

УДК 330.105

ББК 65.290.2я73

Д79

*РЕЦЕНЗЕНТЫ:*

кафедра математического моделирования экономических процессов

Финансовой академии при Правительстве РФ;

доктор экономических наук, профессор А.В. Мищенко

**Дубров А.М.**

Д79 Моделирование рисковых ситуации в экономике и биз­несе: Учеб. пособие/А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев; Под ред. Б.А. Лагоши.— М.: Финансы и статисти­ка, 2000.— 176 с.: ил. ISBN 5-279-02068-0.

Рассматриваются подходы к учету факторов неопределенности и риска в экономической практике, а также математические модели, используемые для этих целей. Анализируются ситуации, возникающие в условиях неопределен­ности и недостатка информации при принятии управленческих решений. Со­держание иллюстрируется прикладными задачами с решениями.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Статистика», «Мате­матические методы и исследование операций в экономике», «Информацион­ные системы в экономике» и другим экономическим специальностям. Для ас­пирантов, преподавателей, а также для предпринимателей, организующих свой бизнес.

Д 2404000000-031 136 – 98 УДК 330.105

010(01)-2000 ББК 65.290-2,73

ISBN 5-279-02068-0 © А.М. Дубров, Б.А. Лагоша

Е.Ю. Хрусталев. 1999

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1 РИСК И ЕГО ИЗМЕРЕНИЕ 4

1.1. РИСК И ПРИБЫЛЬ 4

1.2. МЕРЫ РИСКА 6

Глава 2 СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ИГРЫ 8

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР 8

2.2. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ 12

2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ) 13

2.4. МАЖОРИРОВАНИЕ (ДОМИНИРОВАНИЕ) СТРАТЕГИЙ 16

Задачи для самостоятельного решения 17

Глава 3 ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА (ИГРЫ С ПРИРОДОЙ) 18

3.1. ПОНЯТИЕ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ 18

3.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ 20

3.3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА 22

3.4. ВЫБОР РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ (ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ) 23

3.4.1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ 23

3.4.2. АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ 24

3.4.3. ОЖИДАЕМАЯ ЦЕННОСТЬ ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ 27

3.5. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ 27

Глава 4 ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ НЕЙМАНА - МОРГЕНШТЕРНА 33

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ 33

4.2. ИЗМЕРЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ К РИСКУ 36

4.3. СТРАХОВАНИЕ ОТ РИСКА 38

Глава 5 ФИНАНСОВЫЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА 42

5.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ФИНАНСОВ 42

5.2. ОЦЕНКА ТЕКУЩЕЙ СТОИМОСТИ ФИРМЫ 45

5.2.1. ЧИСТАЯ ПРИВЕДЕННАЯ СТОИМОСТЬ (БЕЗРИСКОВАЯ СИТУАЦИЯ) 45

5.2.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЛЯ РИСКОВАННОГО ПРОЕКТА 47

5.3. ОЦЕНКА ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОЕКТА 48

5.4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТА 51

Глава 6 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ 53

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ 53

6.2. СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИГР 54

6.2.1. ВЫБОР ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ 57

6.2.2. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ 60

Глава 7 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ 62

7.1. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ 62

7.2. ИНВЕСТИЦИИ В РАЗРАБОТКУ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ 63

Глава 8 ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ 65

8.1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАРШРУТОВ ГОРОДСКОГО ТРАНСПОРТА 65

8.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ 68

8.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ПАРТИИ ГОТОВЫХ ИЗДЕЛИЙ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕБОЕВ ПРОИЗВОДСТВА 70

8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАПАСА ПРОДУКЦИИ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ 75

ПРИЛОЖЕНИЕ 78

СВЯЗЬ МАТРИЧНЫХ ИГР С ЛИНЕЙНЫМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ИГР). ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 78

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ 82

ЛИТЕРАТУРА 83

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 84

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой читателю книге основное внимание уделяет­ся методам решения задач, возникающих в рисковых ситуациях. В Словаре русского языка С. И. Ожегова термин «риск» опреде­ляется как «возможная опасность» и «действие наудачу в надеж­де на счастливый исход». Следовательно, риск предполагает возможность наступления неблагоприятного события. Для лю­бого бизнеса важно не избежать риск вообще, а предвидеть его и принять наилучшее решение относительно определенного кри­терия, отражающего основной интерес предпринимателя.

Теоретической основой и практическим инструментарием анализа и прогнозирования решений в экономике и бизнесе яв­ляются экономико-математические модели и проводимые по ним расчеты.

В настоящем учебном пособии при рассмотрении моделей принятия решений в условиях неопределенности и риска даются практические рекомендации по применению этих моделей в типовых ситуациях. В данном случае основная трудность заклю­чается не в выполнении расчетов, а в построении самих моде­лей, адекватных реальной обстановке. В силу этого читателю предлагается достаточно большое число примеров построения таких моделей. Разнообразные реальные экономические ситуа­ции - потенциальные объекты моделирования - описаны в зада­чах. Некоторые из них даются с решениями, другие - предназ­начены для самостоятельной работы.

В качестве математических средств принятия решений в ус­ловиях неопределенности и риска используются: теория страте­гических игр, теория вероятностей, математическая статистика, теория статистических решений, математическое программиро­вание, теория полезности Неймана-Моргенштерна.

Книга состоит из восьми глав. Главы 1-5 отражают достаточ­но элементарный подход к исследуемой области, главы 6 - 8 -более углубленный.

Необходимый для первых пяти глав математический аппарат не выходит за пределы младших курсов экономических вузов. Здесь приводятся задачи с решениями, а в гл. 1-4 - задачи для самостоятельного выполнения. Соответственно данный матери­ал ориентирован на студентов младших курсов обучения и всех желающих получить первоначальное представление о расчете в бизнесе.

Последние три главы, как мы упоминали, дают более углуб­ленное представление об аппарате моделирования рисковых си­туаций. Прежде всего это относится к статистическим играм с природой. Изложение материала сопровождается многими при­мерами с решениями, доведенными до конкретных цифр и реко­мендаций. Эта часть книги ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей, может использоваться и практиками.

Различная целевая ориентация учебного материала объясня­ет, почему в конце каждой из глав 1 - 4 даются вопросы для самопроверки и задачи для самостоятельного решения, а в дру­гих главах они отсутствуют, но приводится большое количество задач повышенной трудности с решениями.

Глава 1 «Риск и его измерение» включает общее описание прибыли и риска от реализации проектов, методы оценки эф­фективности и рисковости проектов, связь этих показателей со склонностью к риску лица, принимающего решение.

Глава 2 «Стратегические игры» содержит описание игр двух лиц с противоположными интересами. Участники игры осознан­но противодействуют друг другу, что соответствует, например, конкуренции фирм на одном рынке. Фирмы пытаются реализо­вать свои интересы и помешать в этом конкурентам. Рассматри­вается простейший графический метод решения матричных игр и указывается на их связь с линейным программированием в общем случае при произвольном виде платежной матрицы *т* х *п.* Это универсальный метод решения игр двух лиц с нулевой сум­мой, позволяющий применить известный математический аппа­рат линейного программирования и соответствующее програм­мное обеспечение. Доказательство связанной с этим основной теоремы теории игр и пример ее применения вынесены в прило­жение.

Отличие игр, описанных в главе 3 «Принятие решений в условиях неопределенности и риска (игры с природой)», от стра­тегических игр состоит в том, что в них один из участников противодействует сопернику неосознанно. В экономике многие решения зависят от конъюнктуры, складывающейся из многих факторов (курса валют, политики правительства, уровня инфля­ции и т.д.), которые, взаимодействуя друг с другом, влияют на всех участников «игры в экономику» не персонально, а единооб­разно. Принятие решений в условиях неопределенности и риска получает развитие в виде выбора решений с помощью дерева решений (позиционные игры). Этот метод учитывает, что дей­ствия игроков, испытывающих противостояние ряда независи­мых явлений, могут быть выстроены в некоторую последователь­ность. Например, геологическая разведка недр может закончить­ся неудачей (полезных ископаемых не найдено). Если этот этап пройден успешно, то дальнейший риск связан с правильной оценкой мощности открытого месторождения. Можно построить перерабатывающий завод, который будет простаивать, а можно продать месторождение по лицензии и оказаться в проигрыше, если запасы ископаемых превысили ожидаемые значения.

Теория полезности Неймана-Моргенштерна, представленная в гл. 4, учитывает отношение лица, принимающего решения, к риску.

Глава 5 «Финансовые решения в условиях риска» отражает некоторые аспекты банковской и финансовой деятельности, ко­торые в рамках рыночной экономики приобретают особо риско­вый характер и поэтому требуют более детального исследова­ния. Приведены две динамические модели планирования финан­сов в форме задачи линейного программирования с решениями. Рассмотрена методика оценки стоимости фирмы на примере неопределенно долго «живущей» акционерной фирмы. Вырабо­танный при этом критерий живучести сравнивается с альтерна­тивными популярными, но могущими оказаться неточными кри­териями.

Глава 6 «Статистические игры» дает углубленное изложе­ние теории игр с природой. Используется математический ап­парат теории множеств, байесовских функций, условных веро­ятностей и др. Теория иллюстрируется множеством примеров с решениями.

Глава 7 «Инвестиционные решения» опирается на теорию предыдущих глав. Однако все рассматриваемые прикладные за­дачи в том или ином плане связаны с моделированием принятия инвестиционных решений. Для практиков, по-видимому, эта гла­ва должна представлять наибольший интерес.

В главе 8 «Задачи из разных областей хозяйственной деятель­ности» разбираются следующие задачи: возникающие на транс­порте при планировании новых пассажирских маршрутов, зада­чи обоснования выбора участков земли под посадку картофеля в зависимости от погодных условий, статистического контроля партии готовых изделий и оценки вероятности перебоев на про­изводстве, определения оптимального запаса продукции торго­вой фирмы на основе статистических данных.

Краткий словарь терминов раскрывает основные понятия теории вероятностей, математической статистики и линейного программирования, встречающиеся в данном учебном пособии.

В подготовке глав 4 и 5 принимал участие А. Б. Аронович.

Авторы благодарят доктора технических наук, профессора В.А. Бывшева и доктора экономических наук, профессора А.В. Мищенко за полезные замечания, способствовавшие улуч­шению содержания учебного пособия.

Глава 1 РИСК И ЕГО ИЗМЕРЕНИЕ

1.1. РИСК И ПРИБЫЛЬ

Любая сфера человеческой деятельности, в особенности эко­номика или бизнес, связана с принятием решений в условиях неполноты информации. Источники неопределенности могут быть самые разнообразные: нестабильность экономической и/или по­литической ситуации, неопределенность действий партнеров по бизнесу, случайные факторы, т.е. большое число обстоятельств, учесть которые не представляется возможным (например, погод­ные условия, неопределенность спроса на товары, неабсолютная надежность процессов производства, неточность информации и др.). Экономические решения с учетом перечисленных и множе­ства других неопределенных факторов принимаются в рамках так называемой теории принятия решений — аналитического подхода к выбору наилучшего действия (альтернативы) или последователь­ности действий. В зависимости от степени определенности воз­можных исходов или последствий различных действий, с которы­ми сталкивается лицо, принимающее решение (ЛПР), в теории принятия решений рассматриваются три типа моделей:

• выбор решений в условиях определенности, если относи­тельно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;

• выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каж­дый исход имеет вычисляемую или экспортно оцениваемую веро­ятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок;

• выбор решений при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием мно­жество частных исходов, но их вероятности совершенно не из­вестны или не имеют смысла.

Проблема риска и прибыли - одна из ключевых в экономи­ческой деятельности, в частности в управлении производством и финансами. Под *риском* принято понимать вероятность (угрозу) потери лицом или организацией части своих ресурсов, недопо­лучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной производственной и финансовой политики.

Различают следующие виды рисков:

• *производственный,* связанный с возможностью невыполне­ния фирмой своих обязательств перед заказчиком;

• *кредитный,* обусловленный возможностью невыполнения фирмой своих финансовых обязательств перед инвестором;

• *процентный,* возникающий вследствие непредвиденного изменения процентных ставок;

• *риск ликвидности,* обусловленный неожиданным изменени­ем кредитных и депозитных потоков;

• *инвестиционный,* вызванный возможным обесцениванием инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собствен­ных и приобретенных ценных бумаг;

• *рыночный,* связанный с вероятным колебанием рыночных процентных ставок как собственной национальной денежной единицы, так и зарубежных курсов валют.

Риск подразделяется на динамический и статический. *Дина­мический риск* связан с возникновением непредвиденных изме­нений стоимости основного капитала вследствие принятия уп­равленческих решений, а также рыночных или политических обстоятельств. Такие изменения могут привести как к потерям, так и к дополнительным доходам. *Статический риск* обуслов­лен возможностью потерь реальных активов вследствие нанесе­ния ущерба собственности и потерь дохода из-за недееспособно­сти организации.

Все участники проекта заинтересованы в том, чтобы не до­пустить полного провала проекта или хотя бы избежать убыт­ка. В условиях нестабильной, быстро меняющейся ситуации необходимо учитывать все возможные последствия от действий конкурентов, а также изменения конъюнктуры рынка. Поэто­му основное назначение анализа риска состоит в том, чтобы обеспечить партнеров информацией, необходимой для приня­тия решений о целесообразности участия в некотором проек­те, и предусмотреть меры по защите от возможных финансо­вых потерь.

При анализе риска могут использоваться следующие условия или предположения:

• потери от риска не зависят друг от друга;

• потери по одному из некоторого перечня рисков не обяза­тельно увеличивают вероятность потерь по другим;

• максимально возможный ущерб не должен превышать фи­нансовых возможностей участников проекта.

Все факторы, влияющие на рост степени риска в проекте, можно условно разделить на объективные и субъективные. *Объек­тивные факторы* непосредственно не зависят от самой фирмы: это инфляция, конкуренция, анархия, политические и экономичес­кие кризисы, экология, налоги и т.д. *Субъективные факторы* непосредственно характеризуют данную фирму: это производствен­ный потенциал, техническое оснащение, уровень производитель­ности труда, проводимая финансовая, техническая и производствен­ная политика, в частности выбор типа контракта между инвесто­ром и заказчиком. Последний фактор играет особо важную роль для фирмы, поскольку от типа контракта зависят степень риска и величина вознаграждения по окончании проекта.

Исследование риска целесообразно проводить в следующей последовательности:

• выявление объективных и субъективных факторов, влияю­щих на конкретный вид риска;

• анализ выявленных факторов;

• оценка конкретного вида риска с финансовых позиций, определяющая либо финансовую состоятельность проекта, либо его экономическую целесообразность;

• установка допустимого уровня риска;

• анализ отдельных операций по выбранному уровню риска;

• разработка мероприятий по снижению риска.

Финансирование проекта, являясь одним из наиболее важных условий эффективности его выполнения, должно быть нацелено на обеспечение потока инвестиций для планомерного выполнения проекта, на снижение капитальных затрат и риска проекта за счет оптимальной структуры инвестиции и получения налого­вых преимуществ. В плане финансирования проекта должны учитываться следующие виды рисков:

• риск нежизнеспособности проекта;

• налоговый риск;

• риск неуплаты задолженностей;

• риск незавершения строительства.

Высокая степень риска проекта приводит к необходимости поиска путей искусственного снижения его (риска) возможных последствий на состояние фирмы.

В существующей практике применяются главным образом четыре основных способа управления риском: распределение риска между всеми участниками проекта (передача части риска соисполнителям), страхование, резервирование средств на покры­тие непредвиденных расходов и диверсификация.

Анализ рисков подразделяется на два взаимно дополняющих друг друга вида: *качественный,* главная задача которого состоит в определении факторов риска и обстоятельств, приводящих к рисковым ситуациям, и *количественный,* позволяющий вычис­лить размеры отдельных рисков и риска проекта в целом.

1.2. МЕРЫ РИСКА

Наиболее распространена точка зрения, согласно которой *мерой риска* некоторого коммерческого (финансового) решения или операции следует считать среднее квадратичное отклонение (положительный квадратный корень из дисперсии) значения показателя эффективности этого решения или операции. Действи­тельно, поскольку риск обусловлен недетерминированностью исхода решения (операции), то, чем меньше разброс (дисперсия) результата решения, тем более он предсказуем, т.е. меньше риск. Если вариация (дисперсия) результата равна нулю, риск полно­стью отсутствует. Например, в условиях стабильной экономики операции с государственными ценными бумагами считаются безрисковыми.

Чаще всего показателем эффективности финансового реше­ния (операции) служит прибыль.

Рассмотрим в качестве иллюстрации выбор некоторым ли­цом одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска. Пусть имеются два проекта *А* и *В,* в которые указанное лицо может вложить средства. Проект *А* в определенный момент в будущем обеспечивает случайную величину прибыли. Предположим, что ее среднее ожидаемое значение, математическое ожидание, рав­но *тА* с дисперсией *.* Для проекта *В* эти числовые характери­стики прибыли как случайной величины предполагаются равны­ми соответственно *mB* и *.* Средние квадратичные отклонения равны соответственно *SA* и *SB*.

Подробнее описание числовых характеристик дано, напри­мер, в [2, гл.4] и [7, гл. 14].

Возможны следующие случаи:

a) *тA* = *mB, SA < SB,* следует выбрать проект *А;*

b) *тA* > *mB, SA < SB,* следуетвыбрать проект *А;*

c) *тA* > *mB, SA = SB,* следует выбрать проект *А;*

d*) тA* > *mB, SA > SB;*

e) *тA* < *mB, SA < SB*.

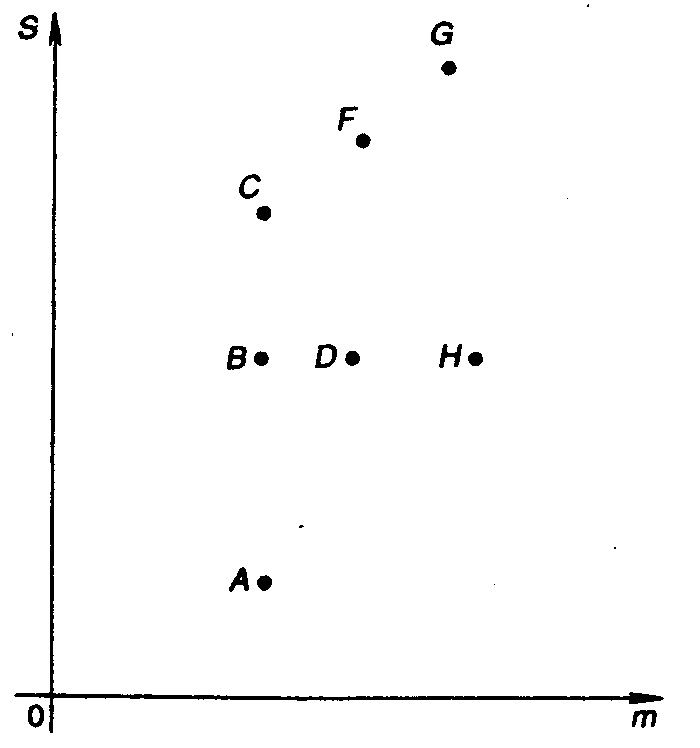
В последних двух случаях решение о выборе проекта *А* или *В* зависит от отношения к риску ЛПР. В частности, в случае d проект *А* обеспечивает более высокую среднюю прибыль, одна­ко он и более рискован. Выбор при этом определяется тем, какой дополнительной величиной средней прибыли компенсируется для ЛПР заданное увеличение риска. В случае е для проекта *А* риск меньший, но и ожидаемая прибыль меньшая. Субъективное от­ношение к риску учитывается в теории Неймана-Моргенштерна и рассматривается в гл. 4.

**Пример.** Пусть имеются два инвестиционных проекта. Пер­вый с вероятностью 0,6 обеспечивает прибыль 15 млн руб., одна­ко с вероятностью 0,4 можно потерять 5,5 млн руб. Для второго проекта с вероятностью 0,8 можно получить прибыль 10 млн руб. и с вероятностью 0,2 потерять 6 млн руб. Какой проект выбрать?

Решение. Оба проекта имеют одинаковую среднюю при­быльность, равную 6,8 млн руб. (0,6\*15 + +0,4(-5,5)=0,8\*10 + 0,2(-6) = 6,8). Однако среднее квадратичное отклонение прибыли для первого проекта равно 10,04 млн руб. ([0,6(15 - 6,8)2 + 0,4(-5,5 – 6,8)2]1/2 = 10,04), а для второго - 6,4 млн руб. ([0,8 (10 - 6,8)2 + 0,2(-6 – 6,8)2]1/2 = 6,4), поэтому более предпочтите­лен второй проект.

Хотя среднее квадратичное отклонение эффективности реше­ния и используется часто в качестве меры риска, оно не совсем точно отражает реальность. Возможны ситуации, при которых варианты обеспечивают приблизительно одинаковую среднюю прибыль и имеют одинаковые средние квадратичные отклоне­ния прибыли, однако не являются в равной мере рискованными. Действительно, если под риском понимать риск разорения, то величина риска должна зависеть от величины исходного капита­ла ЛПР или фирмы, которую он представляет. Теория Неймана-Моргенштерна это обстоятельство учитывает. Из публикаций, посвященных методам измерения и управления рисками, укажем на [8,9,10,16,18,20].

На рис. 1.1 рассмотрен случай выбора из более чем двух вариантов инвестиций. Характеристики вариантов показаны точ­ками на плоскости *(т, S),* где *т -* средняя прибыль, получаемая в результате инвестиции, а *S-* среднее квадратичное отклонение прибыли.



*Рис. 1.1. Варианты выбора инвестиций*

Из рис. 1.1 видно, что среди вариантов *А, В* и С наиболее предпочтителен *А.* Из вариантов *В, D* и *Н* следовало бы выбрать *Н.* Вариант *Н* лучше вариантов С и *F.* Однако сравнительная предпочтительность, например, вариантов *А, D, F* и *G* зависит от склонности ЛПР к риску.

**ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ**

1. Что такое риск?

2. Какие бывают виды рисков?

3. Какой параметр наиболее часто используется в качестве меры риска?

4. Акционерному обществу предлагаются два рисковых проекта:

*Проект I Проект 2*

Вероятность события ................................. 0,2 0,6 0,2 0,4 0,2 0,4

Наличные поступления, млн руб. ........... 40 50 60 0 50 100

Учитывая, что фирма имеет фиксированные платежи по долгам 80 млн руб., какой проект должны выбрать акционеры и почему?

Глава 2 СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ИГРЫ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

На практике часто появляется необходимость согласования дей­ствии фирм, объединении, министерств и других участников проек­тов в случаях, когда их интересы не совпадают. В таких ситуациях теория игр позволяет найти лучшее решение для поведения участ­ников, обязанных согласовывать действия при столкновении инте­ресов. Теория игр все шире проникает в практику экономических решений и исследований. Ее можно рассматривать как инструмент, помогающий повысить эффективность плановых и управленческих решений. Это имеет большое значение при решении задач в про­мышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, в торговле, осо­бенно при заключении договоров с иностранными государствами на любых иерархических уровнях. Так, можно определить научно обоснованные уровни снижения розничных цен и оптимальный уровень товарных запасов, решать задачи экскурсионного обслужи­вания и выбора новых линий городского транспорта, задачу плани­рования порядка организации эксплуатации месторождений полез­ных ископаемых в стране и др. Классической стала задача выбора участков земли под сельскохозяйственные культуры. Метод теории игр можно применять при выборочных обследованиях конечных со-вокупностей, при проверке статистических гипотез.

Обычно теорию игр определяют как раздел математики для изучения конфликтных ситуаций. Это значит, что можно вырабо­тать оптимальные правила поведения каждой стороны, участву­ющей в решении конфликтной ситуации.

В экономике, например, оказался недостаточным аппарат ма­тематического анализа, занимающийся определением экстрему­мов функций. Появилась необходимость изучения так называе­мых оптимальных минимаксных и максиминных решений. Сле­довательно, теорию игр можно рассматривать как новый раздел оптимизационного подхода, позволяющего решать новые задачи при принятии решений.

*Игра -* упрощенная формализованная модель реальной кон­фликтной ситуации. Математически формализация означает, что выработаны определенные правила действия сторон в процессе игры: варианты действия сторон; исход игры при данном вари­анте действия; объем информации каждой стороны о поведении всех других сторон.

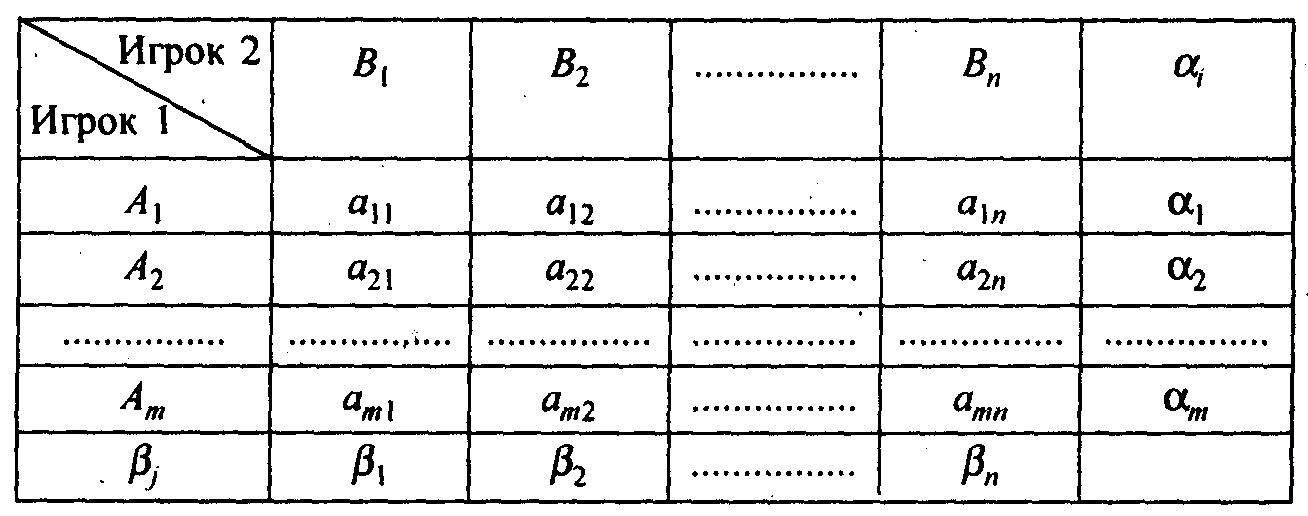
Одну играющую сторону при исследовании операций может представлять коллектив, преследующий некоторую общую цель. Однако разные члены коллектива могут быть по-разному инфор­мированы об обстановке проведения игры.

