Реферат

**«Конечные разности. Погрешности»**

**1. Погрешности**

**1.1 Действительные и конечно-разрядные числа**

Представление действительных чисел в вычислительных машинах с фиксированной разрядной сеткой влечет появление инструментальной погрешности в обрабатываемых числах и результатах арифметических действий.

Принятое при вводе преобразование исходных действительных чисел в нормализованную экспоненциальную форму и размещение их в ограниченной разрядной сетке ЭВМ с порядком и дробной частью (мантиссой) в общем случае вносит в этот операнд относительную инструментальную погрешность, величина которой не превышает



где *n* – число значащих дробных двоичных разрядов, отведенных для хранения мантиссы.

*Приближенное конечно-разрядное* *число a* – это действительное число, занимающее заданное количество разрядов и округленное до числа с ближайшим значением достоверного младшего разряда. Приближенные действительные числа имеют абсолютную и относительную погрешности. Эти погрешности при анализе распространения ошибки при вычислениях приписываются к приближенному числу результата и связываются между собой следующим образом:



Если число *a* = 5,3812 имеет все разряды достоверные, то его *абсолютная погрешность* принимается равной половине единицы младшего разряда, т.е. =0.00005, а *относительная погрешность*, округляемая обычно до одного-двух значащих достоверных разрядов, будет



Всякие арифметические операции с операндами, представленными в системе с плавающей точкой, в общем случае вносят в результат аналогичную относительную инструментальную погрешность:



где fl(•) – указание на арифметику с плавающей точкой,

– арифметическая операция из множества .



Значение результата, равное нулю принудительно устанавливается в машинах при операциях умножения с двумя операндами, приводящее к исчезновению порядка (отрицательный порядок по модулю не умещается на отведенном для него количестве разрядов).

Несколько иначе обстоит дело при вычитании чисел с плавающей точкой и одинаковым порядком:

,



.



Из последнего можно заключить, что для операции вычитания относительная погрешность численно определяется количеством значащих разрядов в результате, которое из-за выполнения нормализации не может быть меньше . Т.е. погрешность приближается к 100% последовательно. Это предупреждение адресуется составителям вычислительных алгоритмов, которым необходимо выискивать эквивалентные формулы с контролем величины операндов, в определенных ситуациях можно использовать программный переход к вычислениям с удвоенной точностью.



При выполнении аддитивных операций с приближенными операндами погрешность результата равна сумме абсолютных погрешностей всех чисел, участвовавших в операции. Выполнение мультипликативных операций вносит в результат относительную погрешность, равную сумме относительных погрешностей каждого из операндов.

**1.2 Погрешность алгоритмов**

Инструментальные погрешности арифметических машинных команд из-за различия и непредсказуемости величины ошибки результата нарушают дистрибутивный, ассоциативный и коммутативный законы арифметики. Каждый же программист, составляя программу, уже на уровне интуиции пользуется ими, как незыблемыми. Отсюда различие в точности тех или иных вычислительных алгоритмов и трудно уловимые ошибки.

Проследить накопление вычислительной погрешности алгоритма для операндов, которые имеют производные, удобно, если результат *r* каждой двуместной арифметической операции умножать на множитель с последующим разложением результирующей функции алгоритма по степеням этого множителя или этих множителей, если в группах операторов отличаются по величине. Например, для алгоритма вычисления значения полинома третьей степени по *схеме Горнера* с псевдокодом:



P:=0; j:=3;

repeat

S:=a[j]\*x+a [j-1];

P:=P+S\*x;

j:=j-1;

until j=1;

функция алгоритма будет:



Учитывая, что , последнее выражение дает возможность после раскрытия скобок выделить из суммы и оценить сначала абсолютную погрешность, а по абсолютной погрешности – относительную:



Условные арифметические операторы с проверкой равенства операндов необходимо заменять проверкой вида: .



**2. Конечные разности**

**2.1 Определение конечных разностей**

Конечная разность «вперед» для таблично заданной функции в *i*-той точке определяется выражением: , где функция задана, как функция целочисленного аргумента с единичным шагом по аргументу *i*.



Для аналитически заданной и протабулированной с постоянным шагом *h* функции определяющее соотношение имеет вид:



.



Преобразование таблицы функции в функцию целочисленного аргумента осуществляют при помощи линейного соотношения между аргументами *x* и *i*: .



Коэффициенты *a* и *b* находят из системы уравнений, получаемой в результате подстановки в пределах заданной таблицы вместо *x* и *i* сначала начальных значений аргументов , а затем конечных . При этом начало таблицы удобно совместить с началом координат функции с целочисленным аргументом(). Тогда для таблицы с (*n+*1)*–* й строками:



,



Повторные конечные разности *n*-го порядка в *i*-той точке для табличной функции определяются соотношением



.



**2.2** **Конечно-разностные операторы**

Линейность конечно-разностного оператора позволяет ввести конечно-разностный оператор сдвига и многочлены от оператора с целыми коэффициентами, такие, как , где должно рассматриваться как оператор повторной разности *k*-того порядка.



Действие любого многочлена на функцию *g*(*i*) определяется как



.



