Завдання 1

Побудувати математичну модель задачі.

Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на виготовлення 100 електроплит. Конструкторами запропоновано до випуску три моделі плит А, В і С за ціною відповідно 100, 60 та 50 грн.од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей та запас сировини на фірмі наведено в таблиці.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Сировина | Норми витрат сировини, грн.од. | | | Запас сировини, грн.од. |
| А | В | С |
| І | 10 | 4 | 5 | 700 |
| ІІ | 3 | 2 | 1 | 400 |
| Ціна, грн.од. | 100 | 60 | 50 |  |

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей, що максимізують дохід фірми.

Розв’язок

Складаємо математичну модель задачі. Позначимо через х1 кількість електроплит 1-ї моделі, що виготовляє фірма за деяким планом, а через х2 кількість електроплит 2-ї моделі та через та через х3 кількість виробів 3-ї моделі Тоді прибуток, отриманий фірмою від реалізації цих електроплит, складає

∫ = 100х1 + 60х2+ 50х3.

Витрати сировини на виготовлення такої кількості виробів складають відповідно:

А =10х1 + 4х2 + 5х3,

В =3х1 + 2х2 + 1х3,

Оскільки запаси сировини обмежені, то повинні виконуватись нерівності:

10х1 + 4х2 + 5х3 ≤ 700

3х1 + 2х2 + 1х3 ≤ 400

Оскільки, кількість виробів є величина невід'ємна, то додатково повинні виконуватись ще нерівності: х1> 0, х2> 0, х3> 0.

Таким чином, приходимо до математичної моделі (задачі лінійного програмування):

Знайти х1 , х2, х3 такі, що функція∫ = 100х1 + 60х2 + 50х3 досягає максимуму при системі обмежень:



Розв'язуємо задачу лінійного програмування симплексним методом. Введемо балансні змінні х4 ≥ 0, х5 ≥ 0. Їх величина поки що невідома, але така, що перетворює відповідну нерівність у точну рівність. Після цього, задача лінійного програмування набуде вигляду: ∫ = 100х1 + 60х2 + 50х3 → max при обмеженнях



де х1,...,х5>0

Оскільки завдання вирішується на максимум, то ведучий стовпець вибирають по максимальному негативному кількістю та індексного рядку. Всі перетворення проводять до тих пір, поки не вийдуть в індексному рядку позитивні елементи.

Складаємо симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базис | x1 | х2 | x3 | x4 | x5 | b |
|  | I | II | III | IV | V | VI | VII |
| а | 0 | 10 | 4 | 5 | 1 | 0 | 700 |
| б | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 400 |
| d | Індексний рядок, ∆i | 100 | 60 | 50 | 0 | 0 | 0 |

Складаємо перший план. Оскільки змінних х4,х5в цільовій функції немає, то їм відповідають коефіцієнти 0;

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | min |
| 1 | x4 | 700 | 10 | 4 | 5 | 1 | 0 | 70 |
|  | x5 | 400 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 133.33 |
| Індексний рядок | F(X1) | 0 | -100 | -60 | -50 | 0 | 0 | 0 |

Оскільки, в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти, поточний опорний план неоптимальний, тому будуємо новий план. У якості ведучого виберемо елемент у стовбці х1, оскільки значення коефіцієнта за модулем найбільше.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | min |
| 2 | x1 | 70 | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 0 | 175 |
|  | x5 | 190 | 0 | 0.8 | -0.5 | -0.3 | 1 | 237.5 |
| Індексний рядок | F(X2) | 7000 | 0 | -20 | 0 | 10 | 0 | 0 |

Даний план, також не оптимальний, тому будуємо знову нову симплексну таблицю. У якості ведучого виберемо елемент у стовбці х2.

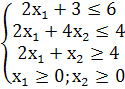
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | min |
| 3 | x2 | 175 | 2.5 | 1 | 1.25 | 0.25 | 0 | 175 |
|  | x5 | 50 | -2 | 0 | -1.5 | -0.5 | 1 | 237.5 |
| Індексний рядок | F(X3) | 10500 | 50 | 0 | 25 | 15 | 0 | 0 |

Оскільки всі оцінки >0, то знайдено оптимальний план, що забезпечує максимальний прибуток: х1=0, х2=175, х3=0, х4=0, х5=50. Прибуток, при випуску продукції за цим планом, становить 10500 грн.

Дамо економічну трактову розв'язку: щоби досягнути максимально можливого, за умов задачі, прибутку (10500 грн.), необхідно виробів другої моделі випустити 175 од.