Выигрыш или проигрыш сторон оценивается численно, дру­гие случаи в теории игр не рассматриваются, хотя не всякий выигрыш в действительности можно оценивать количественно.

*Игрок -* одна из сторон в игровой ситуации. *Стратегия иг­рока -* его правила действия в каждой из возможных ситуаций игры. Существуют игровые системы управления, если процесс управления в них рассматривается как игра.

Платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей (в конечной игре). Пусть игрок 1 имеет *т* стратегий *Аi,* а игрок 2 - *п* стратегий *Вj,* (*; *). Игра может быть названа игрой *т*х*п.* Представим мат­рицу эффективности игры двух лиц с нулевой суммой, сопрово­див ее необходимыми обозначениями (табл. 2.1).

Таблица 2.1



В данной матрице элементы  – значения выигрышей игро­ка 1 – могут означать и математическое ожидание выигрыша (среднее значение), если выигрыш является случайной величи­ной. Величины ,– соответственно мини­мальные значения элементов , по строкам и максимальные - по столбцам. Их содержательный смысл будет отражен ниже.

В теории игр не существует установившейся классификации видов игр. Однако по определенным критериям некоторые виды можно выделить.

*Количество игроков.* Если в игре участвуют две сто­роны, то ее называют игрой двух лиц. Если число сторон больше двух, ее относят к игре *п* игроков. Наибольший интерес вызыва­ют игры двух лиц. Они и математически более глубоко прорабо­таны и в практических приложениях имеют наиболее обширную библиографию [3, 7, 12, 13].

*Количество стратегий игры.* По этому критерию игры делятся на конечные и бесконечные. В *конечной игре* каж­дый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является *бесконечной.*

*Взаимоотношения сторон.* Согласно данному кри­терию игры делятся на кооперативные, коалиционные и бескоа­лиционные. Если игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, то такая игра относится к *бескоалицион­ным;* если игроки могут вступать в соглашения, создавать коали­ции - *коалиционной. Кооперативная игра -* это игра, в которой заранее определены коалиции.

*Характер выигрышей.* Этот критерий позволяет клас­сифицировать игры с нулевой и с ненулевой суммой. *Игра с ну­левой суммой* предусматривает условие: «сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю». Игры двух игроков с нулевой суммой относят к классу антагонистических. Естествен­но, выигрыш одного игрока при этом равен проигрышу другого. Примерами игр с нулевой суммой служат многие экономические задачи. В них общий капитал всех игроков перераспределяется между игроками, но не меняется. К играм с ненулевой суммой также можно отнести большое количество экономических задач. Например, в результате торговых взаимоотношений стран, уча­ствующих в игре, все участники могут оказаться в выигрыше. Игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней, является *игрой с ненулевой суммой.*

*Вид функции выигрышей.* По этому критерию игры подразделяются на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и т. д. Поясним суть некоторых из них.

*Матричная игра -* конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В общем случае ее платежная матрица является прямо­угольной (*см.* табл. 2.1). Номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1. Номер столбца соот­ветствует номеру стратегии игрока 2. Выигрыш игрока 1 являет­ся элементом матрицы. Выигрыш игрока 2 равен проигрышу игрока 1. Как показано в приложении, матричные игры всегда имеют решения в смешанных стратегиях. Они могут быть реше­ны методами линейного программирования.

*Биматричная игра -* конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей, в которой строка соответствует стратегии игрока 1, а столбец — стратегии игрока 2. Однако элемент первой матрицы показывает выигрыш игрока 1, а элемент второй матрицы - выигрыш игро­ка 2. Для биматричных игр так же, как и для матричных, разра­ботана теория оптимального поведения игроков.

Если функция выигрышей каждого игрока в зависимости от стратегий является непрерывной, игра считается *непрерывной.* Если функция выигрышей выпуклая, то и игра - *выпуклая.*

Если функция выигрышей может быть разделена на сумму произведений функций одного аргумента; то игра относится к *сепарабельной.*

*Количество ходов.* Согласно этому критерию игры можно разделить на одношаговые и многошаговые. *Одношаго­вые игры* заканчиваются после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков проис­ходит распределение выигрышей. *Многошаговые игры* бывают позиционными, стохастическими, дифференциальными и др. Подробнее *см.* [3,7,12,13].

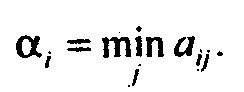
*Информированность cmoрон.* По данному крите­рию различают игры с полной и неполной информацией. Если каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее приме­ненные другими игроками на предыдущих ходах стратегии, такая игра определяется как *игра с полной информацией.* Если игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны, то игра классифицируется *как игра с неполной ин­формацией.* Мы далее убедимся, что игра с полной информа­цией имеет решение. Решением будет седловая точка при чистых стратегиях.

*Степень неполноты и н формации. По этому кри­терию игры* подразделяются на статистические (в условиях час­тичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности, *см.* разд. 3.2). Игры с природой (*см.* гл. 3, 6) часто относят к статистическим играм. В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статис­тического эксперимента, при котором вычисляется или оценива­ется распределение вероятностей состояний (стратегий) приро­ды. С теорией статистических игр тесно связана теория приня­тия экономических решений.

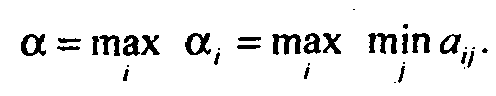
Получив некоторое представление о существующих под­ходах к классификации игр, можно остановиться на оценках игры.

Рассмотрим матричную игру, представленную матрицей вы­игрышей *т*х*п,* где число строк , а число столбцов ** (*см.* табл. 2.1). Применим принцип получения максимального га­рантированного результата при наихудших условиях. Игрок 1 стремится принять такую стратегию, которая должна обеспечить максимальный проигрыш игрока 2. Соответственно игрок 2 стре­мится принять стратегию, обеспечивающую минимальный вы­игрыш игрока 1. Рассмотрим оба этих подхода.

Подход игрока 1.Он должен получить максимальный гарантированный результат при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой страте­гии он должен выбрать гарантированный результат в наихудших условиях, т.е. наименьшее значение своего выигрыша *а,.,* которое обозначим

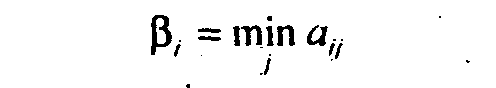


Чтобы этот гарантированный эффект в наихудших условиях был максимальным, нужно из всех а, выбрать наибольшее зна­чение. Обозначим его а и назовем чистой нижней ценой игры («максимин»):

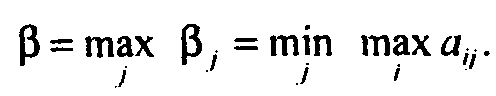


Таким образом, максиминной стратегии отвечает строка мат­рицы, которой соответствует элемент *αi*. Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией га­рантировал себе выигрыш, не меньший, чем *α*. Таково оптималь­ное поведение игрока 1.

Подход игрока 2. Своими оптимальными стратегиями он стремится уменьшить выигрыш игрока 1, поэтому при каж­дой *j*-й чистой стратегии он отыскивает величину своего макси­мального проигрыша

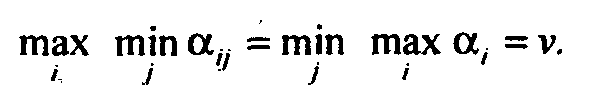


в каждом *j-*м столбце, т.е. определяет максимальный выигрыш игрока 1, если игрок 2 применит *j*-ю чистую стратегию. Из всех своих *n j-*х чистых стратегий он отыскивает такую, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т.е. определяет чистую верхнюю цену игры («минимакс»):



Чистая верхняя цена игры показывает, какой максимальный выигрыш может гарантировать игрок 1, применяя свои чистые стратегии, - выигрыш, не меньший, чем *α*. Игрок 2 за счет ука­занного выше выбора своих чистых стратегий не допустит, что­бы игрок 1 мог получить выигрыш, больший, чем *β*. Таким об­разом, минимаксная стратегия отображается столбцом платеж­ной матрицы, в котором находится элемент *β* (*см.* табл. 2.1). Она является оптимальной чистой гарантирующей стратегией игро­ка 2, если он ничего не знает о действиях игрока 1.

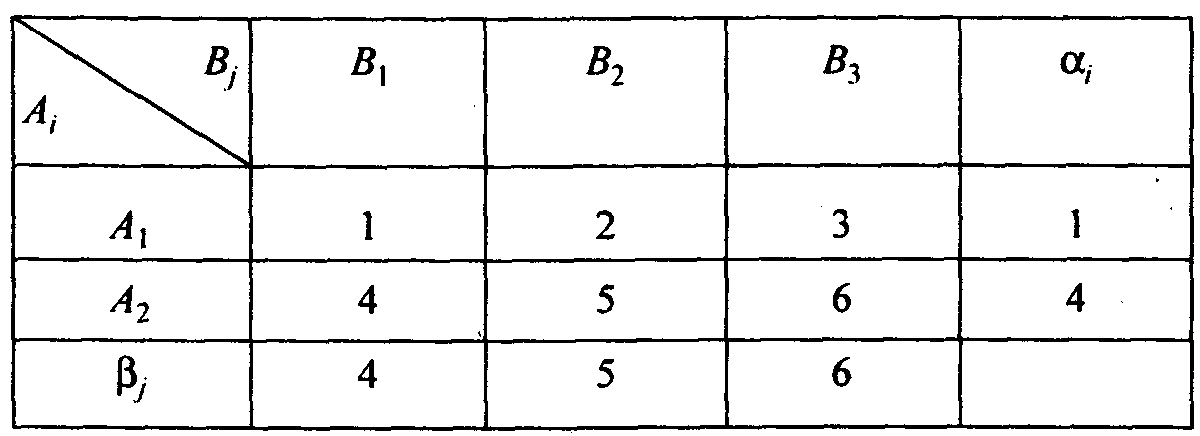
Чистая цена игры *v -* цена данной игры, если нижняя и вер­хняя ее цены совпадают:



В этом случае игра называется *игрой с седловой точкой.*

**Пример 2.1.** Определить верхнюю и нижнюю цены при за­данной матрице игры и указать максиминную и минимаксную стратегии. Представим матрицу игры с обозначениями страте­гий *βj*, *α*.*j*, (табл. 2.2).

Т а б л и ц а 2.2



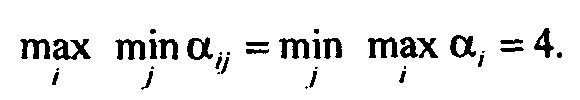
Решение. Определим нижнюю цену игры:

; ; (см. столбец ).

Определим верхнюю цену игры:

; ; ;  (см. строку *βj*).

Таким образом, , т.е.



Значит,  – чистая цена игры при стратегиях *А*2и *B*1. Следовательно, имеем игру с седловой точкой.

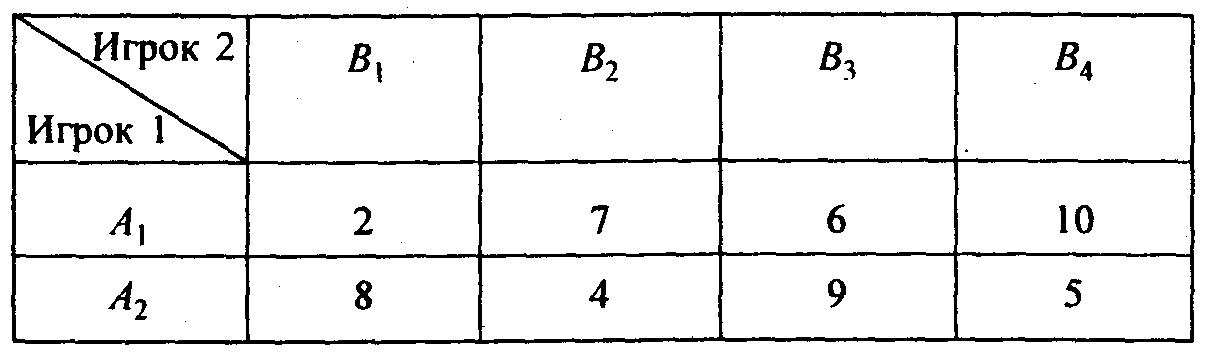
**Пример** **2.2.** Определим максиминную и минимаксную стра­тегии при заданной матрице эффективности (табл. 2.3).

Решение. Определим максиминную стратегию:

; ; 

Максиминная стратегия - строка *А*2*.*

Таблица 2.3



Определим минимаксную стратегию:



Минимаксная стратегия - столбец *В*2*.* Здесь , следова­тельно, седловой точки нет.

Если матрица игры содержит элемент, минимальный в сво­ей строке и максимальный в своем столбце, то он, как уже сказано выше, является седловой точкой. В этом случае мы имеем игру с седловой точкой.

Пусть в игре с седловой точкой один игрок придерживается седловой точки, тогда другой получит лучший результат, если также будет придерживаться этой точки. Лучшее поведение иг­рока не должно повлечь уменьшение его выигрыша. Зато худшее поведение может привести к этому. В данном случае решением игры являются:

• чистая стратегия игрока 1;

• чистая стратегия игрока 2;

• седловой элемент.

Оптимальные чистые стратегии — это чистые стратегии, об­разующие седловую точку.

В игре без седловой точки, если игрок 1 информирован о стратегии, принятой игроком 2, он сможет принять оптималь­ную стратегию, которая не совпадает с максиминной.

**Пример** **2.3.** Дана матрица игры

****

Допустим, игроку 1 стало известно, что игрок 2 принял минимаксную стратегию. Игрок 1 должен выбрать оптимальную стратегию при условии, что *B*2  *–* стратегия игрока 2 ( = 5).

Решение. Определим максиминную стратегию игрока 1:



Стратегия игрока 1 – *А*2 *-* максиминная.

Выберем оптимальную стратегию для игрока 1. Ею будет не максиминная *А*2*,* дающая игроку 1 выигрыш  = 4, а та страте­гия, которая соответствует . В этом случае его максималь­ный гарантированный выигрыш будет равен верхней цене игры , поэтому он выберет свою оптимальную стратегию *А*1*,* зная, что игрок 2 выбрал свою стратегию *В*2*.* Таким образом, рас­смотренный пример дает результат, отличный от результата при игре с седловой точкой.

Стратегия является оптимальной, если ее применение обес­печит игроку наибольший гарантированный выигрыш при лю­бых возможных стратегиях другого игрока.

На примере 2.3 показано, что бывают ситуации, когда игрок 1 может получить выигрыш, превосходящий максиминный, если ему известны намерения игрока 2.

При многократном повторении игры в сходных условиях можно добиться гарантированного среднего выигрыша, превос­ходящего для игрока 1 максиминный.

2.2. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в матричной игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях, то находят верхнюю и нижнюю цены игры. Они показывают, что игрок 1 не получит выигрыша, превосходящего верхнюю цену игры, и что игроку 1 гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры. В примере 2.3 игрок 1 получил по своей оптимальной стратегии *А*1*,* отличной от максиминной, выигрыш, равный верхней цене игры. Такова плата за информи­рованность о стратегии игрока 2. Это крайний случай. Не улуч­шится ли результат игрока 1, если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, но игрок будет много­кратно применять чистые стратегии случайным образом с опре­деленной вероятностью?

В такой ситуации, оказывается, можно получать выигрыши, в среднем большие нижней цены игры, но меньшие верхней.

Смешанная стратегия игрока - это полный набор примене­ния его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Подведем итоги сказанного и перечислим условия применения смешанных стратегий:

• игра без седловой точки;

• игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями;

• игра многократно повторяется в сходных условиях;

• при каждом из ходов ни один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

• допускается осреднение результатов игр.

Применяются следующие обозначения смешанных стратегий.

Для игрока 1 смешанная стратегия, заключающаяся в применении чистых стратегий *А1, А2,..., Аm* с соответствующими вероятностями *р1, р2, ..., рm,*

**

где , 

Для игрока 2

**

где , 

*qj –* вероятность применения чистой стратегии *Вj.*

В случае, когда *pi* = 1 , для игрока 1 имеем чистую стратегию:



Чистые стратегии игрока являются единственно возможны­ми несовместными событиями. В матричной игре, зная матрицу *А* (она относится и к игроку 1, и к игроку 2), можно определить при заданных векторах  и  средний выигрыш (математическое ожидание эффекта) игрока 1:

,

где  и  *-* векторы;

*рi* и *qj -* компоненты векторов.

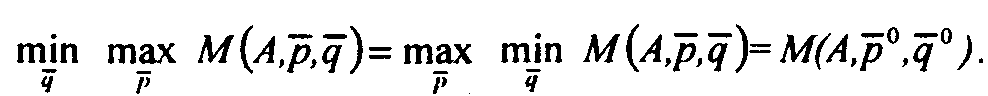
Путем применения своих смешанных стратегий игрок 1 стре­мится максимально увеличить свой средний выигрыш, а игрок 2 - довести этот эффект до минимально возможного значения. Игрок 1 стремится достигнуть

.

Игрок 2 добивается того, чтобы выполнялось условие

.

Обозначим  и  векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков 1 и 2, т.е. такие векторы  и *,* при которых будет выполнено равенство



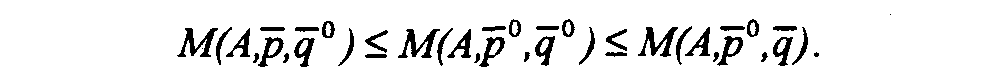
Цена игры γ – средний выигрыш игрока 1 при использовании обоими игроками смешанных стратегий. Следовательно, реше­нием матричной игры являются:

1) - оптимальная смешанная стратегия игрока 1;

2)  *-* оптимальная смешанная стратегия игрока 2;

3) γ - цена игры.

Смешанные стратегии будут оптимальными ( и ), если они образуют седловую точку для функции , т.е.

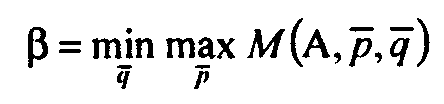


Существует основная теорема математических игр (доказа­тельство *см.* в приложении).

**Теорема 2.1.** Для матричной игры с любой матрицей *A* вели­чины



И

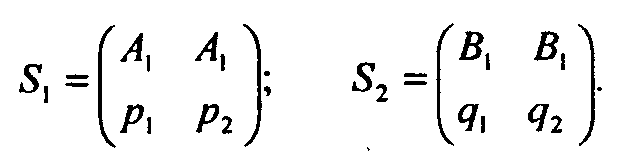


существуют и равны между собой: .

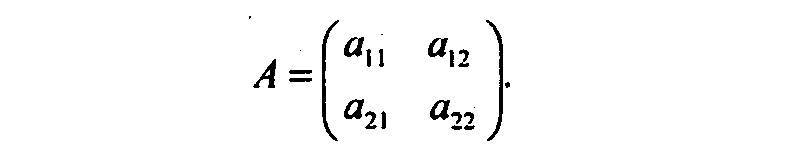
Следует отметить, что при выборе оптимальных стратегий игроку 1 всегда будет гарантирован средний выигрыш, не мень­ший, чем цена игры, при любой фиксированной стратегии игро­ка 2 (и, наоборот, для игрока 2). Активными стратегиями игро­ков 1 и 2 называют стратегии, входящие в состав оптимальных смешанных стратегий соответствующих игроков с вероятностя­ми, отличными от нуля. Значит, в состав оптимальных смешан­ных стратегий игроков могут входить не все априори заданные их стратегии.

2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ)

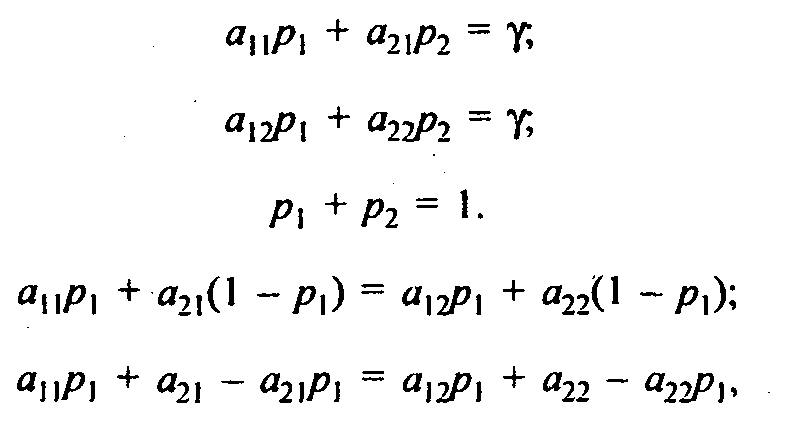
Решить игру - означает найти цену игры и оптимальные стратегии. Рассмотрение методов нахождения оптимальных сме­шанных стратегий для матричных игр начнем с простейшей игры, описываемой матрицей 2х2. Игры с седловой точкой специально рассматриваться не будут. Если получена седловая точка, то это означает, что имеются невыгодные стратегии, от которых следу­ет отказываться. При отсутствии седловой точки можно полу­чить две оптимальные смешанные стратегии. Как уже отмеча­лось, эти смешанные стратегии записываются так:



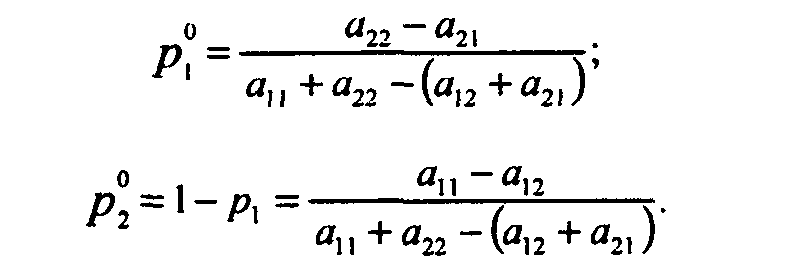
Значит, имеется платежная матрица



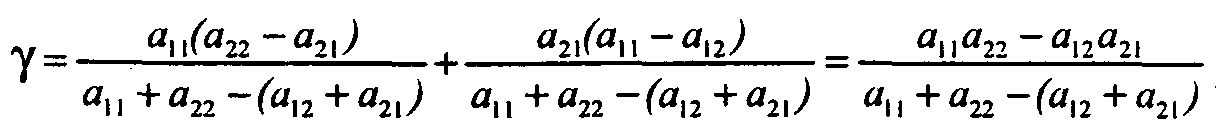
При этом



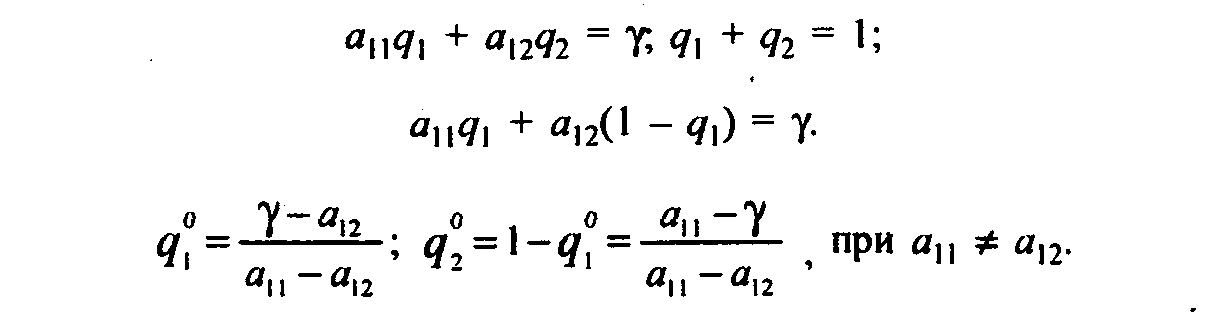
откуда получаем оптимальные значения ** и :



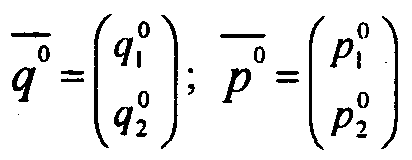
Зная ** и  находим γ:



Вычислив γ, находим ** и :



Задача решена, так как найдены векторы



и цена игры γ*.* Имея матрицу платежей *А,* можно решить задачу графически. При этом методе алгоритм решения весьма прост (рис. 2.1):

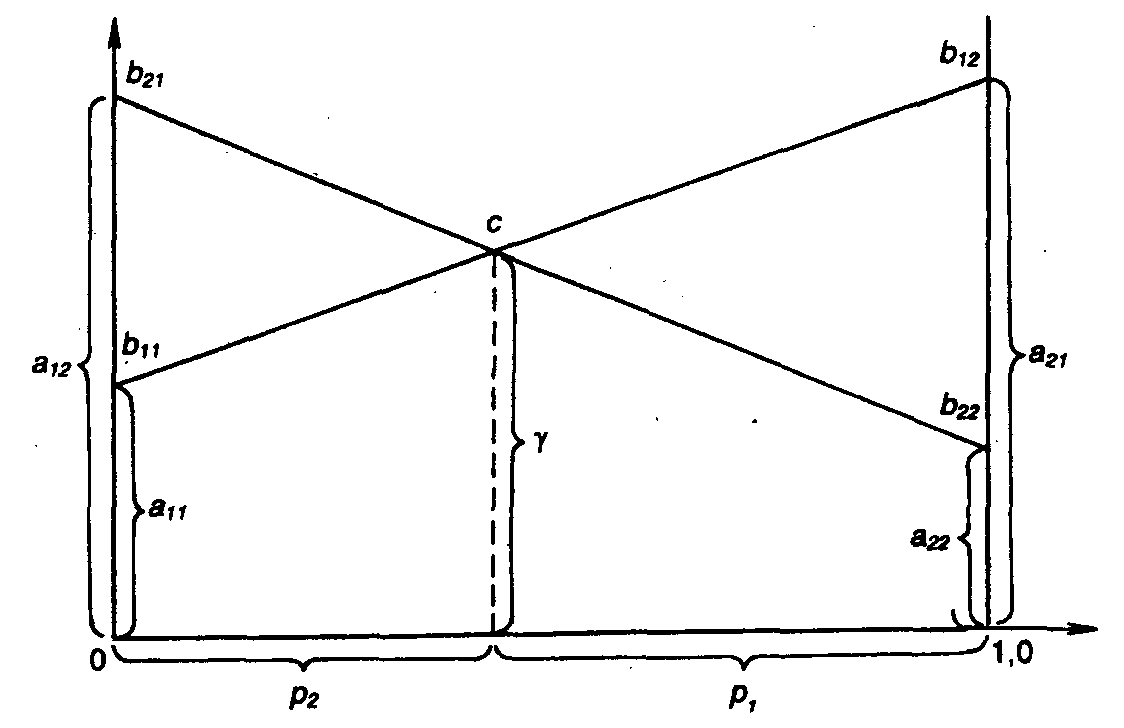
1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.