Применение оператора сдвига к *g*(*i*) преобразует последнее в *g* (*i*+1):

*g* (*i*+1) *= E g*(*i*) *=* (1+) *g*(*i*)*= g*(*i*) *+ g*(*i*)*.*



Повторное применение оператора сдвига позволяет выразить (*i+n*)*–* е значение ординаты функции *g* через конечные разности различных порядков:



где – число сочетаний из *n* элементов по *k*;



– многочлен степени *k* от целой переменной *n* (), имеющий *k* сомножителей. При *k=n* .



В силу линейности оператора сдвига можно конечно-разностный оператор выразить, как , и определить повторные конечные разности через многочлены от операторов сдвига так .



Последнее позволяет формульно выражать *n*-ную повторную разность через (*n*+1) ординату табличной функции, начиная с *i*-той строки:



Если в выражении для *g* (*i+n*) положить *i*=0 и вместо подставить их факториальные представления, то после несложных преобразований получится разложение функции целочисленного аргумента по многочленам , которые в литературе называют факториальными:



.



Можно поставить задачу разложения и функции действительной переменной *f*(*x*) по многочленам относительно начала координат (аналогично ряду Маклорена), т.е. . Если последовательно находить конечные разности от левой и правой частей, то, зная, что и , после подстановки *x*=0 будем получать выражения для коэффициентов разложения . У многочленов *k*-той степени, , поэтому



.



Такое разложение табличной функции *f*(*x*) в литературе называют интерполяционным многочленом Ньютона для равных интервалов.

**2.3** **Взаимосвязь операторов разности и дифференцирования**

Значение функции на удалении *h* от некоторой точки можно выразить через значения производных в этой точке, разложив ее в ряд Тейлора:



где – оператор дифференцирования,



– оператор сдвига, выраженный через оператор *p*.



*h* – шаг по оси действительной переменной

Из равенства операторов сдвига, выраженных через *p* и , можно получить взаимосвязь этих линейных операторов:



,



Оператор дифференцирования порядка *n*, перенесенный в точку, удаленную от текущей, например, на 2 шага вперед представляется так:

.



Выполнив алгебраическое перемножение многочленов с конечно-разностными операторами и ограничившись операторами со степенью не выше *n*, получим одну из возможных аппроксимаций оператора дифференцирования. Действуя таким сложным конечно-разностным оператором на ординату *f*(*x*)*,* получаем формулу для вычисления *n*-й производной в точке по значениям ее конечных разностей. Например, для *n*=2, отбрасывая все повторные разности выше третьего порядка, получим:



.



Если *f*(*x*) является многочленом степени *n*, то повторные разности (*n*+1)*–* го порядка тождественно равны нулю. Приравнивая нулю повторные разности порядков выше *n* мы фактически аппроксимируем *f*(*x*) многочленом степени *n*.

В предыдущем выражении, выразив повторные разности через ординаты табличной функции, получим еще один вид формулы для вычисления значения производной:

.



Для целочисленного аргумента табличной функции запись выражения можно упростить, если положить *h*=1 и



**2.4** **Исчисление конечных разностей**

Разложение функций в ряд по факториальным многочленам (интерполяционным многочленам Ньютона в частности) дает возможность получать формулы суммирования функциональных рядов в виде аналитических выражений, зависящих от пределов. Эта возможность открывается в связи с тем, что суммировать конечные разности не представляет большой сложности, а выразить конечную разность от факториального многочлена через факториальный же многочлен можно, воспользовавшись соотношением:



Факториальные многочлены по отношению к исчислению разностей ведут себя так же, как степенные функции в исчислении производных: дифференцирование тоже понижает степень многочлена на единицу. Это свойство позволяет в факториальном разложении заменить факториальные многочлены своими конечными разностями следующего вида:



Замена хороша тем, что суммирование конечных разностей в заданных пределах мнемонически весьма напоминает вычисление определенного интеграла от функции по ее первообразной:



Если , то



.



Процедуру суммирования функционального ряда продемонстрируем на примере получения суммы квадратов натурального ряда чисел в пределах от *a*=1 до *b*=5 (Для проверки: ):



Вторая сумма по переменной *n* представляет разложение по факториальным многочленам, в которое входят значения конечных разностей 0, 1 и 2-го порядков, вычисленные в начале координат целочисленной переменной, т.е. при *x=*0. Они соответственно равны:



,



,



.



После подстановки значений разностей во второй сумме останутся два факториальных полинома: первой и второй степеней:



Если распределить вычисление сумм по слагаемым, то мы перейдем к суммированию конечных разностей от факториальных многочленов:



**Литература**

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. – М.: Наука, 1966. – 248 с.
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
4. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
5. Калашников В.И. Аналоговые и гибридные вычислительные устройства: Учеб. пособие. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 196 с.
6. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш.шк., 2001. 383 с.
7. Волков, Е.А. Численные методы. СПб.: Лань, 2004. 248 с.
8. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП «РАСКО», 1991. 272 с.
9. Шуп, Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высш. шк., 1990. 255 с.
10. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. М.: Высш. шк., 2000. 192 с.