Завдання 2

Записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв’язати одну із задач симплексним методом і визначити оптимальний план іншої задачі. Оптимальні результати перевірити графічно.



Розв’язок

Розв’яжемо задачу лінійного програмування симплексним методом.

Визначимо максимальне значення цільової функції F(X) = x1+2x2 за таких умов-обмежень.

2x1+3x2≤6

2x1+4x2≤4

2x1+x2≥4

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної форми).

2x1 + 3x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 = 6

2x1 + 4x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 = 4

2x1 + 1x2 + 0x3 + 0x4-1x5 = 4

Введемо штучні змінні x.

2x1 + 3x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 = 6

2x1 + 4x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 = 4

2x1 + 1x2 + 0x3 + 0x4-1x5 + 1x6 = 4

Для постановки завдання на максимум цільову функцію запишемо так:

F(X) = x1+2x2 - Mx6 => max

Отриманий базис називається штучним, а метод рішення називається методом штучного базису.

З рівнянь висловлюємо штучні змінні:

x6 = 4-2x1-x2+x5

які підставимо в цільову функцію:

F(X) = x1 + 2x2 - M(4-2x1-x2+x5) => max

або

F(X) = (1+2M)x1+(2+1M)x2+(-1M)x5+(-4M) => max

Матриця коефіцієнтів A = a(ij) цієї системи рівнянь має вигляд:

Вирішимо систему рівнянь відносно базисних змінних:

x3, x4, x6,

Вважаючи, що вільні змінні рівні 0, отримаємо перші опорний план:

X1 = (0,0,6,4,0,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 0 | x3 | 6 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | x4 | 4 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  | x6 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| Індексний рядок | F(X0) | -4M | -1-2M | -2-1M | 0 | 0 | 1M | 0 |

Переходимо до основного алгоритму симплекс-методу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| 1 | x3 | 6 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
|  | x4 | 4 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
|  | x6 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 |
| Індексний рядок | F(X1) | -4M | -1-2M | -2-1M | 0 | 0 | 1M | 0 | 0 |

індексний рядок симплекс метод

Оскільки, в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти, поточний опорний план неоптимальний, тому будуємо новий план. У якості ведучого виберемо елемент у стовбці х1, оскільки значення коефіцієнта за модулем найбільше.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| 2 | x3 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 |
|  | x4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
|  | x1 | 2 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 4 |
| Індексний рядок | F(X2) | 2 | 0 | -1.5 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5+1M | 0 |

Даний план, також не оптимальний, тому будуємо знову нову симплексну таблицю. У якості ведучого виберемо елемент у стовбці х2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| План | Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 3 | x3 | 2 | 0 | 0 | 1 | -0.6667 | 0.3333 | -0.3333 |
|  | x2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.3333 | 0.3333 | -0.3333 |
|  | x1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -0.1667 | -0.6667 | 0.6667 |
| Індексний рядок | F(X3) | 2 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 1M |

Остаточний варіант симплекс-таблиці оптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться позитивні коефіцієнти.

Оптимальний план можна записати так:

x3 = 2

x2 = 0

x1 = 2

F(X) = 1\*2 + 2\*0 = 2

Складемо двоїсту задачу до прямої задачі.

2y1+2y2+2y3≥1

3y1+4y2+y3≥2

6y1+4y2+4y3 => min

y1 ≥ 0

y2 ≥ 0

y3 ≤ 0

Рішення двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів.

Використовуючи останню ітерацію прямої задачі знайдемо, оптимальний план двоїстої задачі.

З першої теореми двоїстості випливає, що Y = C\*A-1.

Складемо матрицю A з компонентів векторів, що входять в оптимальний базис.

Визначивши зворотну матрицю А-1 через алгебраїчні доповнення, отримаємо:

Як видно з останнього плану симплексного таблиці, зворотна матриця A-1 розташована в стовпцях додаткових змінних .

Тоді Y = C\*A-1 =

Оптимальний план двоїстої задачі дорівнює:

y1 = 0

y2 = 0.5

y3 = 0

Z(Y) = 6\*0+4\*0.5+4\*0 = 2

Завдання 3

Розв’язати транспортну задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 2 | 3 | 6 | 1 | 150 |
| 1 | 1 | 4 | 4 | 2 | 320 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 400 |
| 100 | 120 | 100 | 200 | 300 |  |

Розв’язок

Побудова математичної моделі. Нехай xij — кількість продукції, що перевозиться з і-го пункту виробництва до j-го споживача . Оскільки , то задачу треба закрити, тобто збалансувати (зрівняти) поставки й потреби:



У нашому випадку робиться це введенням фіктивного постачальника, оскільки . З уведенням фіктивного споживача транспортній таблиці додатково заявляється n робочих клітинок.