2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии *А*1.

3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 отклады­ваются выигрыши при стратегии *А*2.

4. Концы отрезков обозначаются для *a11* – *b11, a12 – b21, a22* – *b22, a21 – b12* и проводятся две прямые линии *b11 b12* и *b21* *b22*.

5. Определяется ордината точки пересечения *с*. Она равна γ. Абсцисса точки *с* равна *р2 (р1* = 1 – *р2)*.



*Рис****.*** *2.1. Оптимальная смешанная стратегия*

Данный метод имеет достаточно широкую область приложе­ния. Это основано на *общем свойстве игр т×п,* состоящем в том, что в любой игре *т×п* каждый игрок имеет оптимальную сме­шанную стратегию, в которой число чистых стратегий не боль­ше, чем min(*m,n*). Из этого свойства можно получить известное *следствие:* в любой игре *2×п* и *т×2* каждая оптимальная страте­гия  и  содержит не более двух активных стратегий. Значит, любая игра 2*×n* и *т×2* может быть сведена к игре 2*×*2. Следовательно, игры 2*×т* и *т×2* можно решить графическим методом.

Если матрица конечной игры имеет размерность *т×п,* где *т>2* и *п>2,* то для определения оптимальных смешанных стратегий, как будет показано в приложении, используется линейное програм­мирование.

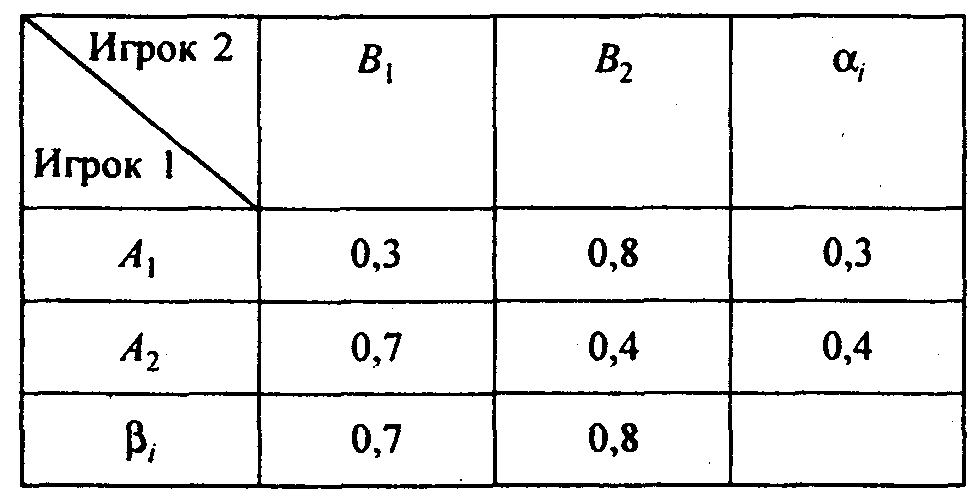
Рассмотрим некоторые практические задачи, в которых ис­пользуются критерии игр для оценки наиболее эффективного поведения оперирующей стороны.

**Задача 2.1.** Выбрать оптимальный режим работы новой систе­мы ЭВМ, состоящей из двух ЭВМ типов *А1* и *А2.* Известны выигрыши от внедрения каждого типа ЭВМ в зависимости от внешних условий, если сравнить со старой системой.

При использовании ЭВМ .типов *А1* и *А2* в зависимости от характера решаемых задач *В1* и *В2* (долговременные и краткос­рочные) будет разный эффект. Предполагается, что максималь­ный выигрыш соответствует наибольшему значению критерия эффекта от замены вычислительной техники старого поколения на ЭВМ *А1* и *А2.*

Итак, дана матрица игры (табл. 2.4), где *А1, А2 -* стратегии руководителя; *В1, В2 -* стратегии, отражающие характер решае­мых на ЭВМ задач.

Таблица 2.4



Требуется найти оптимальную смешанную стратегию руково­дителя и гарантированный средний результат γ*,* т.е. определить, какую долю времени должны использоваться ЭВМ типов *А1* и *А2.*

Решение. Запишем условия в принятых индексах:

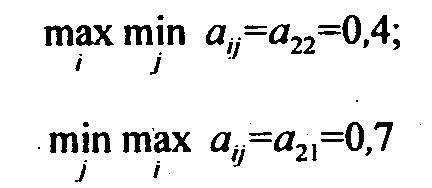
*а11* = 0,3; *а12* = 0,8; *а21 =* 0,7; *а22 =* 0,4 .

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

α1 = 0,3; α2 = 0,4; α = 0,4;

β1 = 0,7; β2 = 0,8; β = 0,7.

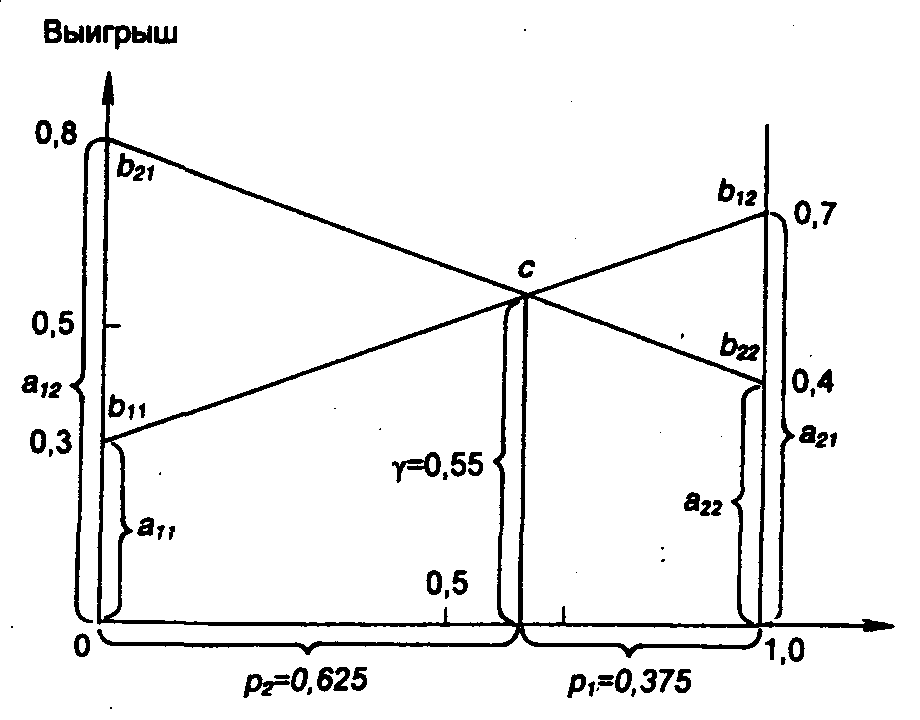
Получаем игру без седловой точки, так как



Максиминная стратегия руководителя вычислительного цен­тра – *А2.*

Для этой стратегии гарантированный выигрыш равен α = 0,4 (40 %) по сравнению со старой системой.

Решение для определения γ, *р1* и *р2* проведем графически (рис. 2.2).



*Рис. 2.2. Графическая интерпретация алгоритма решения*

Алгоритм решения:

1. По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.

2. По оси ординат отложим выигрыши при стратегии *А1.*

3. На вертикали в точке 1 отложим выигрыши при стратегии *А2*.

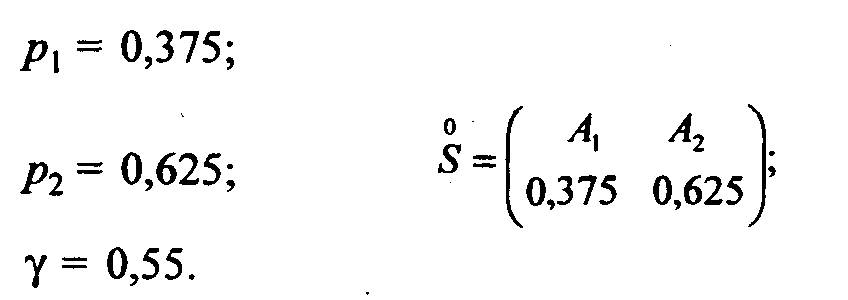
4. Проводим прямую *b11 b12,* соединяющую точки *а11,a21.*

5*.* Проводим прямую *b21b22,* соединяющую точки *а12, а22.*

6. Определяем ординату точки пересечения с линий *b11b12* и *b*21*b*22. Она равна γ.

7. Определим абсциссу точки пересечения *с.* Она равна *р2,* а *р1=1–р2*

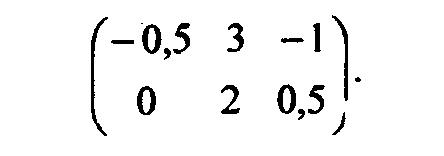
Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:



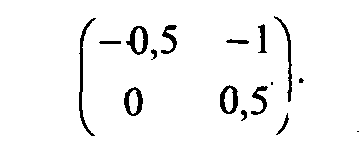
Вывод. При установке новой системы ЭВМ, если неизвес­тны условия решения задач заказчика, на работу ЭВМ *А1* долж­но приходиться 37,5 % времени, а на работу ЭВМ *А2 -* 62,5 %. При этом выигрыш составит 55 % по сравнению с предыдущей системой ЭВМ.

2.4. МАЖОРИРОВАНИЕ (ДОМИНИРОВАНИЕ) СТРАТЕГИЙ

Мажорирование представляет отношение между стратегия­ми, наличие которого во многих практических случаях дает воз­можность сократить размеры исходной платежной матрицы игры. Рассмотрим это понятие на примере матрицы



Рассуждая с позиции игрока 2, можно обнаружить преиму­щество его третьей стратегии перед второй, поскольку при пер­вой стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен —3 (вторая стратегия) и 1 (третья стратегия), а при второй стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен —2 (вторая стратегия) и - 0,5 (третья стратегия). Таким образом, при любой стратегии игрока 1 игроку 2 выгоднее применять свою третью стратегию по сравнению со второй; при наличии третьей стратегии игрок 2, если он стремится играть оптимально, никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее мож­но исключить из игры, т.е. в исходной платежной матрице можно вычеркнуть 2-й столбец:



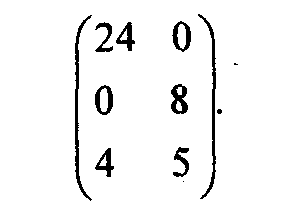
С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, так как по первой стратегии он только проигрывает. Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрицу игры преобразовать к виду:

**(0 0,5).**

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку, выбирая вторую стратегию, иг­рок 2 оказывается в проигрыше (0,5 - выигрыш игрока 1), и матрица игры принимает простейший вид: (0), т.е. имеется седловая точка.

Мажорирование можно распространить и на смешанные стра­тегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответству­ющих элементов других строк, то эту стратегию можно исклю­чить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим матрицу игры:



Для первых двух чистых стратегий игрока 1 возьмем частоты их применения (вероятности) равными 0,25 и 0,75.

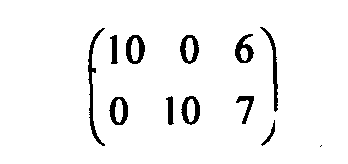
Третья стратегия игрока 1 мажорируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с часто­тами 0,25 и 0,75 соответственно, т.е. смешанной стратегией:

24\*0,25 + 0\*0,75 = 6 > 4;

0\*0,25 + 8\*0,75 = 6 > 5.

Поэтому третью стратегию игрока 1 можно исключить, ис­пользуя вместо нее указанную выше смешанную стратегию.

Аналогично если каждый элемент некоторого столбца боль­ше или равен некоторой выпуклой линейной комбинации соот­ветствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить из рассмотрения (вычеркнуть из мат­рицы). Например, для матрицы

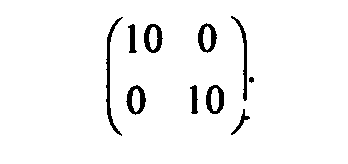


третья стратегия игрока 2 мажорируется смешанной стратегией из первой и второй его чистых стратегий, взятых с частотами 0,5 и 0,5:

10\*0,5 + 0\*0,5 = 5 < 6;

0\*0,5 + 10\*0,5 = 5 < 7.

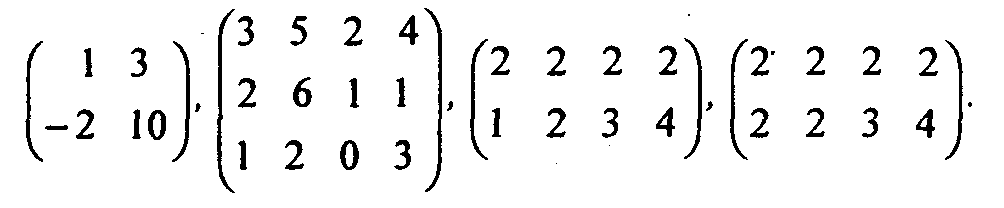
Таким образом, исходная матрица игры эквивалентна матри­це следующего вида:



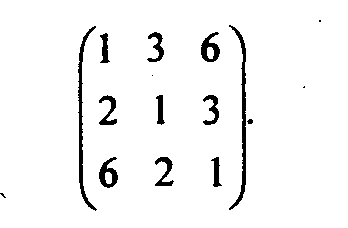
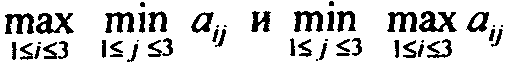
Как видно, возможности мажорирования смешанными стра­тегиями в отличие от чистых значительно менее прозрачны (нуж­но должным образом подобрать частоты применения чистых стратегий), но такие возможности есть, и ими полезно уметь пользоваться.

Задачи для самостоятельного решения

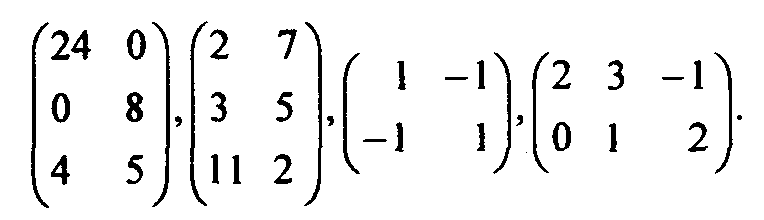
**Задача 2.2.** Найдите седловые точки следующих платежных мат­риц:



**Задача 2.3.** Найдите для платежной матрицы:



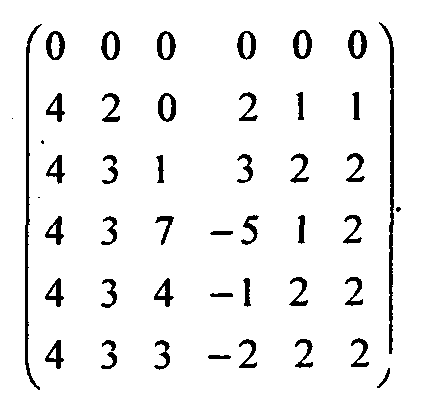
**Задача 2.4.** Решите аналитически и графически, используя поня­тие доминирования, игры, определяемые следующими платежными матрицами:



**Задача 2.5.** Постройте платежную матрицу двухпальцевой игры Морра, которая заключается в следующем. В игру играют два челове­ка: каждый из них показывает один или два пальца и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению, покажет его против­ник (естественно, противник этого не видит). Если один из игроков угадывает правильно, он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником. В противном случае - ничья (вы­игрыш равен нулю).

Найдите нижнюю и верхнюю цены игры.

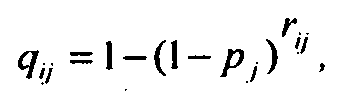
**Задача 2.6.** Используя понятие доминирования, уменьшите разме­ры следующей платежной матрицы:



Для задач 2.7-2.12 постройте платежную матрицу игры и сформу­лируйте соответствующую модель линейного программирования.

**Задача 2.7.** Пусть сторона *А* засылает подводную лодку в один из *п* районов. Сторона *В,* располагая *т* противолодочными кораблями, желает обнаружить лодку противника. Вероятность обнаружения лодки в *j*-м районе (*j* = 1*,...,п*) равна *pj*. Предполагается, что обнаружение под­лодки каждым кораблем является независимым событием. Сторона *В* может посылать в различные регионы разное количество кораблей (рас­пределение *т* кораблей по регионам и есть стратегии стороны *В).* Сто­рона *В* стремится максимизировать вероятность обнаружения подлод­ки. Сторона *А* желает противоположного.

Вероятность обнаружения лодки в районе *j*, в котором находится *rij* кораблей (*i* - номер стратегии), равна:



причем *.* Найдите оптимальное распределение противолодоч­ных кораблей по регионам.

Рассмотреть частный случай: *m* = 2, *п* = 2, *р1 =* 0,6, *р2 =* 0,4.

**Задача 2.8.** Каждому из игроков выдается по бубновому и трефо­вому тузу. Игрок 1 получает также бубновую двойку, а игрок 2 - тре­фовую. При первом ходе игрок 1 выбирает и откладывает одну из своих карт, а игрок 2, не зная карты, выбранной игроком 1, также откладыва­ет одну из своих карт. Если были отложены карты одной масти, то выигрывает игрок 1, в противном случае выигравшим считается игрок 2. Если отложены две двойки, выигрыш равен нулю. Размер выигрыша определяется картой, отложенной победителем (тузу приписывается одно очко, двойке - два).

**Задача 2.9.** Фирма изготавливает железобетонные панели, исполь­зуя в качестве основного сырья цемент. В связи с неопределенным спросом на изделия потребность в сырье в течение месяца также не определена. Цемент поставляется в мешках, причем известно, что по­требность может составлять *D1,D2,...,Dn* мешков. Резервы сырья на складе могут составлять *R1,R2,...,Rn* мешков в месяц. Учитывая, что удельные затраты на хранение сырья равны *с*1 а удельные издержки дефицитности сырья (потери, связанные с отсутствием необходимого количества цемента на складе) равны *с*2, определить оптимальную стра­тегию управления запасами цемента на складе.

Рассмотреть частный случаи: *п =* 5, *c1* = 5, *c2* = 3;

D = (1 500, 2 000, 2 500, 3 500, 4 000), *R =*(1 500, 2 000, 2 500, 3 500, 4 000).

**Задача 2.10.** Игрок 2 прячет некоторый ценный предмет в одном из *п* мест, а игрок 1 этот предмет ищет. Если он его находит, то получает сумму *аi* где *i* = 1,2, ..., *п,* в противном случае - не получает ничего.

**Задача 2.11.** Два игрока независимо друг от друга называют по одному числу из диапазона 1 - 5. Если сумма чисел нечетная, то иг­рок 2 платит игроку 1 сумму, равную максимальному из чисел; если четная, то платит игрок 1.

**Задача 2.12.** Два игрока имеют по *п* рублей и предмет ценой с > 0. Каждый игрок делает заявку в запечатанном конверте, предлагая *i* руб. (где *i* - одно из целых чисел от 0 до *п)* за предмет. Записавший большее число получает предмет и платит другому предложенную им сумму. Если оба игрока заявляют одинаковую сумму, то предмет назначается без компенсирующего одностороннего платежа одному из игроков путем бросания монеты, так что ожидаемая доля каждого в предмете состав­ляет в этом случае половину *с.* Постройте платежную матрицу игры и определите, имеет ли игра седловую точку.

Глава 3 ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА (ИГРЫ С ПРИРОДОЙ)

3.1. ПОНЯТИЕ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Ситуации, описываемые рассмотренными в гл. 2 моделями в виде стратегических игр, в экономической практике могут не в полной мере оказаться адекватными действительности, посколь­ку реализация модели предполагает многократность повторения действий (решений), предпринимаемых в похожих условиях. В реальности количество принимаемых экономических решений в неизменных условиях жестко ограничено. Нередко экономичес­кая ситуация является уникальной, и решение в условиях нео­пределенности должно приниматься однократно. Это порождает необходимость развития методов моделирования принятия реше­ний в условиях неопределенности и риска.

Традиционно следующим этапом такого развития являются игры с природой. Формально изучение игр с природой, так же как и стратегических, должно начинаться с построения платежной мат­рицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом под­готовки принятия решения. Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными ус­ловиями или с природными стихийными силами).

На примере игры с природой рассмотрим проблему заготов­ки угля на зиму.

**Задача 3.1.** Необходимо закупить уголь для обогрева дома. Количество хранимого угля ограничено и в течение холодного периода должно быть полностью израсходовано. Предполагает­ся, что неизрасходованный зимой уголь в лето пропадает. Поку­пать уголь можно в любое время, однако летом он дешевле, чем зимой. Неопределенность состоит в том, что не известно, какой будет зима: суровой, тогда придется докупать уголь, или мягкой, тогда часть угля может остаться неиспользованной. Очевидно, что у природы нет злого умысла и она ничего против человека «не имеет». С другой стороны, долгосрочные прогнозы, состав­ляемые метеорологическими службами, неточны и поэтому мо­гут использоваться в практической деятельности только как ори­ентировочные при принятии решений.

Решение. Матрица игры с природой аналогична матрице стратегической игры: *А* = ||*аij*||, где *аij* - выигрыш игрока 1 при реализации его чистой стратегии *i* и чистой стратегии *j* игрока 2 (*i* = 1, ..., *m; j =* 1, ..., *п*).

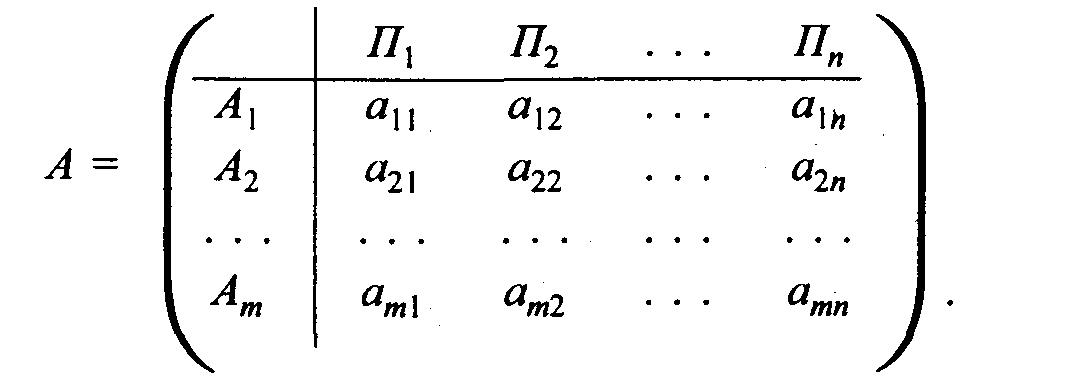
Мажорирование стратегий *(см.* разд. 2.4) в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех *j*=1, ..., *п *, *k, l =* 1, ..., *т,* то *k-ю* стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из мат­рицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычер­кивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопус­тимо, поскольку природа не стремится к выигрышу в «игре» с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или про­игрышных стратегий, она действует неосознанно\*.

\* Впрочем, в матричных представлениях игр с природой значения выигры­шей принимающего решения игрока не всегда располагаются по строкам. Это допустимо делать и по столбцам, принимая ЛПР как игрока 2, понимая, одна­ко, что мажорировать можно только стратегии принимающего решения игрока. Такой подход осуществлен в некоторых задачах, представленных в гл. 6 - 8 настоящего учебного пособия.

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя ЛПР никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место ситуация риска или неопределенности. Ниже будут описаны методы, применяемые в обоих случаях.

Рассмотрим организацию и аналитическое представление игры с природой. Пусть игрок 1 имеет *т* возможных стратегий: *А1, A2* *, ... , Аm,* а у природы имеется *п* возможных состояний (стра­тегий): *П1*, *П2, ..., Пn*, тогда условия игры с природой задаются матрицей *А* выигрышей игрока 1:

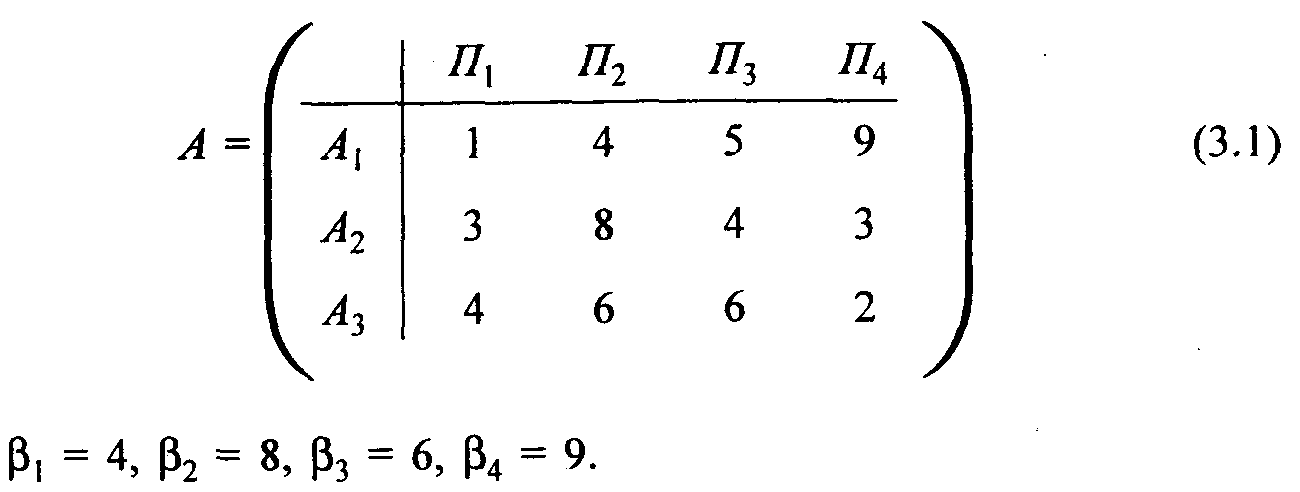


Платит, естественно, не природа, а некая третья сторона (или совокупность сторон, влияющих на принятие решений игроком 1 и объединенных в понятие «природа»).

