+1x13+4x14+4x21+1x22+2x23+3x24+1x31+2x32+3x33+4x34.

за умов:



Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом «північно-західного кута».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | ui |
| b1 = 90 | b2 = 110 | b3 = 220 | b4=80 |
| а1 = 200 | 3 | 5 | 1  200 | 4 | u1 = |
| а2 = 140 | 4  90 | 1  50 | 2 | 3 | u2 = |
| а3 = 160 | 1 | 2  60 | 3  20 | 5  80 | u3 = |
| vj | v1 = | v2 = | v3 = | v4 = |  |

У результаті отриманий перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Підрахуємо число зайнятих клітин таблиці, їх 6, а має бути m + n - 1 = 6. Отже, опорний план є не виродженим.

Використовуючи метод найменшої вартості, побудуємо перший опорний план транспортної задачі.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | ui |
| b1 = 90 | b2 = 110 | b3 = 220 | b4=80 |
| а1 = 200 | 3 | 5 | 1  200 | 4 | u1 = 0 |
| а2 = 140 | 4 | 1  [-] 110 | 2  20 | 3  [+] 10 | u2 = 1 |
| а3 = 160 | 1  90 | 2  [+] | 3 | 5  [-] 70 | u3 = 3 |
| vj | v1 = -2 | v2 = 0 | v3 = 1 | v4 = 2 |  |

У результаті отриманий перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Підрахуємо число зайнятих клітин таблиці, їх 6, а має бути m + n - 1 = 6. Отже, опорний план є не виродженим.

Для розв’язку візьмемо останній опорний план.

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0:

u1=0, u2=0, u3=3, v1=-2, v2=0, v3=1 v4=2. Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності ui + vj ≤ cij (для порожніх клітинок таблиці).

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(3;2): 3 + 0 > 2; ∆32 = 3 + 0 - 2 = 1

(3;3): 3 + 1 > 3; ∆33 = 3 + 1 - 3 = 1

max(1,1) = 1

Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці. Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (3;2): 2. Для цього в перспективну клітку (3;2) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (3, 4) = 70. Додаємо 70 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 70 з хij, що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати (n + m – 1).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | ui |
| b1 = 90 | b2 = 110 | b3 = 220 | b4=80 |
| а1 = 200 | 3 | 5 | 1  200 | 4 | u1 = 0 |
| а2 = 140 | 4 | 1  40 | 2  20 | 3  80 | u2 = 1 |
| а3 = 160 | 1  90 | 2  70 | 3 | 5 | u3 = 2 |
| vj | v1 = -1 | v2 = 0 | v3 = 1 | v4 = 2 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану, тобто повторюємо описані раніше дії.

Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

u1 + v3 = 1; 0 + v3 = 1; v3 = 1

u2 + v3 = 2; 1 + u2 = 2; u2 = 1

u2 + v2 = 1; 1 + v2 = 1; v2 = 0

u3 + v2 = 2; 0 + u3 = 2; u3 = 2

u3 + v1 = 1; 2 + v1 = 1; v1 = -1

u2 + v4 = 3; 1 + v4 = 3; v4 = 2

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний.

Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

F(x) = 1\*200 + 1\*40 + 2\*20 + 3\*80 + 1\*90 + 2\*70 = 750

За оптимальним планом перевезень загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 750 грн.