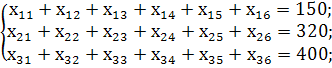


Ціни, додатковим клітинкам, щоб фіктивний стовбець був нейтральним щодо оптимального вибору планових перевезень, призначаються усі рівні нулю.

Занесемо вихідні дані у таблицю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 | В5 | В6 | Запаси |
| А1 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 | 0 | 150 |
| А2 | 1 | 1 | 4 | 4 | 2 | 0 | 320 |
| А3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0 | 400 |
| Потреби | 100 | 120 | 100 | 200 | 300 | 50 |  |

Забезпечивши закритість розв'язуваної задачі, розпочинаємо будувати математичну модель даної задачі:



Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що весь вантаж потрібно перевезти по пунктах повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: вантаж, що може надходити до споживача від чотирьох баз, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:



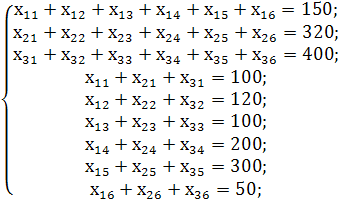
Загальні витрати, пов’язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

minZ=5x11+2x12+3x13+6x14+1x15+0x16+1x21+1x22+4x23+4x24+2x25+0x26+4x31+1x32+2x33+3x34+ +5x35+0x36.

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

minZ=5x11+2x12+3x13+6x14+1x15+0x16+1x21+1x22+4x23+4x24+2x25+0x26+4x31+1x32+2x33+3x34+ +5x35+0x36.

за умов:



Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом «північно-західного кута».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5  100 | 2  [-] 50 | 3 | 6 | 1  [+] | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1 | 1  [+] 70 | 4  100 | 4  [-] 150 | 2 | 0 | u2 = -1 |
| а3 = 400 | 4 | 1 | 2 | 3  [+] 50 | 5  [-] 300 | 0  50 | u3 = -2 |
| vj | v1 = 5 | v2 = 2 | v3 = 5 | v4 = 5 | v5 = 7 | v6 = 2 |  |

В результаті отримано перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Підрахуємо число зайнятих клітин таблиці, їх 8, а має бути m+n-1=8. Отже, опорний план є не виродженим.

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0:

u1 + v1 = 5; 0 + v1 = 5; v1 = 5

u1 + v2 = 2; 0 + v2 = 2; v2 = 2

u2 + v2 = 1; 2 + u2 = 1; u2 = -1

u2 + v3 = 4; -1 + v3 = 4; v3 = 5

u2 + v4 = 4; -1 + v4 = 4; v4 = 5

u3 + v4 = 3; 5 + u3 = 3; u3 = -2

u3 + v5 = 5; -2 + v5 = 5; v5 = 7

u3 + v6 = 0; -2 + v6 = 0; v6 = 2

Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності ui + vj ≤ cij (для порожніх клітинок таблиці).

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(1;3): 0 + 5 > 3; ∆13 = 0 + 5 - 3 = 2

(1;5): 0 + 7 > 1; ∆15 = 0 + 7 - 1 = 6

(1;6): 0 + 2 > 0; ∆16 = 0 + 2 - 0 = 2

(2;1): -1 + 5 > 1; ∆21 = -1 + 5 - 1 = 3

(2;5): -1 + 7 > 2; ∆25 = -1 + 7 - 2 = 4

(2;6): -1 + 2 > 0; ∆26 = -1 + 2 - 0 = 1

(3;3): -2 + 5 > 2; ∆33 = -2 + 5 - 2 = 1

Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці. Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1;5): 1. Для цього в перспективну клітку (1;5) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (1, 2) = 50. Додаємо 50 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 50 з хij, що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

Для цього у порожню клітинку (1;5) переносимо менше з чисел хij, які розміщені в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число хij додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «–».

Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати (n + m – 1).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5  [-] 100 | 2 | 3 | 6 | 1  [+] 50 | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1  [+] | 1  120 | 4  100 | 4  [-] 100 | 2 | 0 | u2 = 5 |
| а3 = 400 | 4 | 1 | 2 | 3  [+] 100 | 5  [-] 250 | 0  50 | u3 = 4 |
| vj | v1 = 5 | v2 = -4 | v3 = -1 | v4 = -1 | v5 = 1 | v6 = -4 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(2;1): 5 + 5 > 1; ∆21 = 5 + 5 - 1 = 9

(2;5): 5 + 1 > 2; ∆25 = 5 + 1 - 2 = 4

(2;6): 5 + -4 > 0; ∆26 = 5 + -4 - 0 = 1

(3;1): 4 + 5 > 4; ∆31 = 4 + 5 - 4 = 5

(3;3): 4 + -1 > 2; ∆33 = 4 + -1 - 2 = 1

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (2;1): 1

Для цього в перспективну клітку (2;1) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (2, 4) = 100. Додаємо 100 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 100 з Хij, що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5  [-] 0 | 2 | 3 | 6 | 1  [+] 150 | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1  [+] 100 | 1  120 | 4  [-] 100 | 4 | 2 | 0 | u2 = -4 |
| а3 = 400 | 4 | 1 | 2  [+] | 3  200 | 5  [-] 150 | 0  50 | u3 = 4 |
| vj | v1 = 5 | v2 = 5 | v3 = 8 | v4 = -1 | v5 = 1 | v6 = -4 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(1;2): 0 + 5 > 2; ∆12 = 0 + 5 - 2 = 3

(1;3): 0 + 8 > 3; ∆13 = 0 + 8 - 3 = 5

(3;1): 4 + 5 > 4; ∆31 = 4 + 5 - 4 = 5

(3;2): 4 + 5 > 1; ∆32 = 4 + 5 - 1 = 8

(3;3): 4 + 8 > 2; ∆33 = 4 + 8 - 2 = 10

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (3;3): 2

Для цього в перспективну клітку (3;3) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (1, 1) = 0. Додаємо 0 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 0 з Хij, що стоять в мінусових клітинах.

В результаті отримаємо новий опорний план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1  150 | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1  100 | 1  120 | 4  [-] 100 | 4 | 2  [+] | 0 | u2 = 6 |
| а3 = 400 | 4 | 1 | 2  [+] 0 | 3  200 | 5  [-] 150 | 0  50 | u3 = 4 |
| vj | v1 = -5 | v2 = -5 | v3 = -2 | v4 = -1 | v5 = 1 | v6 = -4 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(2;4): 6 + -1 > 4; ∆24 = 6 + -1 - 4 = 1

(2;5): 6 + 1 > 2; ∆25 = 6 + 1 - 2 = 5

(2;6): 6 + -4 > 0; ∆26 = 6 + -4 - 0 = 2

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (2;5): 2

Для цього в перспективну клітку (2;5) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (2, 3) = 100. Додаємо 100 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 100 з Хij, що стоять в мінусових клітинах.

В результаті отримаємо новий опорний план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1  150 | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1  100 | 1  [-] 120 | 4 | 4 | 2  [+] 100 | 0 | u2 = 1 |
| а3 = 400 | 4 | 1  [+] | 2  100 | 3  200 | 5  [-] 50 | 0  50 | u3 = 4 |
| vj | v1 = 0 | v2 = 0 | v3 = -2 | v4 = -1 | v5 = 1 | v6 = -4 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких ui + vi > cij

(3;2): 4 + 0 > 1; ∆32 = 4 + 0 - 1 = 3

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (3;2): 1

Для цього в перспективну клітку (3;2) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

З вантажів хij що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто у = min (3, 5) = 50. Додаємо 50 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 50 з Хij, що стоять в мінусових клітинах.

В результаті отримаємо новий опорний план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai | Bj | | | | | | ui |
|  | b1 = 100 | b2 = 120 | b3 = 100 | b4=200 | b5=300 | b6=50 |
| а1 = 150 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1  150 | 0 | u1 = 0 |
| а2 = 320 | 1  100 | 1  70 | 4 | 4 | 2  150 | 0 | u2 = 1 |
| а3 = 400 | 4 | 1  50 | 2  100 | 3  200 | 5 | 0  50 | u3 = 4 |
| vj | v1 = 0 | v2 = 0 | v3 = -2 | v4 = -1 | v5 = 1 | v6 = -4 |  |

Перевіримо оптимальність опорного плану, тобто повторюємо описані раніше дії.

Знайдемо потенціали ui, vi. по зайнятих клітинам таблиці, в яких ui + vi = cij, вважаючи, що u1 = 0.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний.

Мінімальні витрати складуть:

F(x) = 1\*150 + 1\*100 + 1\*70 + 2\*150 + 1\*50 + 2\*100 + 3\*200 + 0\*50 = 1470

За оптимальним планом перевезень загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 1470 грн.