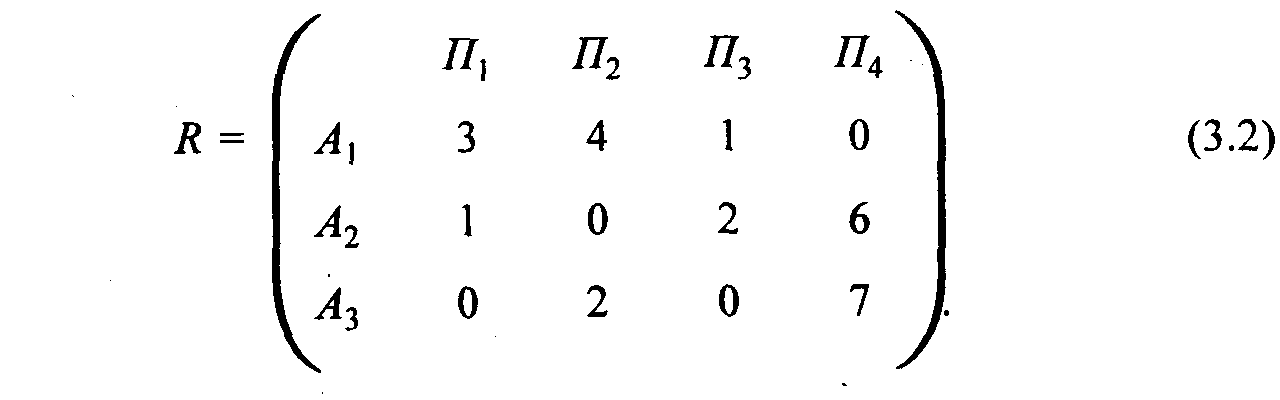
Возможен и другой способ задания матрицы игры с приро­дой: не в виде матрицы выигрышей, а в виде так называемой матрицы рисков *R =* ||*rij*||*m,n* или матрицы упущенных возможно­стей. Величина риска - это размер платы за отсутствие инфор­мации о состоянии среды. Матрица *R* может быть построена не­посредственно из условий задачи или на основе матрицы выиг­рышей *А.*

Риском *rij* игрока при использовании им стратегии *Аi* и при состоянии среды *Пj* будем называть разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он знал, что состоянием среды будет *Пj*, и выигрышем, который игрок получит, не имея этой информации.

Зная состояние природы (стратегию) *Пj*, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимальный, т.е. *rij = βj – aij* при заданном *j*. Например, для мат­рицы выигрышей



Согласно введенным определениям *rij* и *βj* получаем матрицу рисков



Независимо от вида матрицы игры требуется выбрать такую стратегию игрока (чистую или смешанную, если последняя име­ет смысл), которая была бы наиболее выгодной по сравнению с другими. Необходимо отметить, что в игре с природой понятие смешанной стратегии игрока не всегда правомерно, поскольку его действия могут быть альтернативными, т.е. выбор одной из стратегий отвергает все другие стратегии (например, выбор аль­тернативных проектов). Прежде всего следует проверить, нет ли среди стратегий игрока мажорируемых, и, если таковые имеют­ся, исключить их.

3.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадеж­ной» или «дурной».

В таких случаях для определения наилучших решении ис­пользуются следующие критерии: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Альтернативные подходы, в частности принципы Байеса - Лапласа, рассматриваются в разд. 6.2.1.

Применение каждого из перечисленных критериев проиллю­стрируем на примере матрицы выигрышей (3.1) или связанной с ней матрицы рисков (3.2).

*Критерий максимакса.* С его помощью определяется страте­гия, максимизирующая максимальные выигрыши для каждого состояния природы. Это критерий крайнего оптимизма. Наилуч­шим признается решение, при котором достигается максималь­ный выигрыш, равный .

Нетрудно увидеть, что для матрицы *А* наилучшим решением будет *А1*, при котором достигается максимальный выигрыш - 9.

Следует отметить, что ситуации, требующие применения такого критерия, в экономике в общем нередки, и пользуются им не только безоглядные оптимисты, но и игроки, поставленные в безвыходное положение, когда они вынуждены руководствовать­ся принципом «или пан, или пропал».

*Максиминный критерий Вальда.* С позиций данного крите­рия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник типа тех, которые проти­водействуют в стратегических играх *(см.* гл. 2). Выбирается ре­шение, для которого достигается значение.

Для платежной матрицы *А* (3.1) нетрудно рассчитать:

• для первой стратегии (*i* *=* 1) ;

• для второй стратегии (*i*=2) ;

*•* для третьей стратегии (*i*=3) .

Тогда , что соответствует второй стратегии *A2* игрока 1.

В соответствии с критерием Вальда из всех самых неудач­ных результатов выбирается лучший *(W =* 3). Это перестрахо­вочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. Такая стратегия приемлема, например, когда игрок не столь заинтересован в крупной удаче, но хочет себя застраховать от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии определя­ется отношением игрока к риску.

*Критерий минимаксного риска Сэвиджа.* Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличи­ем, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей *А* (3.1), а матрицей рисков *R* (3.2):

**

Для матрицы *R* (3.2) нетрудно рассчитать:

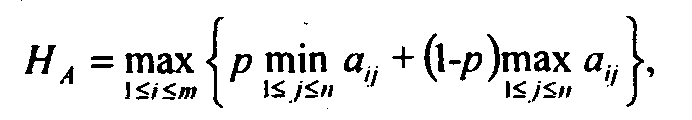
• для первой стратегии (*i*=1) **;

*•* для второй стратегии (*i*=2) **;

• для третьей стратегии (*i*=3) **.

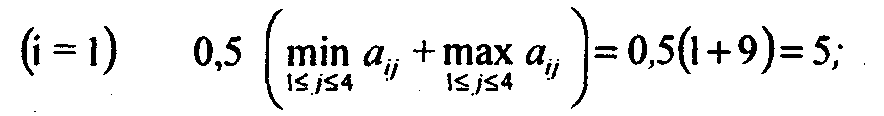
Минимально возможный из самых крупных рисков, равный 4, достигается при использовании первой стратегии *А1.*

*Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.* Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым сред­ним результатом, характеризующим состояние между крайним пес­симизмом и безудержным оптимизмом. Согласно этому критерию стратегия в матрице *А* выбирается в соответствии со значением

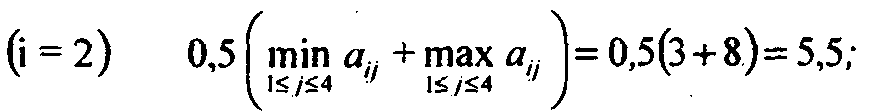


При *p* = 0 критерий Гурвица совпадает с максимаксным кри­терием, а при *р =* 1 - с критерием Вальда. Покажем процедуру применения данного критерия для матрицы *А* (3.1) при *р =* 0,5:

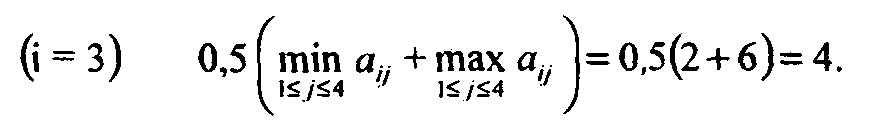
• для первой стратегии



• для второй стратегии

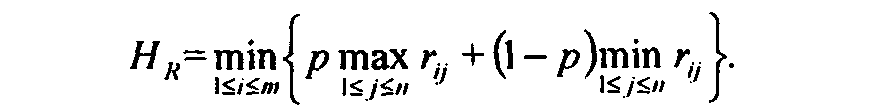


*•* для третьей стратегии



Тогда , т.е. оптимальной является вторая стратегия *А2.*

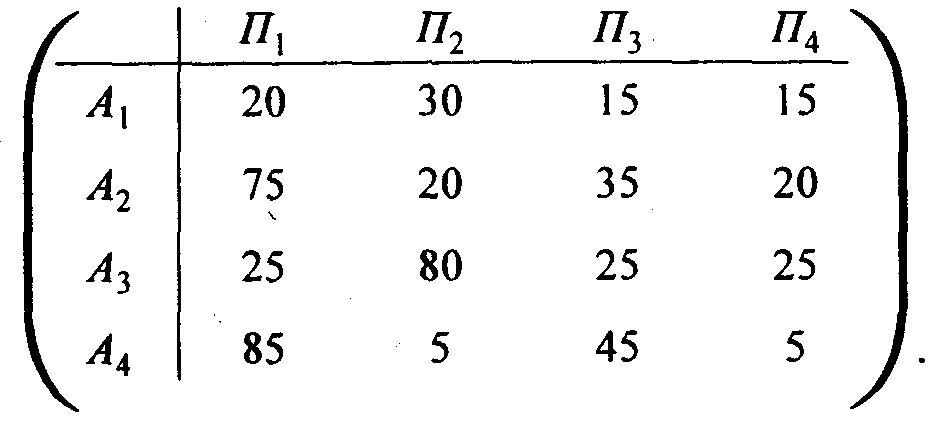
Применительно к матрице рисков *R* критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:



При *р* = 0 выбор стратегии игрока 1 осуществляется по ус­ловию наименьшего из всех возможных рисков (); при *р* = 1 - по критерию минимаксного риска Сэвиджа.

В случае, когда по принятому критерию рекомендуется к использованию несколько стратегий, выбор между ними может делаться по дополнительному критерию, например в расчет могут приниматься средние квадратичные отклонения от средних вы­игрышей при каждой стратегии. Данная идея отвечает подходу, рассмотренному в разд.1.2 (*см.* рис. 1.1). Еще раз подчеркнем, что здесь стандартного подхода нет. Выбор может зависеть от склонности к риску ЛПР.

В заключение приведем результаты применения рассмотрен­ных выше критериев на примере следующей матрицы выигры­шей:



Для игрока 1 лучшими являются стратегии:

• по критерию Вальда – *А3,*

• по критерию Сэвиджа – *А2* и *А3,*

*•* по критерию Гурвица (при *р* = 0,6) – *А3;*

*•* по критерию максимакса – *А4.*

Поскольку стратегия *А3,* фигурирует в качестве оптимальной по трем критериям выбора из четырех испытанных, степень ее надежности можно признать достаточно высокой для того, что­бы рекомендовать эту стратегию к практическому применению.

Таким образом, в случае отсутствия информации о вероят­ностях состоянии среды теория не дает однозначных и матема­тически строгих рекомендации по выбору критериев принятия решений. Это объясняется в большей мере не слабостью тео­рии, а неопределенностью самой ситуации. Единственный ра­зумный выход в подобных случаях - попытаться получить до­полнительную информацию, например, путем проведения ис­следований или экспериментов. В отсутствие дополнительной информации принимаемые решения теоретически недостаточ­но обоснованы и в значительной мере субъективны. Хотя при­менение математических методов в играх с природой не дает абсолютно достоверного результата и последний в определен­ной степени является субъективным (вследствие произвольно­сти выбора критерия принятия решения), оно тем не менее создает некоторое упорядочение имеющихся в распоряжении ЛПР данных: задаются множество состояний природы, альтер­нативные решения, выигрыши и потери при различных сочета­ниях состояния «среда - решение». Такое упорядочение пред­ставлений о проблеме само по себе способствует повышению качества принимаемых решений.

3.3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Методы принятия решении в условиях риска разрабатывают­ся и обосновываются в рамках так называемой теории статисти­ческих решений. При этом в случае «доброкачественной», или стохастической, неопределенности, когда состояниям природы поставлены в соответствие вероятности, заданные экспортно либо вычисленные, решение обычно принимается на основе критерия максимума ожидаемого среднего выигрыша или минимума ожи­даемого среднего риска (матрицы типа (3.1) либо (3.2)).

Если для некоторой игры с природой, задаваемой платежной матрицей *А* = ||*aij*||*m,n*, стратегиям природы *Пj* соответствуют ве­роятности *рj,* то лучшей стратегией игрока 1 будет та, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, т.е.

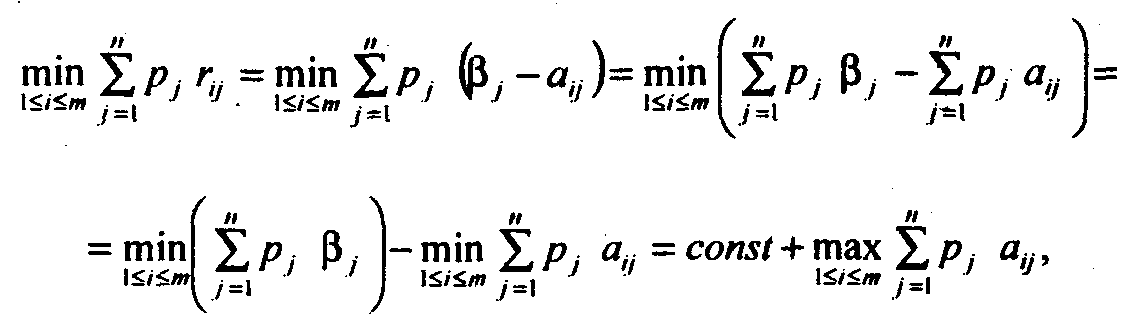


Применительно к матрице рисков (матрице упущенных вы­год) лучшей будет та стратегия игрока, которая обеспечивает ему минимальный средний риск:



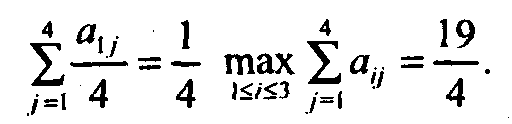
Заметим, что когда говорится о среднем выигрыше или рис­ке, то подразумевается многократное повторение акта принятия решений. Условность предположения заключается в том, что реально требуемого количества повторений чаще всего может и не быть.

Покажем, что критерии (3.3) и (3.4) эквивалентны в том смысле, что оптимальные значения для них обеспечивает одна и та же стратегия *Аi,* игрока 1. Действительно,

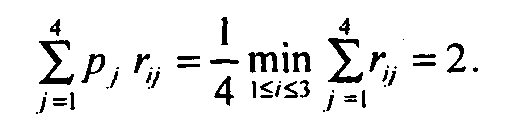


т.е. значения критериев отличаются на постоянную величину, поэтому принятое решение не зависит от стратегии *Аi.*

Например, для игры, задаваемой матрицей *А* (3.1) или матри­цей *R* (3.2), при условии, что *р1* = *р2* = *р3 = р4* = 1/4, *А1 -* лучшая стратегия игрока 1 по критерию (3.3), поскольку



Эта же стратегия является лучшей для игрока 1 по критерию (3.4) относительно обеспечения минимального уровня риска:



На практике целесообразно отдавать предпочтение матрице выигрышей (3.1) или матрице рисков (3.2) в зависимости от того, какая из них определяется с большей достоверностью. Это осо­бенно важно учитывать при экспертных оценках элементов мат­риц *А* и *R.*

3.4. ВЫБОР РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ (ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ)

Рассмотрим более сложные (позиционные, или многоэтапные) решения в условиях риска. Одноэтапные игры с природой, таб­лицы решений *(см.* разд.3.3), удобно использовать в задачах, имеющих одно множество альтернативных решений и одно множество состояний среды. Многие задачи, однако, требуют анализа последовательности решений и состояний среды, когда одна совокупность стратегий игрока и состояний природы по­рождает другое состояние подобного типа. Если имеют место два или более последовательных множества решений, причем последующие решения основываются на результатах предыду­щих, и/или два или более множества состояний среды (т.е. появ­ляется целая цепочка решений, вытекающих одно из другого, которые соответствуют событиям, происходящим с некоторой вероятностью), используется дерево решений.

*Дерево решений —* это графическое изображение последова­тельности решений и состояний среды с указанием соответству­ющих вероятностей и выигрышей для любых комбинаций аль­тернатив и состояний среды.

3.4.1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ

В постановочном плане рассмотрим несколько задач, кото­рые могут быть решены с помощью данного метода.

**Задача 3.2.** Разведывательное бурение скважин. Некоторая нефтяная разведывательная партия должна решить, стоит ли бу­рить скважины на данном участке до того, как истечет срок кон­тракта. Для руководителей партии не ясны многие обстоятельства:

• в какую сумму обойдется стоимость бурения, зависящая от качества грунта, глубины залегания нефти и т.д.;

• на какие запасы нефти в этом месте можно рассчитывать;

• сколько будет стоить эксплуатация скважины.

В распоряжении руководства имеются объективные данные об аналогичных и не вполне похожих скважинах этого типа. При помощи сейсмической разведки можно получить дополнитель­ную информацию, которая, однако, не дает исчерпывающих све­дений о геофизической структуре разведываемого участка. Кро­ме того, получение сейсмической информации стоит недешево, поэтому еще до того, как будет принято окончательное решение (бурить или нет), следует определить, есть ли необходимость собирать эти сведения.

**Задача** **3.3.** Выпуск нового товара. Большая химическая ком­пания успешно завершила исследования по усовершенствованию строительной краски. Руководство компании должно решить, производить эту краску самим (и если - да, то какой мощности строить завод) либо продать патент или лицензию, а также тех­нологию независимой фирме, которая имеет дело исключитель­но с производством и сбытом строительной краски. Основные источники неопределенности:

• рынок сбыта, который фирма может обеспечить при прода­же новой краски по данной цене;

• расходы на рекламу, если компания будет сама производить и продавать краску;

• время, которое потребуется конкурентам, чтобы выпустить на рынок подобный товар (успеет ли компания за этот срок окупить затраты, понесенные для того, чтобы стать лидером в данной сфере производства).

Компания может получить некоторые дополнительные све­дения, имеющие косвенное отношение к проблемам проникно­вения конкурентов на рынок сбыта, опросив часть поставщиков краски. Но к материалам опросов следует относиться с осторож­ностью, ибо поставщики в действительности могут поступать не так, как они первоначально предполагают. В качестве подтверж­дения последнего суждения можно привести исследования, про­веденные американскими автомобильными корпорациями для того, чтобы определить спрос на большие легковые автомобили. Несмотря на надвигающийся энергетический кризис 1971-1973 гг., результаты анкетирования показали, что американские покупате­ли по-прежнему предпочитают многоместные легковые автомо­били. Однако на деле все произошло с точностью до наоборот, и на рынке стали пользоваться спросом небольшие, экономич­ные машины. Такие результаты опроса могут быть частично объяснены скрытностью человеческого характера, и это должно учитываться при принятии решений.

3.4.2. АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ

Процесс принятия решений с помощью дерева решений в общем случае предполагает выполнение следующих пяти этапов.

Этап 1. *Формулирование задачи.* Прежде всего необходимо отбросить не относящиеся к проблеме факторы, а среди множе­ства оставшихся выделить существенные и несущественные. Это позволит привести описание задачи принятия решения к подда­ющейся анализу форме. Должны быть выполнены следующие основные процедуры: определение возможностей сбора информаций для экспериментирования и реальных действии; состав­ление перечня событии, которые с определенной вероятностью могут произойти; установление временного порядка расположе­ния событий, в исходах которых содержится полезная и доступ­ная информация, и тех последовательных действий, которые можно предпринять.

Этап 2. *Построение дерева решений.*

Этап 3. *Оценка вероятностей состояний среды,* т.е. сопо­ставление шансов возникновения каждого конкретного события. Следует отметить, что указанные вероятности определяются либо на основании имеющейся статистики, либо экспертным путем.

Этап 4. *Установление выигрышей* (или *проигрышей,* как выигрышей со знаком минус) для каждой возможной комбина­ции альтернатив (действий) и состояний среды.

Этап 5. *Решение задачи.*

Прежде чем продемонстрировать процедуру применения де­рева решений, введем ряд определений. В зависимости от отно­шения к риску решение задачи может выполняться с позиций так называемых «объективистов» и «субъективистов». Поясним эти понятия на следующем примере. Пусть предлагается лотерея: за 10 дол. (стоимость лотерейного билета) игрок с равной вероятно­стью *р* = 0,5 может ничего не выиграть или выиграть 100 дол. Один индивид пожалеет и 10 дол. за право участия в такой лоте­рее, т.е. просто не купит лотерейный билет, другой готов запла­тить за лотерейный билет 50 дол., а третий заплатит даже 60 дол. за возможность получить 100 дол. (например, когда ситуация скла­дывается так, что, только имея 100 дол., игрок может достичь своей цели, поэтому возможная потеря последних денежных средств, а у него их ровно 60 дол., не меняет для него ситуации).

*Безусловным денежным эквивалентом* (БДЭ) игры называет­ся максимальная сумма денег, которую ЛПР готов заплатить за участие в игре (лотерее), или, что то же, та минимальная сумма денег, за которую он готов отказаться от игры. Каждый индивид имеет свой БДЭ.

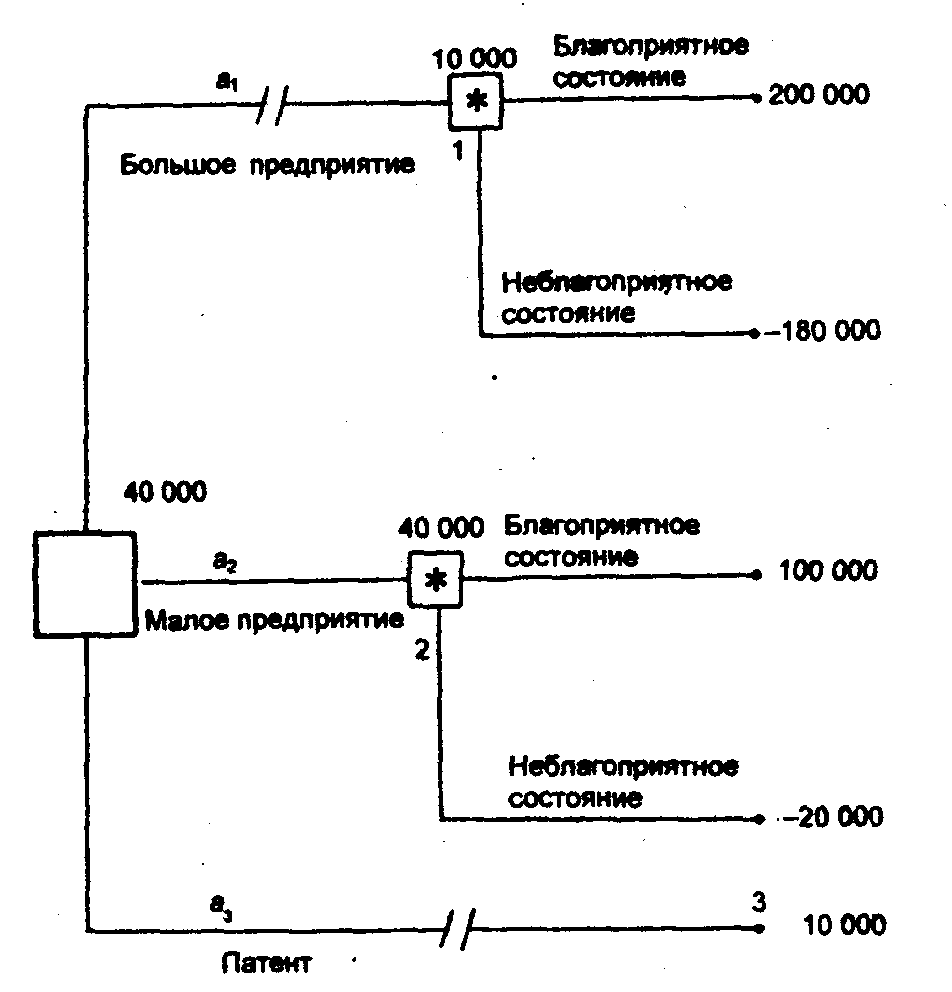
Индивида, для которого БДЭ совпадает с ожидаемой денеж­ной оценкой (ОДО) игры, т.е. со средним выигрышем в игре (лотерее), условно называют объективистом, индивида, для ко­торого БДЭ ^ ОДО, - субъективистом. Ожидаемая денежная оцен­ка рассчитывается как сумма произведений размеров выигрышей на вероятности этих выигрышей. Например, для нашей лотереи ОДО = 0,5\*0 + 0,5\*100 = 50 дол. Если субъективист склонен к риску, то его БДЭ > ОДО. Если не склонен, то БДЭ < ОДО. Воп­рос об отношении к риску более строго рассматривается в гл. 4i

Предположим, что решения принимаются с позиции объек­тивиста.

Рассмотрим процедуру принятия решения на примере следу­ющей задачи.

**Задача 3.4.** Руководство некоторой компании решает, созда­вать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме. Размер выигрыша, который компания может получить, зависит от благо­приятного или неблагоприятного состояния рынка (табл. 3.1).

На основе данной таблицы выигрышей (потерь) можно пост­роить дерево решений (рис. 3.1).



*Рис. 3.1. Дерево решений без дополнительного обследования конъюнктуры рынка:*  *- решение (решение принимает игрок):* [\*] *- случай (решение "принимает" случай); // - отвергнутое решение*

Таблица 3.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер стратегии | Действия компании | Выигрыш, дол., при состоянии экономической среды\* | |
| благоприятном | неблаго­приятном |
| 1 | Строительство круп­ного предприятия (*а1*) | 200 000 | -180 000 |
| 2 | Строительство малого предприятия (*a2*) | 100 000 | -20 000 |
| 3 | Продажа патента (*a3*) | 10 000 | -10 000 |

• Вероятность благоприятного и неблагоприятного состояний экономичес­кой среды равна 0,5.

Процедура принятия решения заключается в вычислении для каждой вершины дерева (при движении справа налево) ожидае­мых денежных оценок, отбрасывании неперспективных ветвей и выборе ветвей, которым соответствует максимальное значение ОДО.

Определим средний ожидаемый выигрыш (ОДО):

• для вершины 1 ОДО1 = 0,5\*200 000 + 0,5(-180 000) = 10 000 дол.;

• для вершины 2 ОДО2 = 0,5\*100 000 + 0,5(-20 000) = 40 000 дол.;

• для вершины 3 ОДО3 = 10 000 дол.

Вывод. Наиболее целесообразно выбрать стратегию *а2,* т.е. строить малое предприятие, а ветви (стратегии) *а1* и *а3* дерева решений можно отбросить. ОДО наилучшего решения равна 40 000 дол. Следует отметить, что наличие состояния с вероят­ностями 50 % неудачи и 50 % удачи на практике часто означает, что истинные вероятности игроку скорее всего неизвестны и он всего лишь принимает такую гипотезу (так называемое предпо­ложение «fifty - fifty» - пятьдесят на пятьдесят).

Усложним рассмотренную выше задачу.

Пусть перед тем, как принимать решение о строительстве, руководство компании должно определить, заказывать ли допол­нительное исследование состояния рынка или нет, причем пре­доставляемая услуга обойдется компании в 10 000 дол. Руковод­ство понимает, что дополнительное исследование по-прежнему не способно дать точной информации, но оно поможет уточнить ожидаемые оценки конъюнктуры рынка, изменив тем самым значения вероятностей.

Относительно фирмы, которой можно заказать прогноз, изве­стно, что она способна уточнить значения вероятностей благо­приятного или неблагоприятного исхода. Возможности фирмы в виде условных вероятностей благоприятности и неблагоприят­ности рынка сбыта представлены в табл. 3.2. Например, когда фирма утверждает, что рынок благоприятный, то с вероятностью 0,78 этот прогноз оправдывается (с вероятностью 0,22 могут возникнуть неблагоприятные условия), прогноз о неблагоприят­ности рынка оправдывается с вероятностью 0,73.

Таблица 3.2

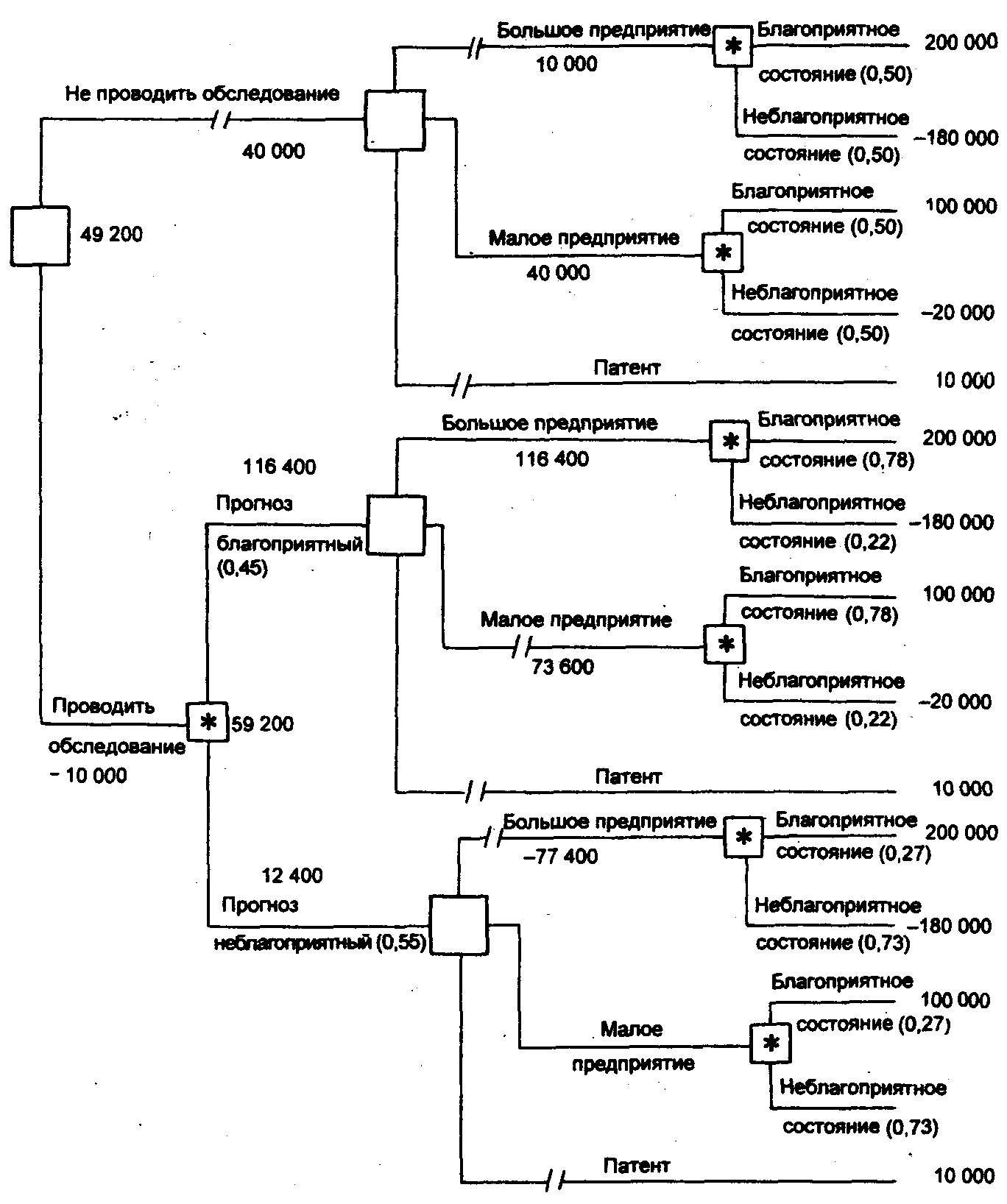
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Прогноз фирмы | Фактически | |
| Благоприятный | Неблагоприятный |
| Благоприятный | 0,78 | 0,22 |
| Неблагоприятный | 0,27 | 0,73 |

Предположим, что фирма, которой заказали прогноз состоя­ния рынка, утверждает:

• ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,45;

• ситуация будет неблагоприятной с вероятностью 0,55.

На основании дополнительных сведений можно построить новое дерево решений (рис. 3.2), где развитие событий происхо­дит от корня дерева к исходам, а расчет прибыли выполняется от конечных состояний к начальным.



*Рис. 3.2. Дерево решений при дополнительном обследовании рынка (см. условные обозначения к рис. 3.1)*

Анализируя дерево решений, можно сделать следующие выводы:

• необходимо проводить дополнительное исследование конъ­юнктуры рынка, поскольку это позволяет существенно уточнить принимаемое решение;

• если фирма прогнозирует благоприятную ситуацию на рынке, то целесообразно строить большое предприятие (ожида­емая максимальная прибыль 116 400 дол.), если прогноз не­благоприятный - малое (ожидаемая максимальная прибыль 12 400 дол.).

3.4.3. ОЖИДАЕМАЯ ЦЕННОСТЬ ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Предположим, что консультационная фирма за определенную плату готова предоставить информацию о фактической ситуации на рынке в тот момент, когда руководству компании надлежит принять решение о масштабе производства. Принятие предложе­ния зависит от соотношения между ожидаемой ценностью (ре­зультативностью) точной информации и величиной запрошенной платы за дополнительную (истинную) информацию, благодаря которой может быть откорректировано принятие решения, т.е. первоначальное действие может быть изменено.

Ожидаемая ценность точной информации о фактическом состоянии рынка равна разности между ожидаемой денежной оценкой при наличии точной информации и максимальной ожидаемой денежной оценкой при отсутствии точной инфор­мации.

Рассчитаем ожидаемую ценность точной информации для примера, в котором дополнительное обследование конъюнктуры рынка не проводится. При отсутствии точной информации, как уже было показано выше, максимальная ожидаемая денежная оценка равна:

ОДО = 0,5 \* 100 000 - 0,5 \* 20 000 *=* 40 000 дол.

Если точная информация об истинном состоянии рынка бу­дет благоприятной (ОДО =200 000 дол., *см.* табл. 3.1), принима­ется решение строить крупное производство; если неблагоприятной, то наиболее целесообразное решение - продажа патента (ОДО=10 000 дол.). Учитывая, что вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуаций равны 0,5, значение ОДОт.и (ОДО точной информации) определяется выражением:

ОДОт.и = 0,5 \* 200 000 + 0,5 \* 10 000 = 105 000 дол.

Тогда ожидаемая ценность точной информации равна:

ОЦт.и = ОДОт.и - ОДО = 105 000 - 40 000 = 65 000 дол.

Значение ОЦт.и показывает, какую максимальную цену должна быть готова заплатить компания за точную информацию об ис­тинном состоянии рынка в тот момент, когда ей это необходимо.

3.5. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

**Задача 3.5.** Компания «Российский сыр» - небольшой произ­водитель различных продуктов из сыра на экспорт. Один из продуктов - сырная паста - поставляется в страны ближнего зарубежья. Генеральный директор должен решить, сколько ящи­ков сырной пасты следует производить в течение месяца. Веро­ятности того, что спрос на сырную пасту в течение месяца будет 6, 7, 8 или 9 ящиков, равны соответственно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Затраты на производство одного ящика равны 45 дол. Компа­ния продает каждый ящик по цене 95 дол. Если ящик с сырной пастой не продается в течение месяца, то она портится и компа­ния не получает дохода. Сколько ящиков следует производить в течение месяца?

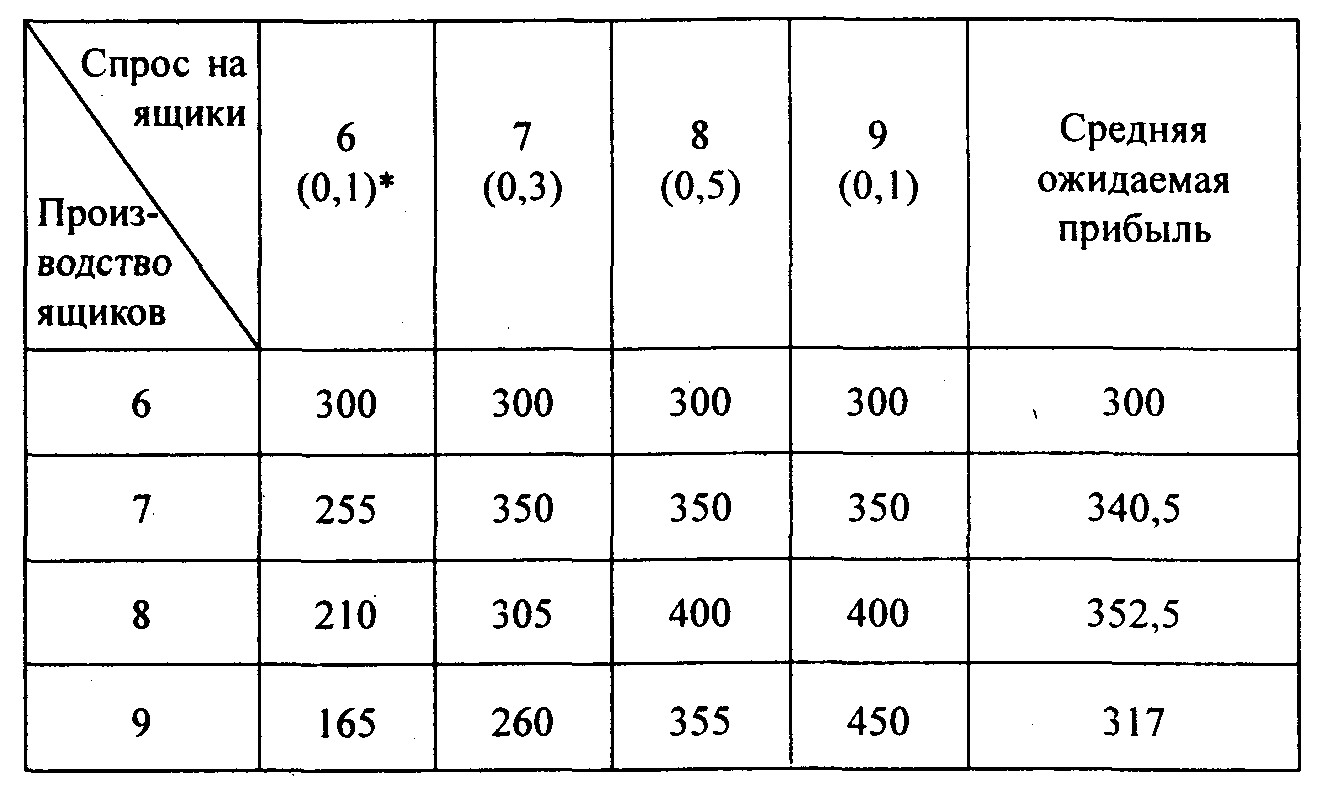
Решение. Пользуясь исходными данными, строим матри­цу игры. Стратегиями игрока 1 (компания «Российский сыр») являются различные показатели числа ящиков с сырной пас­той, которые ему, возможно, следует производить. Состояниями природы выступают величины спроса на аналогичное число ящиков.

Вычислим, например, показатель прибыли, которую получит производитель, если он произведет 8 ящиков, а спрос будет толь­ко на 7.

Каждый ящик продается по 95 дол. Компания продала 7, а произвела 8 ящиков. Следовательно, выручка будет 7\*95, а из­держки производства 8 ящиков 8\*45. Итого прибыль от указан­ного сочетания спроса и предложения будет равна: 7\*95 - 8\*45 = 305 дол. Аналогично производятся расчеты при других соче­таниях спроса и предложения.

В итоге получим следующую платежную матрицу в игре с природой (табл. 3.3). Как видим, наибольшая средняя ожидаемая прибыль равна 352,5 дол. Она отвечает производству 8 ящиков.

Таблица 3.3



\* В скобках приведена вероятность спроса на ящики.

На практике чаще всего в подобных случаях решения принима­ются исходя из критерия максимизации средней ожидаемой прибы­ли или минимизации ожидаемых издержек. Следуя такому подходу, можно остановиться на рекомендации производить 8 ящиков, и для большинства ЛПР рекомендация была бы обоснованной. Именно так поступаем мы, когда в гл. 6 - 8 рассматриваем различные при­кладные задачи принятия решений в играх с природой.

Однако, привлекая дополнительную информацию в форме расчета среднего квадратичного отклонения как индекса риска, мы можем уточнить принятое на основе максимума прибыли или минимума издержек решение. Это в полной мере согласуется с характеристиками вариантов, представленных на рис. 1.1. Допол­нительные рекомендации могут оказаться неоднозначными, за­висимыми от склонности к риску ЛПР.

Вспомним необходимые для наших исследований формулы теории вероятностей [2, с. 109, 119]:

дисперсия случайной величины ξ*,* равна

*Dξ = M(ξ*2*) – (Mξ)*2*;*

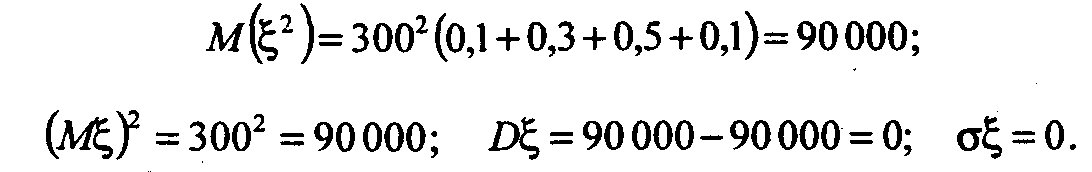
среднее квадратичное отклонение



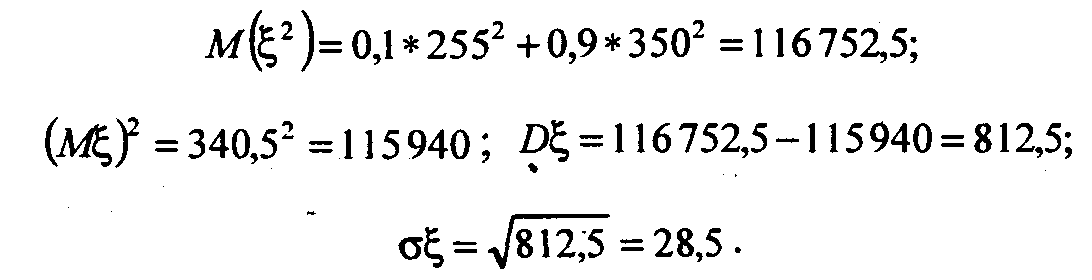
где *D* и *М -* соответственно символы дисперсии и математического ожидания.

Проводя соответствующие вычисления для случаев производ­ства 6, 7, 8 и 9 ящиков, получаем:

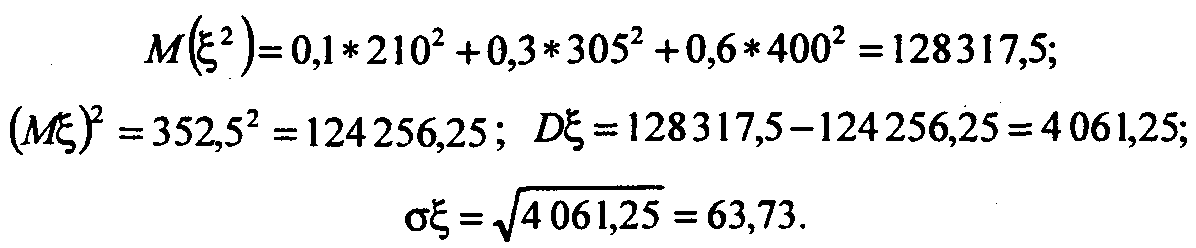
6 ящиков



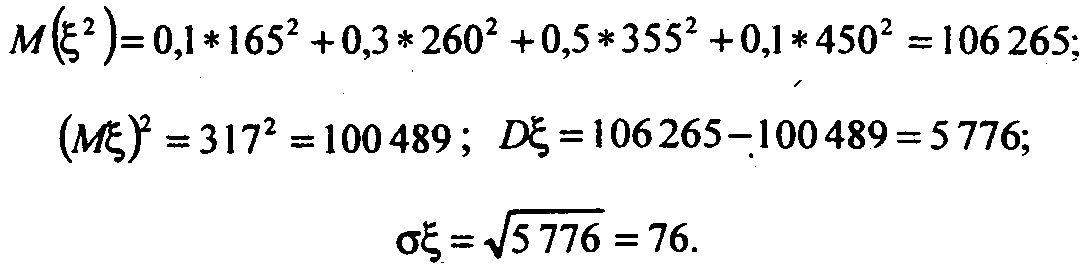
7 ящиков



8 ящиков



9 ящиков



Вывод. Из представленных результатов расчетов с учетом полученных показателей рисков - средних квадратичных отклоне­нии - очевидно, что производить 9 ящиков при любых обстоятель­ствах нецелесообразно, ибо средняя ожидаемая прибыль, равная 317, меньше, чем для 8 ящиков (352,5), а среднее квадратичное откло­нение (76) для 9 ящиков больше аналогичного показателя для 8 ящиков (63,73). А вот целесообразно ли производство 8 ящиков по сравнению с 7 или 6 - неочевидно, так как риск при производстве 8 ящиков (σξ = 63,73) больше, чем при производстве 7 ящиков (σξ = 28,5) и тем более 6 ящиков, где σξ = 0. Вся информация с учетом ожидаемых прибылей и рисков налицо. Решение должен принимать генеральный директор компании «Российский сыр» с учетом его опыта, склонности к риску и степени достоверности показателей вероятностей спроса: 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. Авторы, учиты­вая все приведенные числовые характеристики случайной величи­ны - прибыли, склоняются к рекомендации производить 7 ящиков (не 8, что вытекает из максимизации прибыли без учета риска!). Читателю предлагается обосновать свой выбор.

**Задача 3.6.** Рассмотрим упомянутую выше проблему закупки угля для обогрева дома. Имеются следующие данные о количестве и ценах угля, необходимого зимой для отопления дома (табл. 3.4). Вероятности зим: мягкой - 0,35; обычной - 0,5; холодной - 0,15.

Таблица 3.4

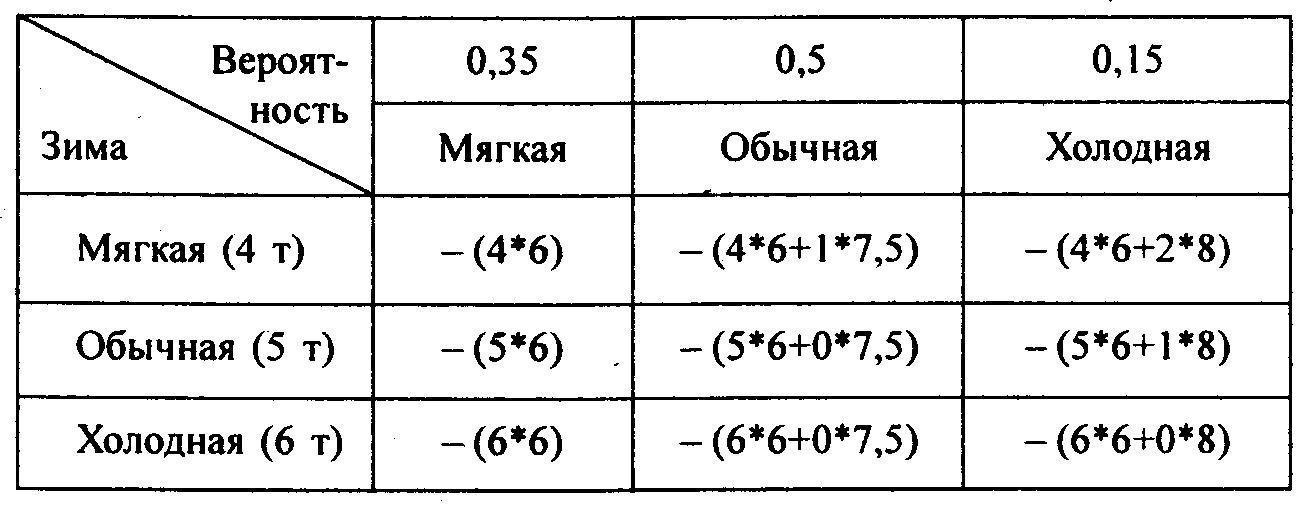
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Зима | Количество угля, т | Средняя цена за 1 т в ф. ст. |
| Мягкая | 4 | 7 |
| Обычная | 5 | 7,5 |
| Холодная | 6 | 8 |

Эти цены относятся к покупкам угля зимой. Летом цена угля 6 ф. ст. за 1 т, у вас есть место для хранения запаса угля до 6 т, заготавливаемого летом. Если потребуется зимой докупить недо­стающее количество угля, докупка будет по зимним ценам. Пред­полагается, что весь уголь, который сохранится до конца зимы, в лето пропадет.\* Сколько угля летом покупать на зиму?

\* Предположение делается для упрощения постановки и решения задачи.

Решение. Построим платежную матрицу (табл. 3.5).

Таблица 3.5



Произведем расчет ожидаемой средней платы за уголь (табл. 3.6).

Таблица 3.6

|  |  |
| --- | --- |
| Зима | Средняя ожидаемая плата |
| Мягкая | -(24\*0,35+31,5\*0,5+40\*0,15)= -30,15 |
| Обычная | -(30\*0,35+30\*0,5+38\*0,15)= -31,2 |
| Холодная | -(36\*0,35+36\*0,5+36\*0,15)= -36 |

Как видим из табл. 3.6, наименьшая ожидаемая средняя пла­та приходится на случай мягкой зимы (30,15 ф. ст.). Соответ­ственно если не учитывать степени риска, то представляется целесообразным летом закупить 4 т угля, а зимой, если потребу­ется, докупить уголь по более высоким зимним ценам.

Если продолжить исследование процесса принятия решения и аналогично задаче 3.5 вычислить средние квадратичные откло­нения платы за уголь для мягкой, обычной и холодной зимы, то соответственно получим:

**•** для мягкой зимыσξ = 5,357;

• для обычной зимы σξ = 2,856;

• для холодной зимы σξ = 0.

Минимальный риск, естественно, будет для холодной зимы, однако при этом ожидаемая средняя плата за уголь оказывается максимальной - 36 ф. ст.

Вывод. Мы склоняемся к варианту покупки угля для обыч­ной зимы, так как согласно табл. 3.6 ожидаемая средняя плата за уголь по сравнению с вариантом для мягкой зимы возрастает на 3,5 %, а степень риска при этом оказывается почти в 2 раза меньшей (σξ *=* 2,856 против 5,357).

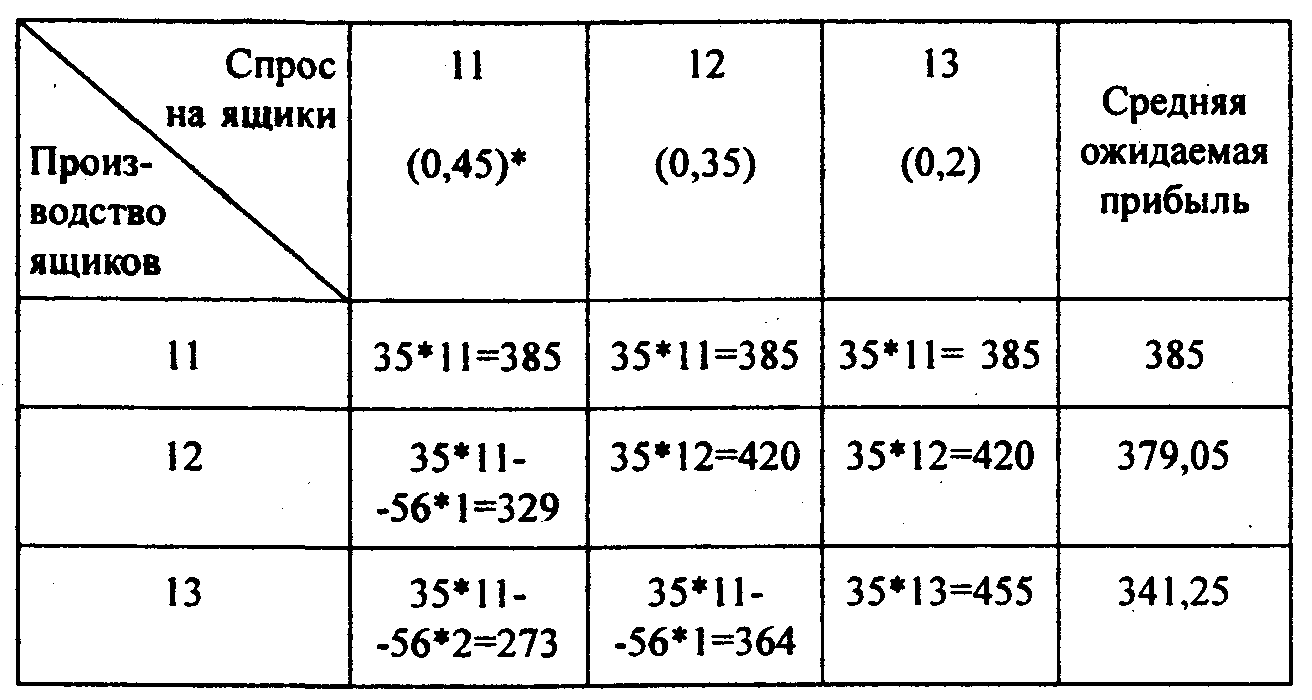
Отношение среднего квадратичного отклонения к математи­ческому ожиданию (средний риск на затрачиваемый 1 ф. ст.) для обычной зимы составляет  = 0,0915 против аналогичного показателя для мягкой зимы, равного  = 0,1777, т.е. вновь различие почти в 2 раза.

Эти соотношения и позволяют нам рекомендовать покупку угля, ориентируясь не на мягкую, а на обычную зиму.