Завдання 4

Знайти графічним методом екстремуми функцій в області, визначеній нерівностями.

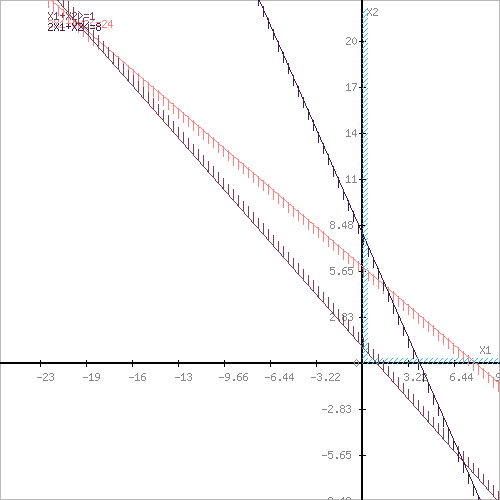


.

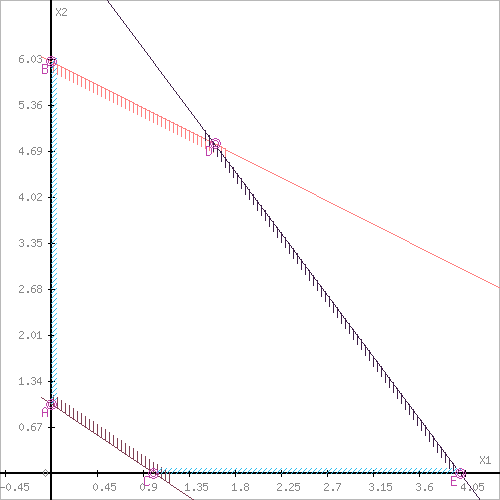


Розв’язок

Побудуємо область допустимих рішень, тобто вирішимо графічно систему нерівностей. Для цього побудуємо кожну пряму і визначимо півплощини, задані нерівностями (півплощини позначені штрихом).



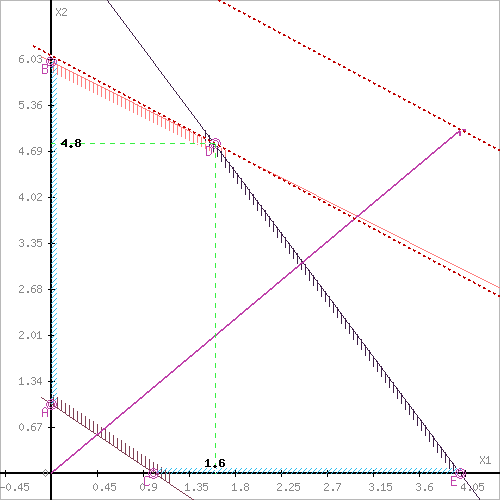
Межі області



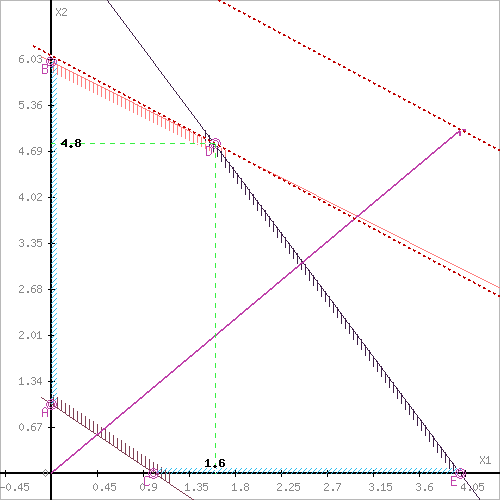
Цільова функція F(x) => max

Розглянемо цільову функцію завдання F = 4X1+5X2 => max.

Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = 0: F = 4X1+5X2 = 0. Будемо рухати цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить максимальне рішення, тому рухався прямо до останнього торкання позначеної області. На графіку ця пряма позначена пунктирною лінією.



Рівний масштаб



Перетином півплощини буде область, яка представляє собою багатокутник, координати точок якого задовольняють умові нерівностей системи обмежень задачі.

Пряма F(x) = const перетинає область у точці D. Оскільки точка D отримана в результаті перетину прямих 1 i 3, то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

3x1+4x2≤24

2x1+x2≤8

Вирішивши систему рівнянь, одержимо: x1 = 1.6, x2 = 4.8

Звідки знайдемо максимальне значення цільової функції:

F(X) = 4\*1.6 + 5\*4.8 = 30.4