**Задача** **3.7.** АО «Фото и цвет» - небольшой производитель химических реактивов и оборудования, которые используются не­которыми фотостудиями при изготовлении 35-мм фильмов. Один из продуктов, который предлагает «Фото и цвет», - ВС-6. Пре­зидент АО продает в течение недели 11, 12 или 13 ящиков ВС-6. От продажи каждого ящика АО получает 35 дол. прибыли. Как и многие фотографические реактивы, ВС-6 имеет очень малый срок годности. Поэтому, если ящик не продан к концу недели, он должен быть уничтожен. Каждый ящик обходится предприятию в 56 дол. Вероятности продать 11, 12 и 13 ящиков в течение недели равны соответственно 0,45; 0,35; 0,2. Как вы советуете поступить? Как вы порекомендуете поступить, если бы «Фото и цвет» мог сделать ВС-6 с добавкой, значительно про­длевающей срок его годности?

Решение. Матрицу игры с природой (здесь АО «Фото и цвет» - игрок с природой, а природа - торговая конъюнкту­ра) строим по аналогии с рассмотренными выше задачами (табл. 3.7).

Таблица 3.7



\* В скобках приведены вероятности спроса на ящики.

Расчет средней ожидаемой прибыли производится с исполь­зованием вероятностей состояний природы, как и в задачах 3.5 и 3.6.

Вывод. Наибольшая из средних ожидаемых прибылей (385 дол.) отвечает при заданных возможностях спроса произ­водству 11 ящиков ВС-6.

Производство 11 ящиков в неделю и следует рекомендовать АО «Фото и цвет», ибо показатель риска - среднее квадратичное отклонение, как нетрудно убедиться, σξ = 0 - минимален при максимальной средней ожидаемой прибыли.

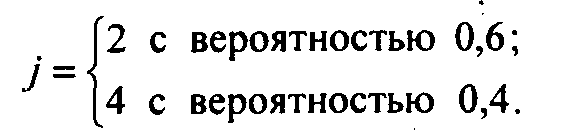
Если срок службы химического реактива будет удлинен, то его производство даже при прежнем спросе можно увеличить, частично поставляя на склад для последующей реализации.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

**Задача 3.8.** Компания, производящая стиральный порошок, работа­ет в условиях свободной конкуренции. Порошок выпускается блоками, причем цена одного блока в будущем месяце является неопределенной: 10 руб. с вероятностью 0,3; 15 руб. с вероятностью 0,5; 20 руб. с веро­ятностью 0,2. Полные затраты (ПЗ) на производство *Q* блоков стираль­ного порошка определяются зависимостью ПЗ *=* 1000 + *5Q + 0,0025Q2.*

Постройте таблицу решений и определите суточный выпуск про­дукции компании (в блоках), при котором среднесуточная прибыль будет максимальной.

**Задача 3.9.** Спрос на некоторый товар, производимый монополис­том, определяется зависимостью *Q* = 100 — 5*р* + 5*j*, где *j* - достоверно неизвестный уровень дохода потребителей, *р -* цена товара. По оцен­кам экспертов,



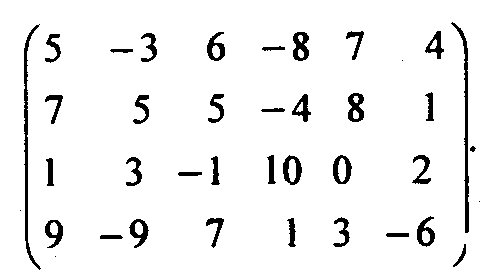
Полные затраты на производство товара определяются зависимос­тью ПЗ = 5 + 4*Q +* 0,05*Q2.* Сколько товара должен выпускать монопо­лист и по какой цене продавать, чтобы максимизировать свою ожида­емую прибыль?

**Задача 3.10.** Молодой российский бизнесмен предполагает постро­ить ночную дискотеку неподалеку от университета. По одному из допу­стимых проектов предприниматель может в дневное время открыть в здании дискотеки столовую для студентов и преподавателей. Другой вариант не связан с дневным обслуживанием клиентов. Представлен­ные бизнес-планы показывают, что план, связанный со столовой, может принести доход в 250 тыс. руб. Без открытия столовой бизнесмен мо­жет заработать 175 тыс. руб. Потери в случае открытия дискотеки со столовой составят 55 тыс. руб., а без столовой- 20 тыс. руб. Определи­те наиболее эффективную альтернативу на основе средней стоимост­ной ценности в качестве критерия.

**Задача 3.11.** Небольшая частная фирма производит косметическую продукцию для подростков. В течение месяца реализуется 15, 16 или 17 упаковок товара. От продажи каждой упаковки фирма получает 75 руб. прибыли. Косметика имеет малый срок годности, поэтому, если упаковка не продана в месячный срок, она должна быть уничтожена. Посколь­ку производство одной упаковки обходится в 115 руб., потери фирмы составляют 115 руб., если упаковка не продана к концу месяца. Веро­ятности продать 15, 16 или 17 упаковок за месяц составляют соответ­ственно 0,55; 0,1 и 0,35. Сколько упаковок косметики следует произво­дить фирме ежемесячно? Какова ожидаемая стоимостная ценность это­го решения? Сколько упаковок можно было бы производить при значи­тельном продлении срока хранения косметической продукции?

**Задача 3.12.** Магазин «Молоко» продает в розницу молочные про­дукты. Директор магазина должен определить, сколько бидонов смета­ны следует закупить у производителя для торговли в течение недели. Вероятности того, что спрос на сметану в течение недели будет 7, 8, 9 или 10 бидонов, равны соответственно 0,2; 0,2; 0,5 и 0,1. Покупка одного бидона сметаны обходится магазину в 70 руб., а продается сметана по цене 110 руб. за бидон. Если сметана не продается в течение недели, она портится, и магазин несет убытки. Сколько бидонов сметаны жела­тельно приобретать для продажи? Какова ожидаемая стоимостная цен­ность этого решения?

**Задача 3.13.** Найти наилучшие стратегии по критериям: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0,2), Гурвица применительно к матрице рисков (коэффициент пессимизма равен 0,4) для следующей платежной матрицы игры с природой (эле­менты матрицы - выигрыши):



**Задача 3.14.** Директор лицея, обучение в котором осуществляется на платной основе, решает, следует ли расширять здание лицея на 250 мест, на 50 мест или не проводить строительных работ вообще. Если население небольшого города, в котором организован платный лицей, будет расти, то большая реконструкция могла бы принести прибыль 250 тыс. руб. в год, незначительное расширение учебных помещений могло бы приносить 90 тыс. руб. прибыли. Если население города уве­личиваться не будет, то крупное расширение обойдется лицею в 120 тыс. руб. убытка, а малое - 45 тыс. руб. Однако информация о том, как будет изменяться население города, отсутствует. Построите дерево ре­шений и определите лучшую альтернативу, используя критерии Вальда. Чему равно значение ОДО для наилучшей альтернативы в отсутствие необходимой информации?

Пусть при тех же исходных данных государственная статистичес­кая служба предоставила информацию об изменении численности на­селения: вероятность роста численности населения составляет 0,7; ве­роятность того, что численность населения останется неизменной или будет уменьшаться, равна 0,3. Определите наилучшее решение, исполь­зуя критерий максимизации ожидаемой денежной оценки. Чему равно значение ОДО для наилучшей альтернативы при получении дополни­тельной информации? Какова ожидаемая ценность дополнительной ин­формации?

**Задача 3.15.** При крупном автомобильном магазине планируется открыть мастерскую по предпродажному обслуживанию и гарантийно­му ремонту автомобилей. Консультационная фирма готова предоставить дополнительную информацию о том, будет ли рынок благоприятным или нет. Эти сведения обойдутся магазину в 13 тыс. руб. Администра­ция магазина считает, что эта информация гарантирует благоприятный рынок с вероятностью 0,5. Если рынок будет благоприятным, то боль­шая мастерская принесет прибыль в 60 тыс. руб., а маленькая - 30 тыс. руб. При неблагоприятном рынке магазин потеряет 65 тыс. руб., если будет открыта большая мастерская, и 30 тыс. руб.- если откроется маленькая. Не имея дополнительной информации, директор оценивает вероятность благоприятного рынка как 0,6. Положительный результат обследования гарантирует благоприятный рынок с вероятностью 0,8. При отрицательном результате рынок может оказаться благоприятным с вероятностью 0,3. Постройте дерево решений и определите:

• Следует ли заказать консультационной фирме дополнительную информацию, уточняющую конъюнктуру рынка?

• Какую мастерскую следует открыть при магазине: большую или маленькую?

• Какова ожидаемая денежная оценка наилучшего решения?

• Какова ожидаемая ценность дополнительной информации?

**Задача 3.16.** Фирма, производящая вычислительную технику, про­вела анализ рынка нового высокопроизводительного персонального компьютера. Если будет выпущена крупная партия компьютеров, то при благоприятном рынке прибыль составит 250 тыс. руб., а при неблагоп­риятных условиях фирма понесет убытки в 185 тыс. руб. Небольшая партия техники в случае ее успешной реализации принесет фирме 50 тыс. руб. прибыли и 10 тыс. руб. убытков - при неблагоприятных внешних условиях. Возможность благоприятного и неблагоприятного исходов фирма оценивает одинаково. Исследование рынка, которое мо­жет провести эксперт, обошлось фирме в 15 тыс. руб. Эксперт считает, что с вероятностью 0,6 рынок окажется благоприятным. В то же время при положительном заключении благоприятные условия ожидаются лишь с вероятностью 0,8. При отрицательном заключении с вероятно­стью 0,15 рынок также может оказаться благоприятным. Используйте дерево решений для того, чтобы помочь фирме выбрать правильную технико-экономическую стратегию. Ответьте на следующие вопросы:

• Следует ли заказывать эксперту дополнительное обследование рынка?

• Какую максимальную сумму фирма может выплатить эксперту за проделанную работу?

• Какова ожидаемая денежная оценка наилучшего решения?

**Задача 3.17.** Автомобильный завод получает реле поворота от двух поставщиков: *А* и *В.* Качество этих изделий характеризуется данными в табл.3.8.

Таблица 3.8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Процент брака | Вероятность для поставщика | |
| *А* | *В* |
| 1 | 0,7 | 0,4 |
| 2 | 0,1 | 0,3 |
| 3 | 0,09 | 0,15 |
| 4 | 0,07 | 0,1 |
| 5 | 0,04 | 0,05 |

Полные затраты, связанные с ремонтом одного бракованного реле, составляют 5 руб.

Реле поступают партиями по 20 000 шт. Поскольку качество изде­лий у поставщика *В* хуже, он уступает всю партию на 500 руб. дешевле. Постройте дерево решений. Какого поставщика следует выбрать?

Глава 4 ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ НЕЙМАНА - МОРГЕНШТЕРНА

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ

Обоснование выбора решения в предыдущих главах выпол­нялось с позиции объективиста. Если же ЛПР - субъективист, то он будет руководствоваться индивидуально определенным БДЭ. Поясним смысл этой величины. Рассмотрим ситуацию, когда игрок с вероятностью 0,8 выигрывает 40 дол. и с вероятностью 0,2 проигрывает 20 дол. Попробуем выяснить, за какую сумму ЛПР уступит свое право участвовать в игре. Как отмечалось, объективист пользуется правилом: БДЭ = ОДО = 0,8\*40 + 0,2 (–20) *=* 28 дол. Поэтому свое право на игру он уступит не менее чем за 28 дол. Субъективист, как правило, готов уступить свое право на игру за меньшую сумму, поскольку для него БДЭ < ОДО. Причинами такого поведения могут быть:

• финансовое состояние игрока (возможно, он на грани бан­кротства и ему необходимы денежные средства);

• отношение игрока к риску вообще (склонность к риску);

• настроение или состояние здоровья игрока;

• множество других, даже непосредственно не относящихся к бизнесу причин.

Величина БДЭ может изменяться со временем в зависимости от обусловленных указанными причинами обстоятельств. Например, в случае катастрофической нехватки финансовых средств (наличных денег) право на игру можно уступить и за более низкий эквивалент.

Исследуем реалистичность критерия выбора решения, осно­ванного на расчете ОДО. Рассмотрим две альтернативы:

1) выигрыш 1 000 000 дол. с вероятностью 1;

2) игра (лотерея): выигрыш 2 100 000 дол. с вероятностью 0,5 и проигрыш 50 000 дол. с вероятностью 0,5. В этом случае

ОДО= 0,5\* 2 100 000 - 0,5\* 50 000 = 1 025 000 дол.

Относительно получаемого среднего выигрыша указанные альтернативы практически эквивалентны, и если игрок безраз­личен к риску, он выберет вторую альтернативу. Если он к риску не безразличен, а подавляющее число людей именно таковыми являются, то выбор будет зависеть главным образом от финансо­вого состояния игрока. Игроки, имеющие скромный денежный доход, предпочтут не рисковать и выберут гарантированный выигрыш. Для ЛПР, обладающего достаточно крупным капита­лом, проигрыш в 50 000 дол. невелик, и он предпочтет рискнуть. Рисковать будут также игроки, патологически склонные к фи­нансовым авантюрам.

В данной главе будут изложены основы математической те­ории принятия субъективных решений [13]. Методология раци­онального принятия решений в условиях неопределенности, основанная на функции полезности индивида, опирается на пять аксиом, которые отражают минимальный набор необходимых условий непротиворечивого и рационального поведения игрока. Для компактного изложения аксиом нам потребуется следующее определение.

*Определение 4.1.* Предположим, что конструируется игра, в которой индивид с вероятностью а получает денежную сумму *х* и с вероятностью (1 – *α*) - сумму z. Эту ситуацию будем обозна­чать *G(x, z: α*).

*Аксиома* 1*.* Аксиома сравнимости (полноты). Для всего мно­жества *S* неопределенных альтернатив (возможных исходов) индивид может сказать, что либо исход *х* предпочтительнее ис­хода *у* (*х  у*)*,* либо *у  х,* либо индивид безразличен в отноше­нии к выбору между *х* и *у* (*х* *у*)*.* Запись *х* *у* означает, что исход *х* предпочтительнее исхода *у* либо индивид безразличен в отношении к выбору между *х* и *у.*



*Аксиома 2.* Аксиома транзитивности (состоятельности). Если *х* ** *у* и *у* ** z, то *х* **z. Если *х* *у* и *у* z, то *х*  *z*.



*Аксиома 3.* Аксиома сильной независимости. Предположим, что мы конструируем игру, в которой индивид с вероятностью а получает денежную сумму х и с вероятностью (1 - α) — сумму *z*, т.е. *G(x,* *z*: α). Сильная независимость означает, что если ин­дивид безразличен в отношении к выбору между *х* и *у* (*х*   *у*),то он также будет безразличен в отношении к выбору между игрой (лотереей) *G*(*x, z:* α) и игрой *G*(*y, z:* α), т.е. из *х*  *у* следует *G*(*x, z:* α) *G*(*y, z:* α).



*Аксиома 4.* Аксиома измеримости. Если *х  у* *z* или *х у* ** *z*, то существует единственная вероятность α, такая, что *у*  *G*(*x, z:* α).



Поясним смысл этой аксиомы. Пусть, например, имеем три исхода: *х =* 1000; *у =* 0; *z* означает смерть игрока. Исходя из здра­вого смысла смерть нельзя сравнивать ни с каким выигрышем, и соответствующего этому исходу значения вероятности α суще­ствовать не может. Однако в жизни бывают ситуации, когда некий проигрыш равнозначен смерти. Тогда утверждение *у*  *G*(*x, z:* α) можно считать справедливым для некоторого значения .



*Аксиома 5.* Аксиома ранжирования. Если альтернативы *у* и *и* находятся по предпочтительности между альтернативами *х* и *z* и можно построить игры, такие, что индивид безразличен в отно­шении к выбору между *у* и *G*(*x, z:* α2), a также к выбору между *и* и *G(x, z:* α2), то при  *у  и*.

Поясним смысл этой аксиомы. Пусть существуют следующие альтернативы: *х =* 1000; *у =* 500; *и =* 200; *z =* –10. Пусть эквива­лентны две пары ситуаций, одна из которых неигровая, а другая игровая:

1) гарантированно получить 500 или игра: с вероятностью α1, выиграть 1000 и с вероятностью (1 – α1) проиграть 10, т.е.

500 *G*(1000, -10: α1);



2) гарантированно получить 200 или игра: с вероятностью α2 выиграть 1000 и с вероятностью (l - α2) проиграть 10, т.е.

200 *G*(1000, -10: α2).



Очевидно, что при указанных условиях α1 α2. Если α1 +α2, то *у и.*



Утверждение аксиомы вполне соответствует здравому смыс­лу: чем больше вероятность крупного выигрыша, тем больше игра «стоит», т.е. тем большая плата потребуется за приобретение права участвовать в этой игре.

Если принять приведенные аксиомы и предположить, что люди предпочитают большее количество некоторого блага мень­шему, то все это в совокупности определяет рациональное пове­дение ЛПР.

При названных предположениях американскими учеными Дж. Нейманом и О. Моргенштерном было показано, *что ЛПР при принятии решения будет стремиться к максимизации ожи­даемой полезности.* Другими словами, из всех возможных реше­нии он выберет то, которое обеспечивает наибольшую ожидае­мую полезность. Сформулируем определение полезности по Нейману-Моргенштерну.

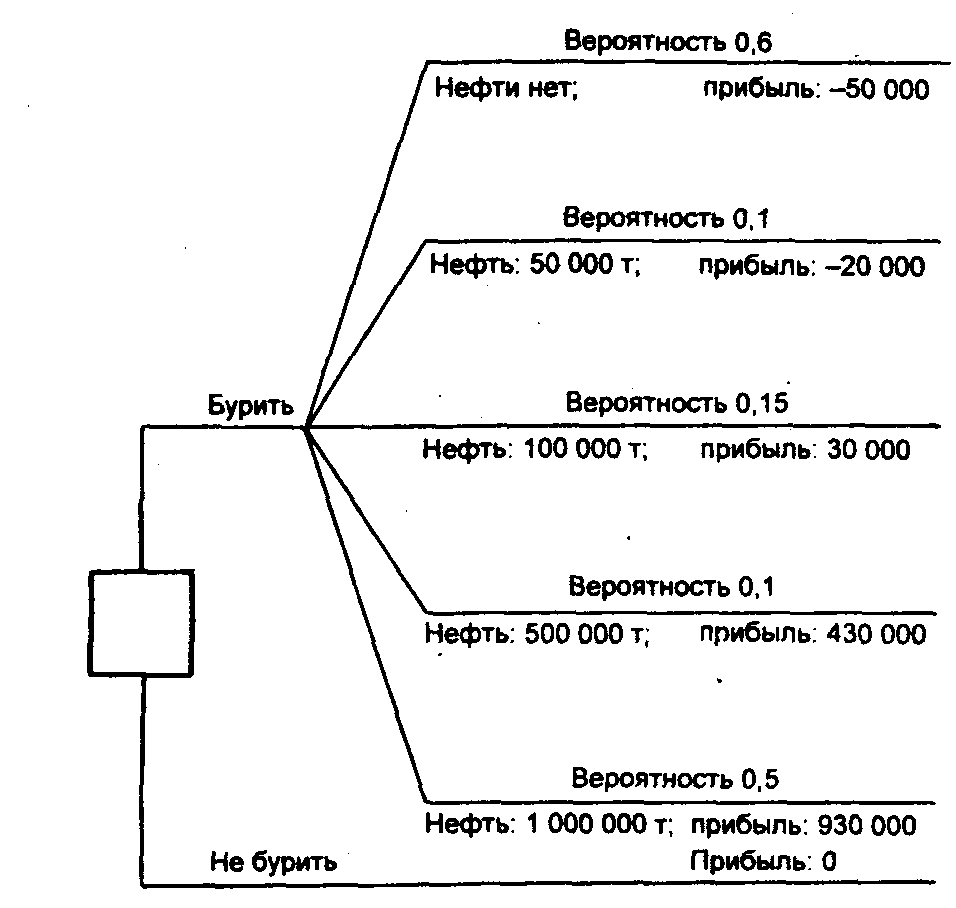
*Определение 4.2.* Полезность - это некоторое число, припи­сываемое лицом, принимающим решение, каждому возможному исходу. Функция полезности Неймана - Моргенштерна для ЛПР показывает полезность, которую он приписывает каждому воз­можному исходу. У каждого ЛПР своя функция полезности, ко­торая показывает его предпочтение к тем или иным исходам в зависимости от его отношения к риску.

*Определение 4.3.* Ожидаемая полезность события равна сум­ме произведений вероятностей исходов на значения полезностей этих исходов.

Проиллюстрируем практическую реализацию введенных по­нятий на примере расчета ОДО и сопоставления этого значения с полезностью.

**Задача 4.1.** Нефтеперерабатывающая фирма решает вопрос о бурении скважины. Известно, что если фирма будет бурить, то с вероятностью 0,6 нефти найдено не будет; с вероятностью 0,1 запасы месторождения составят 50 000 т; с вероятностью 0,15 -100 000 т; с вероятностью 0,1 - 500 000 т; с вероятностью 0,05 -1 000 000 т. Если нефть не будет найдена, то фирма потеряет 50 000 дол.; если мощность месторождения составит 50 000 т, то потери снизятся до 20 000 дол.; мощность месторождения в 100 000 т принесет прибыль 30 000 дол.; 500 000 т- 430 000 дол.; 1 000 000 т - 930 000 дол. Дерево решений данной задачи пред­ставлено на рис. 4.1. Нетрудно рассчитать ожидаемое значение вы­игрыша:

ОДО = 0,6(-50 000) + 0,1 (-20 000) + 0,15\*30 000 + + 0,1\*430 000 + 0,05\*930 000 = 62 000 дол.



*Рис. 4.1. Дерево решений для задачи 4.1 (прибыль указана в долларах)*

Если ЛПР, представляющий фирму, безразличен к риску и принимает решение о проведении буровых работ на основании рассчитанного ОДО, то он воспринимает ожидаемую полезность как пропорциональную ОДО, полагая *U* = 62. Учитывая, что *U -* индивидуальное число, характеризующее ЛПР, нули, отвечаю­щие расчету ОДО, можно отбросить. В этом случае функция полезности *U(v),* где *v -* прибыль, получаемая при различных исходах, является прямой с положительным наклоном. Ниже бу­дет показано, что *U* можно задавать с точностью до некоторого монотонного преобразования.

Для принятия решения в случае небезразличия ЛПР к риску необходимо уметь оценивать значения полезности каждого из допустимых исходов. Дж. Нейман и О. Моргенштерн предложи­ли процедуру построения индивидуальной функции полезности, которая (процедура) заключается в следующем: ЛПР отвечает на ряд вопросов, обнаруживая при этом свои индивидуальные предпочтения, учитывающие его отношение к риску. Значения полезностей могут быть найдены за два шага.

Шаг 1. Присваиваются произвольные значения полезностей выигрышам для худшего и лучшего исходов, причем первой величине (худший исход) ставится в соответствие меньшее чис­ло. Например, для приведенной выше задачи *U*(-50 000 дол.) = 0, а *U*(930 000 дол.) = 50. Тогда полезности промежуточных выиг­рышей будут находиться в интервале от 0 до 50. Полезность исхода даже для одного индивида определяется не однозначно, а с точностью до монотонного преобразования. Пусть, напри­мер, имеем *x1, х2,..., хn -* полезности, приписываемые *п* ожида­емым значениям выигрышей. Тогда α+β*x1,* α*+*β*х2,...,* α*+*β*хn* (где (β > 0) также будут полезностями. Если в задаче 4.1 при рас­чете полезности отбросить последние нули, это будет эквивален­тно линейному преобразованию функции полезности при α *=* 0и β = 0,001.

Шaг 2. Игроку предлагается на выбор: получить некоторую гарантированную денежную сумму , находящуюся между луч­шим и худшим значениями *S* и *s,* либо принять участие в игре, т.е. получить с вероятностью *р* наибольшую денежную сумму *S* и с вероятностью (1 *- р) -* наименьшую сумму *s.* При этом ве­роятность следует изменять (понижать или повышать) до тех пор, пока ЛПР станет безразличным в отношении к выбору между получением гарантированной суммы и игрой. Пусть указанное значение вероятности равно *р0.* Тогда полезность гарантирован­ной суммы определяется как среднее значение (математическое ожидание) полезностей наименьшей и наибольшей сумм, т.е.

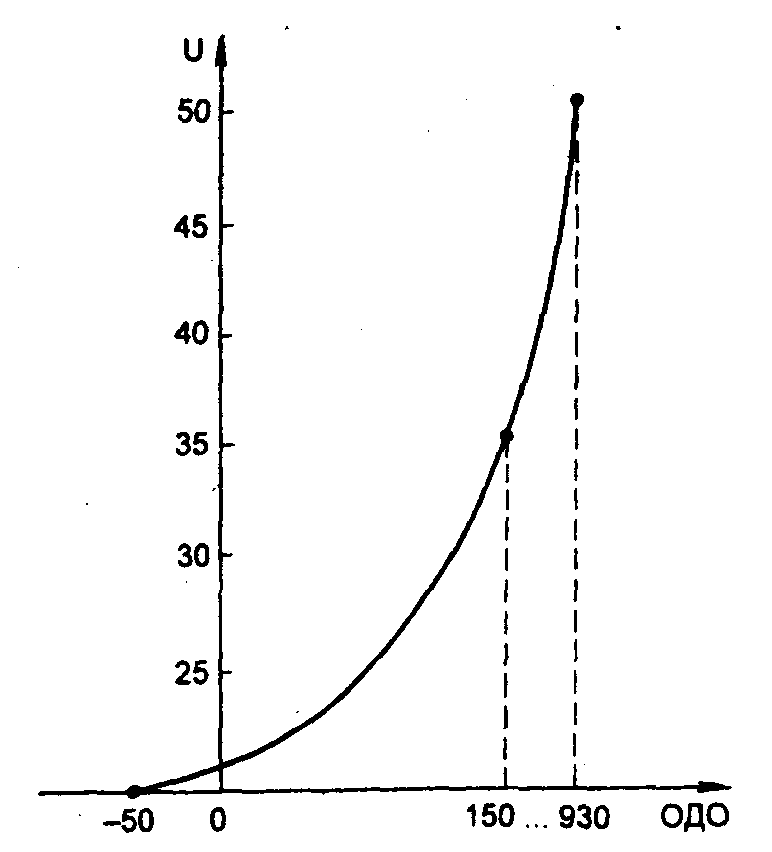
*U*() = *p0 U*(*S*) *+* (1 – *p0*)*U(s).* (4.1)

Рассчитаем полезность результатов любого из возможных исходов для задачи 4.1. Пусть для ЛПР безразлично: потерять 20 000 дол. или принять участие в игре (выигрыш 930 000 дол. с вероятностью 0,1 или проигрыш 50 000 дол. с вероятностью 0,9). Согласно формуле (4.1) имеем:

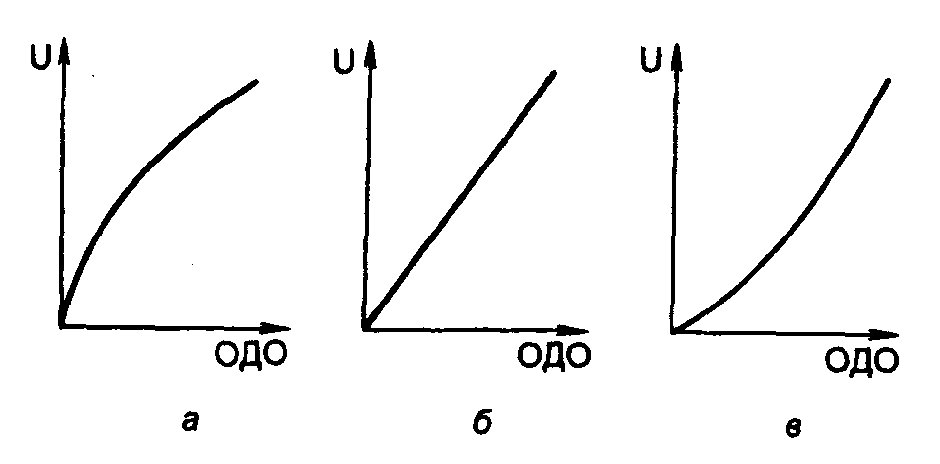
*U*(-20) *=* 0,1 *U*(930) + 0,9 *U*(-50) = 5,

при этом по определению принято, что *U*(-50) = 0, *U*(930) = 50, откуда следует, что *U*(-20) = 5.

Таким образом, если определена шкала измерения, то может быть построена функция полезности ЛПР (рис. 4.2).



*Рис****.*** *4.2. График полезности для задачи 4.*



***Рис. 4.3.*** *Типы функции полезности Неймана — Моргенштерна для ЛПР, не склонного к риску (а), безразличного к риску (б), склонного к риску (в)*

В общем случае график функции полезности может быть трех типов (рис. 4.3):

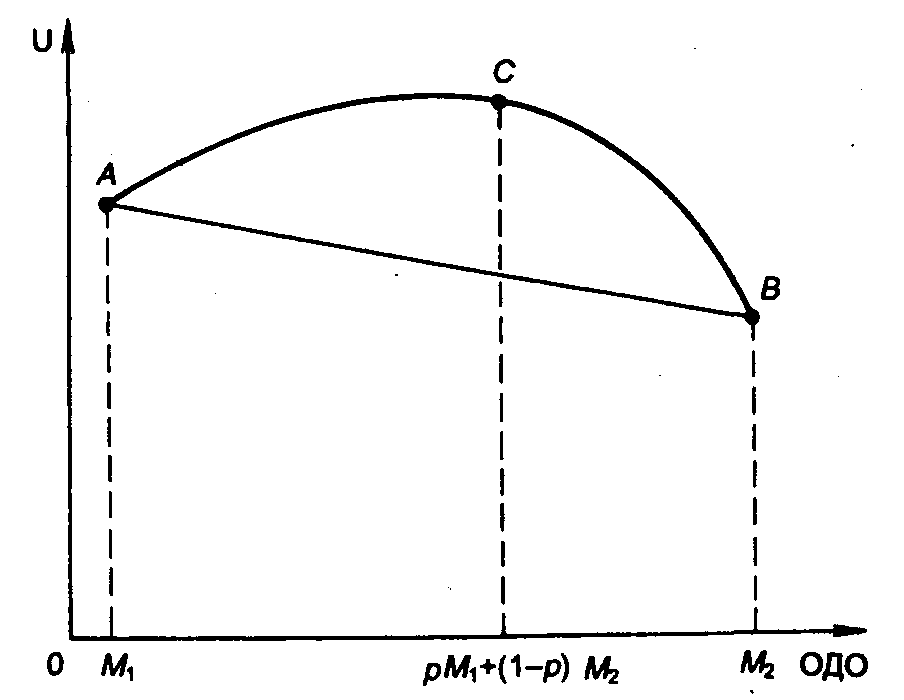
• для ЛПР, *не склонного к риску, —* строго вогнутая функция, у которой каждая дуга кривой лежит выше своей хорды (рис. 4.3 *а);*

• для ЛПР, *безразличного к риску, —* прямая линия (рис. 4.3 *б),*

*•* для ЛПР, *склонного к риску, —* строго выпуклая функция, у которой каждая дуга кривой лежит ниже своей хорды (рис. 4.3 *в*).

4.2. ИЗМЕРЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ К РИСКУ

Исследуем график функции полезности, представленной на рис. 4.4. Для такого типа ЛПР полезность среднего выигрыша (полезность ОДО) больше ожидаемой полезности игры: с веро­ятностью *p* выиграть *М1* и с вероятностью (1 - *р*) выиграть *М2.*



*Рис. 4.4. График функции полезности ЛПР, не склонного к риску*

Формально мы имеем график вогнутой функции, о которой известно, что ордината любой точки кривой больше ординаты точки хорды кривой. Определим соотношение, характеризующее ЛПР, не склонного к риску. Нетрудно видеть, что

*U(M1) -* значение полезности в точке *А;*

*U(M2) -* значение полезности в точке *В;*

*U(pM1* + (1 *- р*)*М2*) *-* значение полезности в точке *С*.

Уравнение хорды *АВ* имеет вид:

*U1* = *а + bМ ,*

где *U1* - совокупность точек, лежащих на отрезке прямой.

Найдем значения параметров *а* и *b* уравнения прямой.

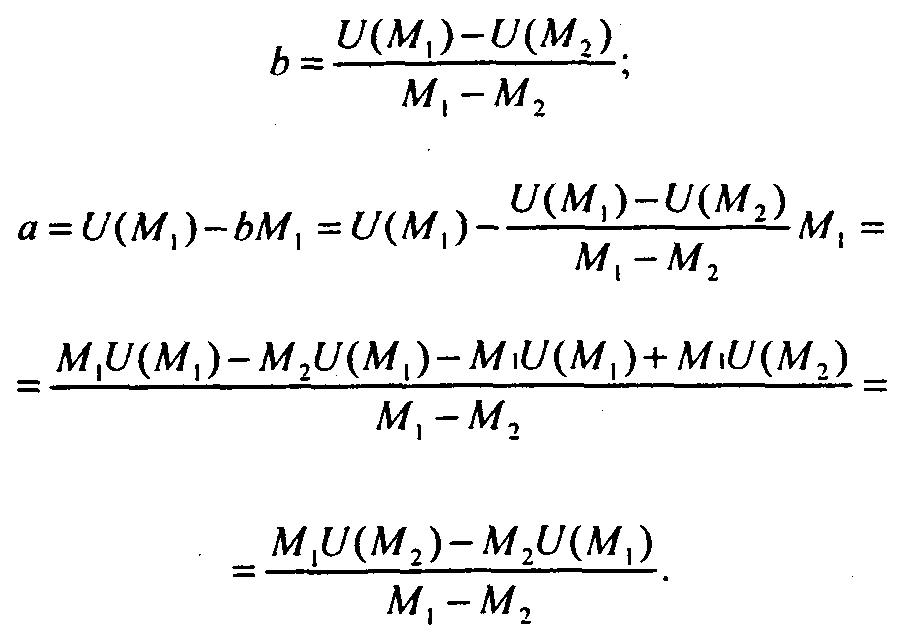
В точке *А* имеем *U(M1) = а + bМ1.*

В точке *В* имеем *U(M2)* = *а + bМ2.*

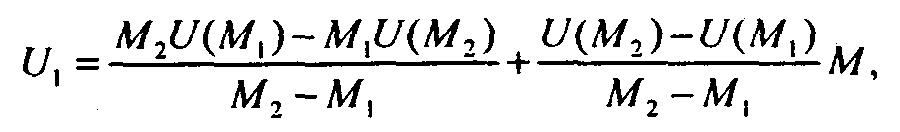
Вычитаем из первого выражения второе, исключая величину *a:*

*U(M1*) – *U(M2*) = *b(M1 – М2) ,*

откуда получаем:

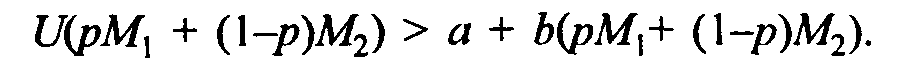


После подстановки значений для параметров *а* и *b* уравнение хорды *АВ* имеет вид:

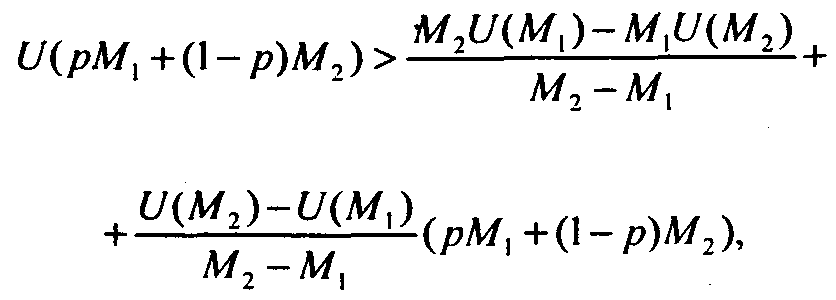


где *М1* ≤ *М ≤ M2.*

Пусть *М = рМ1 +* (1 – *р*)*М2*, где 0 ≤ *р ≤* 1, тогда в точке *С* справедливо неравенство



Подставив в это неравенство вычисленные значения *а* и *b*,получим:



или

*U*(*pM1 +* (1 *- р)М*2) *> PU(M1) +* (1 *- p*)*U(M*2). (4.2)

Неравенство (4.2) характерно для функции полезности ЛПР, не склонных к риску. Оно действительно показывает, что полез­ность среднего выигрыша (полезность ОДО) больше ожидаемой полезности игры: с вероятностью *р* выиграть *М1* и с вероятнос­тью *(1 – р)* выиграть *М2.*

Аналогично можно показать, что для функций полезности ЛПР, склонных к риску, справедливо неравенство

*U(pM1 + (1 – р)М2) < pU(M1) + (1 – p)U(M2).* (4.3)

Для функций полезности ЛПР, безразличных (нейтральных) к риску, имеет место равенство

*U(pM1 + (1 – р)М2) = pU(M1) + (1 – p)U(M2).* (4.4)

Склонность или несклонность ЛПР к риску, как уже отмеча­лось, зависит от его финансового положения, текущей ситуации принятия решения и других факторов. Иначе говоря, эта харак­теристика ЛПР не является абсолютной, присущей ему при любых обстоятельствах.

Приведем пример игры, по отношению к которой любой игрок не склонен к риску.

*Петербургский парадокс* (игра придумана петербургскими гусарами). Играют двое. Один бросает монету до тех пор, пока не выпадет «орел». Выигрыш равен (2)*n* руб., где *п -* число брос­ков до появления «орла». Ожидаемая величина выигрыша:

ОДО = 2(1/2) + (2)2 (1/4) + (2)3(1/8) + ... = 1+1+1+ ... .

Вряд ли какой-либо игрок согласится заплатить за право участвовать в этой игре сумму, равную ОДО: эта сумма беско­нечно велика.

Предположим теперь, что имеет место игра (лотерея) с аль­тернативами *a* и *в*, т.е. *G(a,в:* α). Исследуем проблему, как целе­сообразнее поступить ЛПР: играть или получить гарантирован­ный выигрыш, равный ожидаемому выигрышу. Пусть функция полезности игрока определена как *U(W)* = ln(*W*), где *W-* вели­чина благосостояния. Пусть игра заключается в выигрыше 5 дол. с вероятностью 0,8 и в выигрыше 30 дол. с вероятностью 0,2. Ожидаемая величина выигрыша (ОДО):

*E(W)* = 5\*0,8 + 30\*0,2 = 10 дол.

Для указанной логарифмической функции полезности имеем зависимость, выраженную в табл. 4.1.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *W* | 1 | 5 | 10 | 20 | 30 |
| *U(W)* | 0 | 1,61 | 2,30 | 3,00 | 3,40 |

Рассчитаем полезность ОДО для данной игры:

*U(E(W)) =* *U*(10) = ln(10) = 2,3,

т.е. полезность отказа от игры при получении гарантированного выигрыша, равного 10 дол. (ОДО данной игры), оценивается в 2,3 ютиля (ютиль - условная единица полезности). Если ЛПР предпочтет игру, то

*E(U(W)) =* 0,8*U*(5) + 0,2*U*(30) = 0,8\*1,61 + 0,2\*3,40 = 1,97 ютиля.

Для рассмотренной логарифмической функции полезности большей полезностью обладает вариант с получением гарантированного выигрыша, равного *E*(*W*)=ОДО, а не участие в игре (2,3 > 1,97). Такое лицо, принимающее решение, не склонно к риску.

Выводы. Из соотношении (4.2) – (4.4) вытекает:

• если *U(E(W)) > E(U(W)),*игрок не склонен к риску;

• если *U(E(W)) = E(U(W)),* игрок нейтрален (безразличен) к риску;

• если *U(E(W)) < E(U(W}),* игрок склонен к риску.

Здесь *Е* и *U -* соответственно символы математического ожидания и функции полезности.

4.3. СТРАХОВАНИЕ ОТ РИСКА

Пусть по-прежнему полезность выражается логарифмической зависимостью *U(W)* = ln*(W) (см.* табл. 4.1).

Определим, какую максимальную сумму пожелает заплатить ЛПР, чтобы избежать игры, в которой с вероятностью 0,8 он выигрывает 5 дол. (уменьшение выигрыша на 5 дол. по сравне­нию с ОДО = 10 дол.) и с вероятностью 0,2 выигрывает 30 дол. (увеличение выигрыша на 20 дол. по сравнению с ОДО). Значение ожидаемой полезности игры составляет 1,97 ютиля, что соответствует гарантированному выигрышу 7,17 дол. (ln7,17 = 1,97). С другой стороны, сумма ожидаемого выигрыша в случае игры (ОДО) равна 10 дол. Поэтому, чтобы избежать игры, ЛПР согласится заплатить максимальную сумму, равную

10 – 7,17 = 2,83 дол.

Из этого следует, что, если ЛПР предлагают застраховаться от игры и просят за это сумму, меньшую, чем 2,83 дол., ему выгодно принять предложение. В данном случае величина, рав­ная 2,83 дол., - премия (максимальная плата) за риск.

Рассмотрим некоторые приложения теории полезности.

**Задача 4.2.** Оптимальная величина страхования. Ювелир вла­деет бриллиантом стоимостью 100 000 дол. и желает застраховать его от кражи. Страховка покупается по правилу: цена страховки составляет 20 % от суммы, которую страхуют. Например, если бриллиант страхуется на всю стоимость (100 000 дол.), страховка стоит 20 000 дол., если страхуется на половину цены (50 000 дол.). то страховка обходится в 10 000 дол. Если ювелир будет знать (построит) свою функцию полезности, он сможет рассчитать, на какую оптимальную сумму следует застраховать дорогую вещь.

Ювелир может оказаться в одной из двух ситуации: 1) бриллиант украден; 2) бриллиант не украден. Чем больше сумма страхования, тем больше его состояние (капитал), если бриллиант украден, но тем меньше его состояние, если брил­лиант не украден.

Например, если бриллиант застрахован на 50 000 дол., име­ют место два случая:

1. Бриллиант украден. При этом потери ювелира рассчитыва­ются следующим образом:

-100 000 (бриллиант) - 10 000 (страховка) + 50 000 (компен­сация) = -60 000 дол., а капитал 50 000-10 000 = 40 000 дол.

2. Бриллиант не украден. В этом случае капитал ювелира составит:

100 000 (бриллиант) - 10 000 (страховка) = 90 000 дол.

Если бриллиант застрахован на 100 000 дол., то в случае кражи бриллианта капитал составит 100 000 - 20 000 = 80 000 дол. Если бриллиант не украден, капитал также составит 80 000 дол. Обозначим капитал ювелира в случае, если бриллиант не украден, через *Yn*:

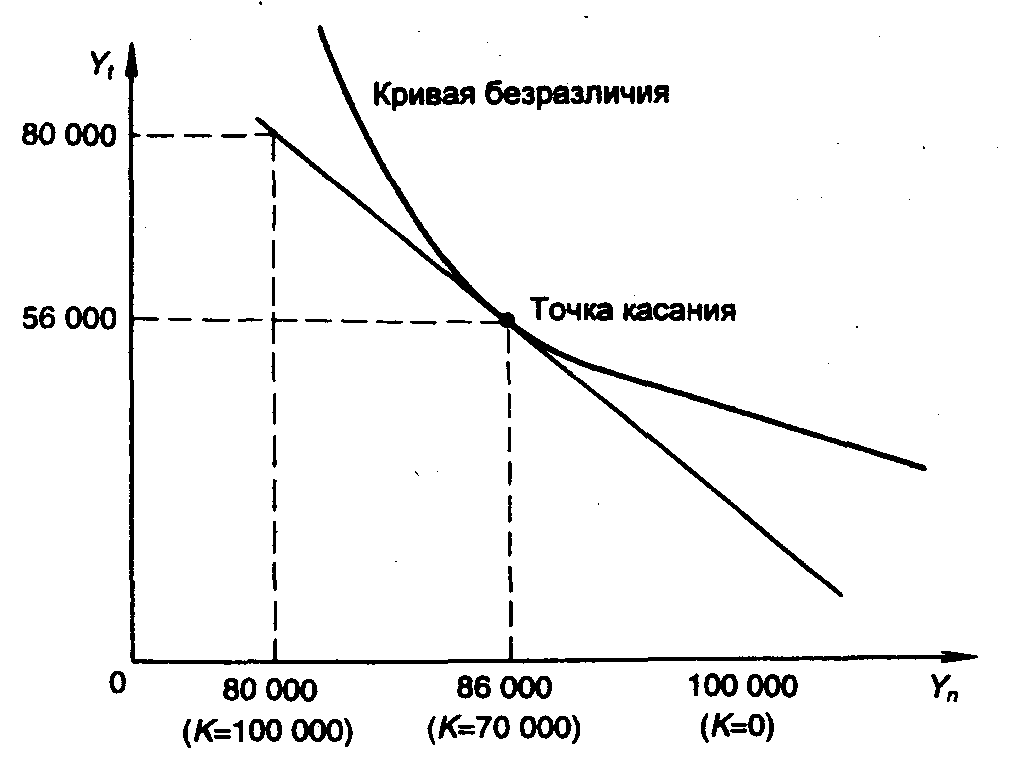
*Yn* = 100 000 - *0,2К,* (4.5)

где *К -* сумма страхования.

Если бриллиант украден, то капитал ювелира определим как *Yt*:

*Yt* = 0,8 *K .*

Соответствующий график, отражающий бюджетное ограни­чение, представлен на рис. 4.5.



*Рис. 4.5. Графическое решение задачи 4.2*

Предположим, что можно экспертно определить вероятность *р* того, что бриллиант будет украден. Тогда полезность капитала *Yt,* равна *U(Yt).* Вероятность того, что бриллиант не украден, со­ставляет (1-*р*), и *U(Yn)* - полезность капитала *Yn* в этом случае.

Ожидаемая полезность *U* «игры» (с вероятностью *р* брилли­ант украден и с вероятностью (1 *- р*) *-* не украден) определяется согласно формуле (4.1) выражением

*U = pU(Yt)+*(1*-p*)*U*(*Yn*).

Значения *Yt* и *Yn* следует выбирать таким образом, чтобы ожидаемая полезность была максимальной, т.е.

*pU(Yt) +* (1-р)(*Yn*) max .

Пусть точка касания кривой безразличия (линия одинаковой полезности) на рис. 4.5 соответствует *Yn* = 86 000 дол., *Yt* = 56 000 дол.

Тогда согласно формуле (4.5) имеем: 86 000 = 100 000 - 0,2*К,* откуда оптимальная величина страхования *К* = 70 000 дол.

**Задача 4.3.** Спрос на страхование. Пусть финансовое состо­яние индивида оценивается заданным значением *W.* Предполага­ется, что можно вычислить вероятность *р* потери некоторой ча­сти этого состояния, определяемой суммой *L ≤ W* (например, в результате пожара). Индивид может купить страховой полис, в соответствии с которым ему возместят нанесенный ущерб в размере *q.* Плата за страхование составляет *πq,* где *π -* доля страхования в объеме нанесенного ущерба. Проблема состоит в определении значения *q.*

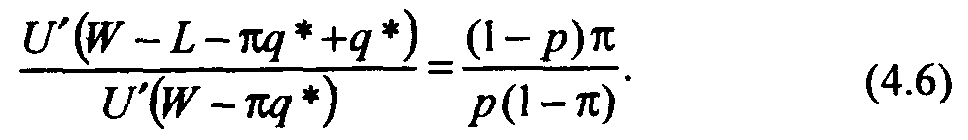
Исследуем задачу максимизации ожидаемой полезности фи­нансового состояния индивида в ситуации, когда с вероятностью *р* страховой случай происходит и с вероятностью *(1 –р) -* не происходит. Тогда задача сводится к поиску максимума по *q* ожидаемой полезности капитала индивида:



Применим необходимое условие оптимальности - продиффе­ренцируем выражение в квадратных скобках по *q* и приравняем производную нулю:



где *q\* -* оптимальное значение *q.* В результате получаем:



Предполагая известным вид функции *U,* из соотношения (4.6) находим значение *q\*.*

Рассчитаем ожидаемую прибыль страховой компании, учи­тывая, что страховой случай имеет вероятностный характер.

Если страховой случай произошел, компания получает доход *πq – q.* Если страховой случай не наступил, компания получает доход *πq.* Поэтому ожидаемая прибыль компании

*р(πq - q)+* (1 - *р) πq* = *pπq - pq + πq - pπq* = *q(π - р),*

где *р -* вероятность наступления страхового случая.

Конкуренция между страховыми компаниями уменьшает прибыль, которая в условиях совершенной конкуренции стремит­ся к нулю, т.е. из условия *q(π - р) = 0* следует, что *π*  *р.*

Это означает, что доля платежа от страхуемой суммы *π* при­ближается к вероятности несчастного случая *р.* Если соотноше­ние *π = р* ввести в условие максимума ожидаемой полезности, то получим:

*.*

Если потребитель не склонен к риску, то , и из равенства первых производных следует равенство аргументов, т.е.

*W – L +* (1 *- π)q\** =*W* – *πq\**,

или

*– L + q\* – πq\* = –πq\*,*

откуда

*q\* = L.*

Вывод. Страховаться целесообразно на сумму, которую мож­но потерять в результате несчастного случая.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

**Задача 4.4.** Допустим, что функция полезности ЛПР логарифми­ческая *U(W)* = ln*(W)* и весь его капитал составляет 5 тыс. руб.

Возникают две ситуации:

1. С вероятностью 0,5 ЛПР может выиграть и проиграть 1 тыс. руб. Есть ли смысл покупать страховой полис, устраняющий риск, за 125 руб.?

2. ЛПР рискнул, отказался от страхового полиса и проиграл 1 тыс. руб. Та же ситуация возникла во второй раз. Следует ли ему застрахо­ваться от риска на прежних условиях (125 руб. за страховой полис). Что целесообразнее: приобрести полис или принять участие в игре?

**Задача 4.5.** Предположим, что ваша функция полезности определя­ется логарифмической зависимостью *U(W)=*ln*(W)* и вы сталкиваетесь с ситуацией, когда можете с равными шансами выиграть и проиграть

1 тыс. руб. Сколько вы готовы заплатить, чтобы избежать риска, если текущий уровень вашего благосостояния равен 10 тыс. руб.? Сколько вы заплатили бы, если бы ваше состояние было 1 млн руб.?

**Задача 4.6.** Мелкий бизнесмен сталкивается с ситуацией, когда с вероятностью 10 % пожар может уничтожить все его имущество, с вероятностью 10 % - уменьшить его недвижимость до 50 тыс. руб., с вероятностью 80 % огонь не принесет ему вреда и стоимость его иму­щества останется равной 100 тыс. руб. Какую максимальную сумму он готов заплатить за страховку, если его функция полезности имеет лога­рифмический вид *U(W)* = ln(*W*), а страховые выплаты составляют 100 тыс. руб. для первого случая и 50 тыс. руб. для второго случая?

**Задача** **4.7.** Пусть функция полезности «нового русского» имеет вид:

*U(W*) = 10 + 2*W,*

где *W -* денежный выигрыш.

Бизнесмен может вложить в строительство магазина 25 тыс. руб. и считает, что с вероятностью 0,5 он получит прибыль в 32 тыс. руб. и с вероятностью 0,5 потеряет весь свой капитал. Определите:

• Следует ли осуществлять инвестирование проекта?

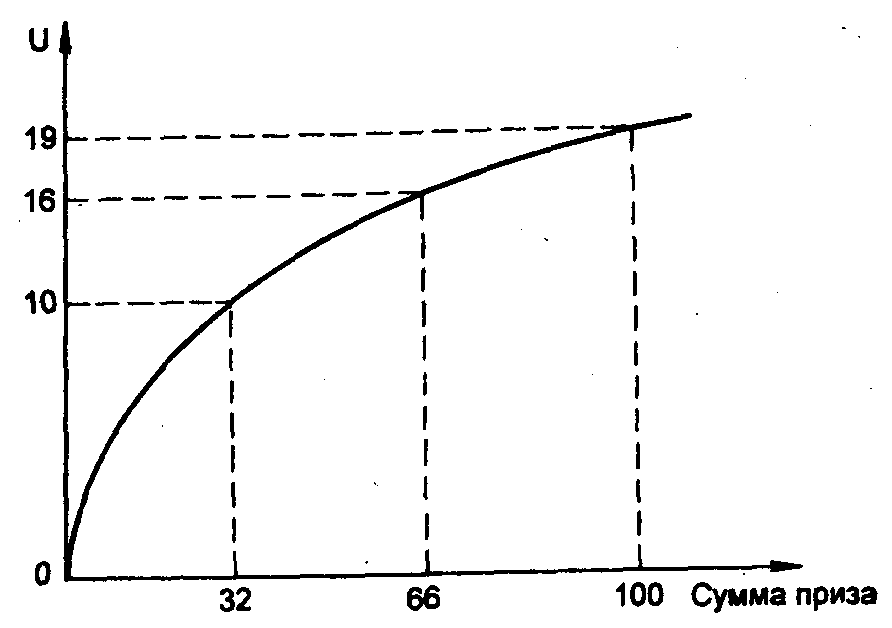
• Если будет сделано инвестирование, то какова ожидаемая полез­ность этого мероприятия?

**Задача 4.8.** В профессиональном теннисе нередко имеет место практика дележа призов за первое и второе места поровну между фи­налистами (тайный сговор до начала состязания). Например, если пер­вый приз равен 100 000 дол., а второй - 32 000 дол., то каждый полу­чает по 66 000 дол. (66 000 = (100 000 + 32000) / 2). Определите:

• Если игрок склонен к риску и уверен, что его выигрыш и проиг­рыш равновероятны (50 %), то согласится ли он участвовать в дележе?

• Предположим, что функция полезности одного из игроков имеет вид, представленный на рис. 4.6. Пожелал бы такой игрок участвовать в дележе призов, если шанс выиграть составляет 50 %?

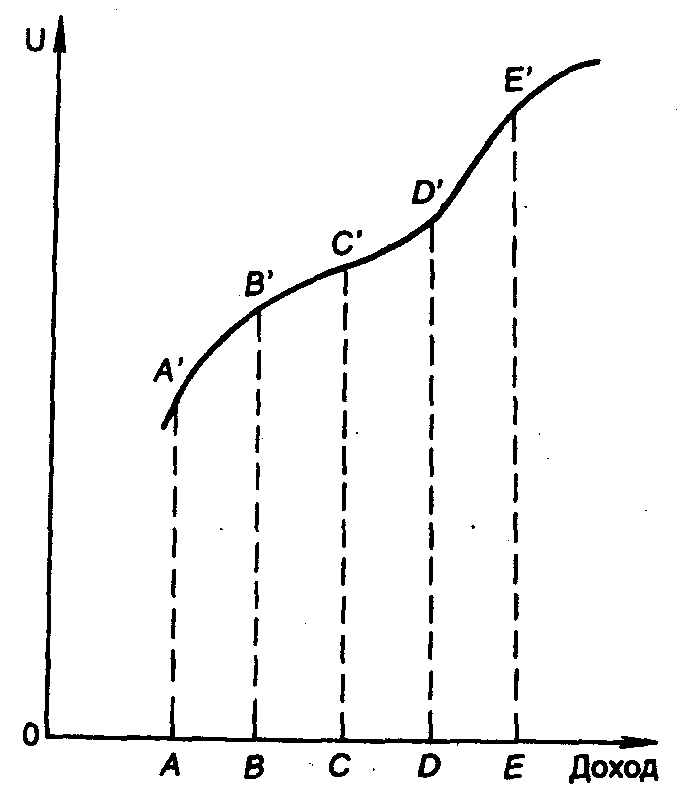
• Как правило, игроки, попавшие в финал, не соглашаются на пред­варительный дележ призов, поскольку они уверены в своей победе. Какова должна быть минимальная вероятность выигрыша, чтобы с представленной на рис. 4.6 функцией полезности рассчитывать на по­лучение приза за первое место?



*Рис. 4.6. Функция полезности одного из игроков в задаче 4.8*

**Задача 4.9.** Предполагается, что типичная функция полезности дохода для человека имеет вид, показанный на рис. 4.7. Определите:

• Предпочтет ли такой человек получить со 100 %-ной определенно­стью доход В или принять участие в игре, в которой с вероятностью 0,5 получает доход А и с вероятностью 0,5 - доход С, где В = А/2 + С/2?



*Рис. 4.7. Типичная функция полезности дохода для человека*

• Предпочтет ли человек с такой функцией полезности получить со 100 %-нои определенностью доход *D* или принять участие в игре, в которой выигрывает сумму *С с* вероятностью 0,5 и сумму *Е* с вероят­ностью 0,5 *(D=C/2 +* *E*/2)?

**Задача 4.10.** Управляющий банком во время своего отпуска желает совершить кругосветное путешествие, которое стоит 10 000 дол. По­лезность путешествия можно оценить количеством денег, потраченных на отдых *(W).*

Пусть его функция полезности выражается зависимостью *U(W)* = ln(W). Определите:

• Если существует вероятность, равная 0,25, потерять во время путешествия 1 000 дол., то какова ожидаемая полезность кругосветного путешествия?

• Отдыхающий банкир может приобрести страховку от потери 1 000 дол. за 250 дол., купив, например, дорожные чеки. Покажите, что ожидаемая полезность в случае, когда он покупает страховку, выше по сравнению с ситуацией, когда потеря 1 000 дол. происходит без стра­хования.

• Какова максимальная денежная сумма, которую банкир готов зап­латить за страховку от потери 1 000 дол.?

Глава 5 ФИНАНСОВЫЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА

5.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ФИНАНСОВ

Опишем модели оптимального многоэтапного планирования ин­вестиции в различные проекты. Индекс риска, связанного с реали­зацией каждого из проектов, оценивается экспортно по десятибал­льной шкале. Каждому допустимому проекту отвечает свой задан­ный индекс риска. Общий подход к построению моделей в форме линейного программирования демонстрируется на задачах 5.1 и 5.2.

**Задача 5.1.** Акционерное общество (АО) закрытого типа зак­лючило контракт на покупку нового оборудования для производ­ства железобетонных блоков стоимостью 750 000 дол. В соот­ветствии с условиями контракта 150 000 дол. в качестве аванса необходимо уплатить через 2 месяца, а остальную сумму - через 6 месяцев, когда оборудование будет установлено. Чтобы рас­платиться полностью и в указанные сроки, руководство АО пла­нирует создать целевой фонд, предназначенный для инвестиций. Поскольку инвестиционная деятельность принесет дополнитель­ную наличность к моменту расчета за приобретенное оборудова­ние, отложить следует не всю сумму в 750 000 дол., а меньшую. Сколько именно, зависит от имеющихся возможностей и правиль­ности организации процесса инвестирования. Акционерное об­щество решило сосредоточиться на 4 направлениях (12 возмож­ностях) использования средств целевого фонда. Данные для за­дачи финансового планирования приведены в табл. 5.1.

Руководство АО ставит перед собой три основные цели:

1) при данных возможностях инвестирования и утвержден­ного графика выплат должна быть разработана стратегия, мини­мизирующая наличную сумму денег, которые АО направляет на оплату оборудования по контракту;

Таблица 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Направления использования инвестиций | Возможные начала реализа­ции инвестици­онных проектов, мес. | Длительность инвестицион­ного проекта, мес. | Процент за кредит | Индекс риска |
| *А* | 1,2,3,4,5,6 | 1 | 1,5 | 1 |
| *В* | 1,3,5 | 2 | 3,5 | 4 |
| *С* | 1,4 | 3 | 6,0 | 9 |
| *D* | 1 | 6 | 11 | 7 |

2) при разработке оптимальной стратегии средний индекс риска инвестиционных фондов в течение каждого месяца не должен превышать 6. Этот показатель индекса риска, как пред­полагается, отвечает возможностям менеджера фирмы по управ­лению проектами;

3) в начале каждого месяца (после того, как сделаны новые инвестиции) средняя продолжительность погашения инвестици­онных фондов не должна превышать 2,5 месяца. Причины те же, что и в п. 2.

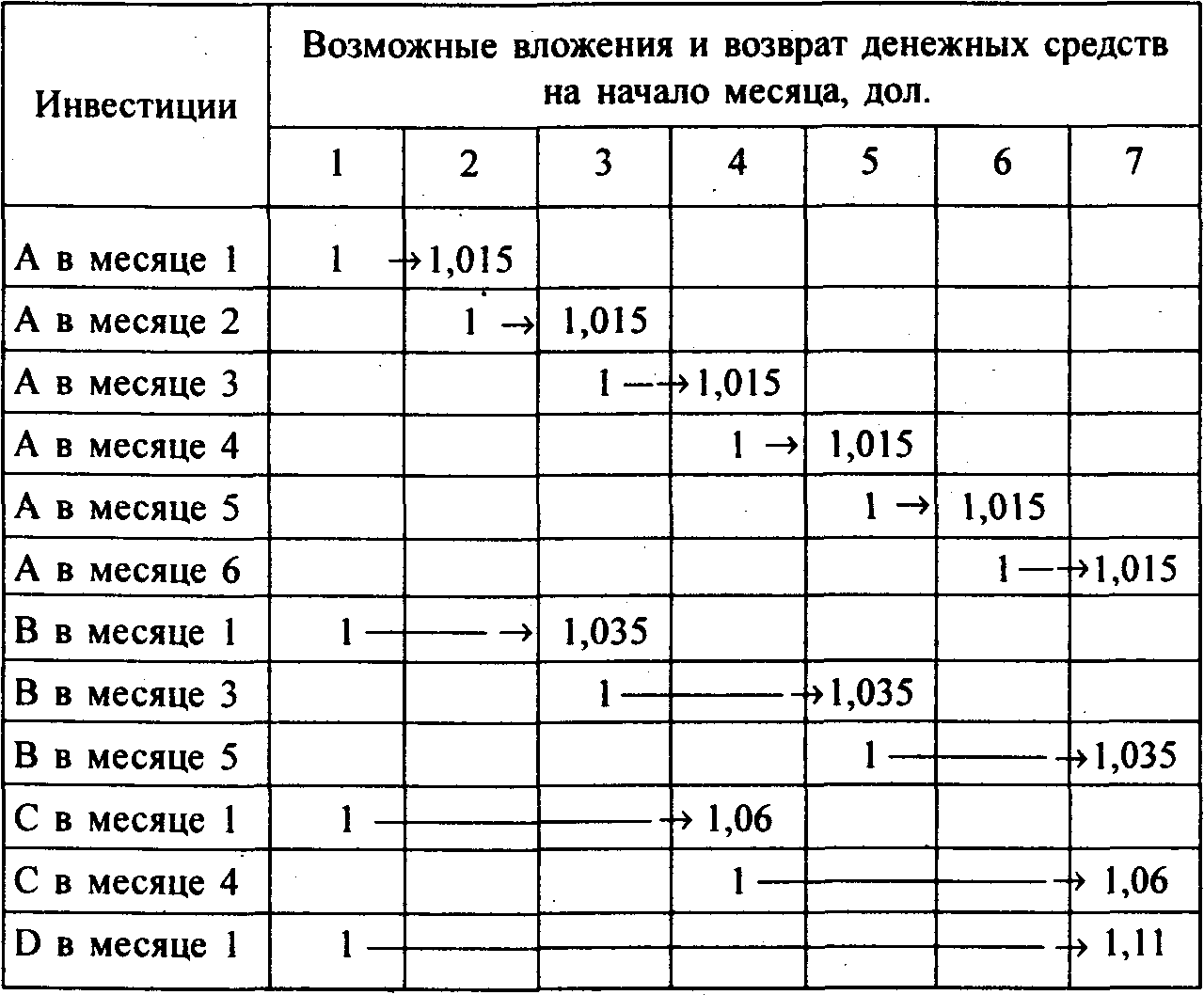
Таким образом, среди потенциально реализуемых проектов выбираются наиболее экономически эффективные, при этом проекты повышенной рисковости должны компенсироваться менее рисковыми, а очень длинные проекты должны выполнять­ся одновременно с более краткосрочными. Для решения данной задачи необходимо, во-первых, подготовить и систематизировать имеющуюся исходную информацию и, во-вторых, построить адекватную сформулированным целям экономико-математичес­кую модель. Динамика возможных вложений и условий возврата денежных средств отражена в табл. 5.2.

Обозначения в модели:

*Аi -* объем инвестиций в направление (проект) *А* в начале месяца *i* *(i* = 1,2,...,6);

*Вi -* объем инвестиций в направление (проект) *В* в начале месяца *i* *(i* = 1,3,5);

Таблица 5.2



*Сi -* объем инвестиции в направление (проект) *С* в начале месяца *i (i* = 1,4);

*Di* - объем инвестиций в направление (проект) *D* в начале месяца *i* (*i* = 1);

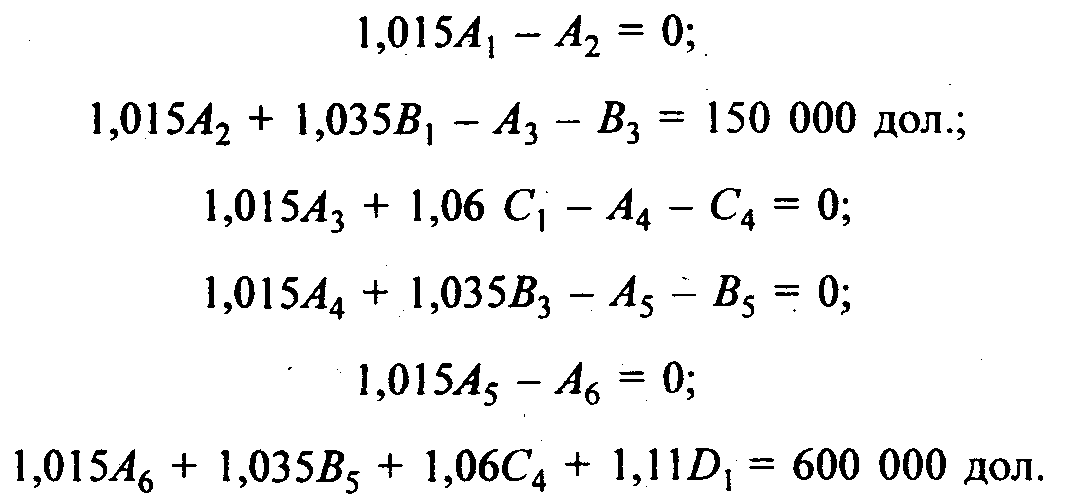
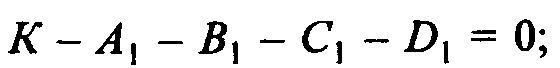
*К -* объем инвестиций в начале первого месяца.

Цели, на достижение которых направлена инвестиционная деятельность АО, а также необходимые ограничения формализу­ются следующими соотношениями:

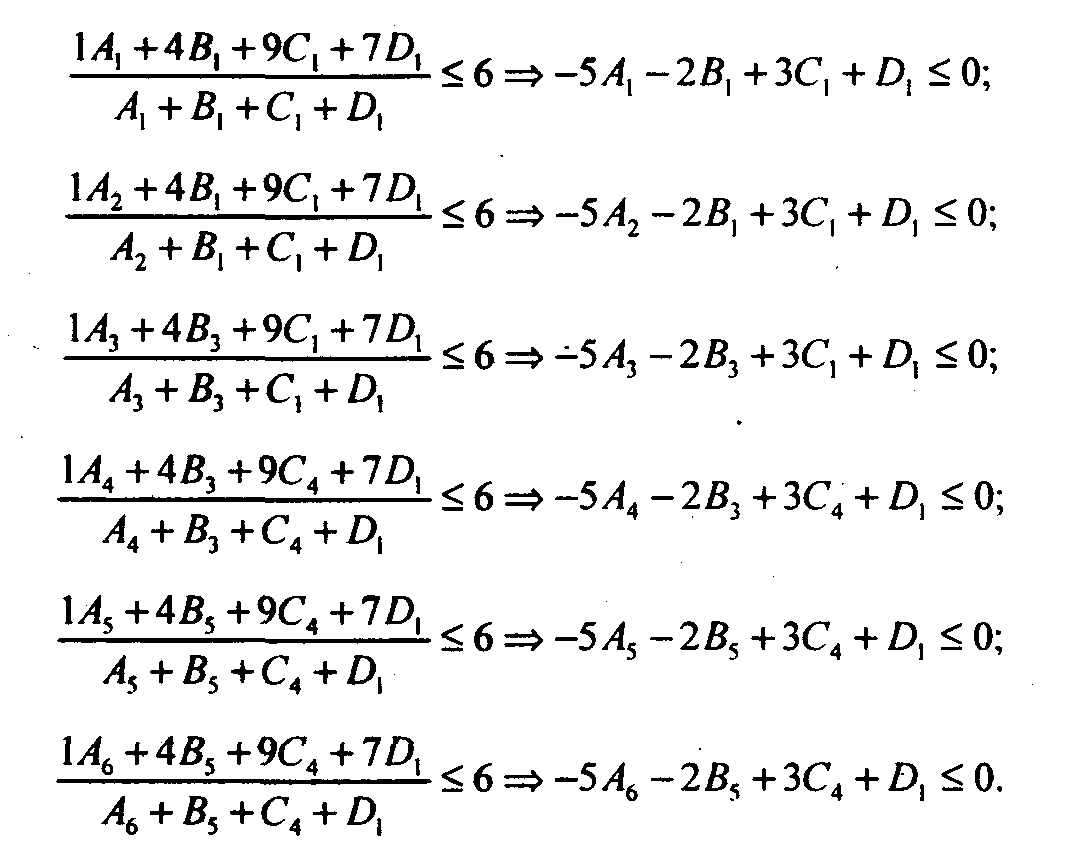
1. Начальная сумма инвестиций *К* должна быть минималь­ной:

*К* → min.

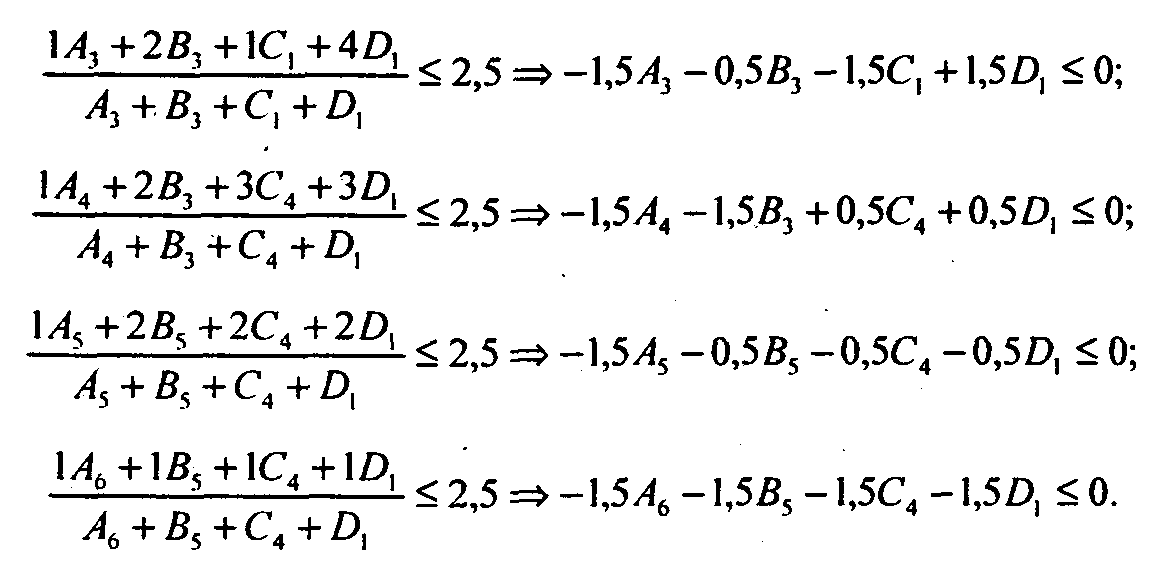
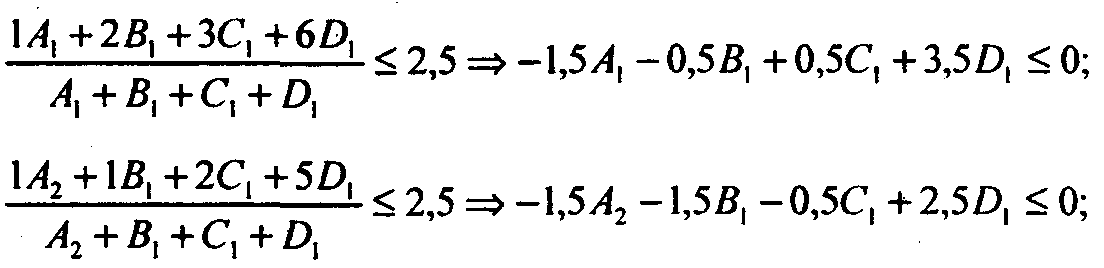
2. Согласно табл. 5.2 балансовые ограничения на структуру инвестиций для каждого месяца имеют вид:



3. Ограничения на средневзвешенные риски проектов (для каждого месяца)\*:

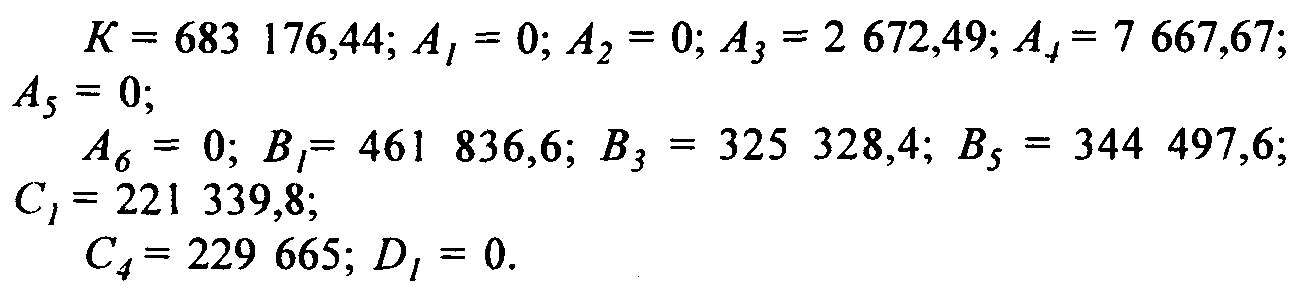


4. Ограничения на средний срок погашения инвестиционно­го фонда (для каждого месяца):



\* Запись *А  В* означает, что из истинности условия *А* вытекает условие *В.*

Таким образом, задача описывается моделью линейного про­граммирования, имеющей 19 ограничений в форме равенств и неравенств и 13 переменных.\* Оптимальное решение, найден­ное с помощью специальной компьютерной программы на ПК IBM PC/AT, имеет вид:



\* Последние два ограничения в блоке 4 в силу неотрицательности искомых переменных выполняются всегда, и их можно не учитывать.

Благодаря полученному оптимальному решению удалось обеспечить уплату в срок обусловленных контрактом 150 000 дол. и вместо необходимых для конечных расчетов 600 000 дол. (750 000 - 150 000 *=* 600 000 дол.) заработать *К* = 683 176,44 дол., часть из которых способствовала уменьшению долговых обя­зательств по контракту (на 13,86 %).

Оптимальное решение показывает, каким неочевидным зара­нее, но эффективным способом распределяются инвестиционные ресурсы по месяцам реализации проекта.

Это демонстрирует возможности линейного программирова­ния, обусловливая эффективность того, что на первый взгляд таковым не казалось.

**Задача** **5.2.** В табл. 5.3 отражены пять проектов, которые конкурируют между собой за получение инвестиционных фон­дов компании. Мы видим, какие наличные деньги будут получе­ны на вложение одного доллара.

Таблица 5.3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Эффективность инвестиционного проекта на один вкладываемый доллар | | | | |
| *А* | *В* | С | *D* | *E* |
| Первый | -1,00 | 0 | -1,00 | -1,00 | 0 |
| Второй | +0,30 | -1,00 | +1,00 | 0 | 0 |
| Третий | +1,00 | +0,30 | 0 | 0 | -1,00 |
| Четвертый | 0 | +1,00 | 0 | +1,75 | +1,40 |

Например, проект *А -* это инвестиции, которые можно сде­лать в начале первого года на два следующих года, причем в конце этого же года можно возвратить 30 центов на вложенный доллар, а в конце следующего года можно дополнительно полу­чить еще 1 дол. Максимальная сумма, которая может быть вло­жена в этот проект, составляет 500 000 дол. Проект *В* полностью аналогичен проекту *А,* но вложение денег можно сделать только в начале следующего года и т.д. Деньги, полученные в результа­те инвестиций, можно реинвестировать в соответствии с предло­женной схемой. В дополнение к этому компания может получать по 6 % годовых за краткосрочный вклад всех денег, которые не были вложены в инвестиции в данном году.

У компании имеется 1 000 000 дол. для инвестиций. Она хочет максимизировать сумму денег, накопленных к конечному перио­ду. Сформулируем задачу линейного программирования и полу­чим решение на ЭВМ.

Решение. Построим экономико-математическую модель и приведем полученное на ЭВМ оптимальное решение.

Обозначения:

*a1, b1, c1, d1*, *е1 -* инвестиции в проекты *А, В, С, D, Е* соот­ветственно; индексы 1,2,3 указывают первый, второй и третий годы вложения инвестиций;

*s1, s2, s3 -* суммы, которые можно положить под краткосроч­ные 6 % соответственно в первом, втором, третьем годах.

Экономико-математическая модель:

а) в проект *А* в первый год не может быть вложено более 500 000 дол.:

*а1* ≤ 500 000;

б) поскольку у компании имеется 1 000 000 дол., то во все проекты эта сумма должна быть вложена в первом году (иначе к конечному периоду компания не максимизирует своих накоп­лений):

*a1, + с1 + d1+ s1* = 1 000 000;

в) аналогичный баланс на второй год:

0,30*a1* + 1,1*с1* + 1,06*s1* = *b1* + *s2*;

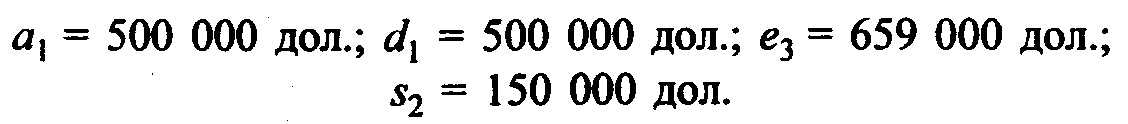
г) аналогичный баланс на третий год:

*а1 +* 0,3*b*2 + 1,06*s2* = *e3* + *s3*;

д) максимальный доход к конечному периоду:

*b2 +* 1,75*d1* + 1,4*e3* + 1,06*s3* → max.

Полученное оптимальное решение:



Максимальный доход к конечному периоду равен 1 797 600 дол., что указывает на высокую эффективность инвестиционного про­цесса (прирост на 79,76 %). Остальные не приведенные значения указанных переменных модели равны нулю.

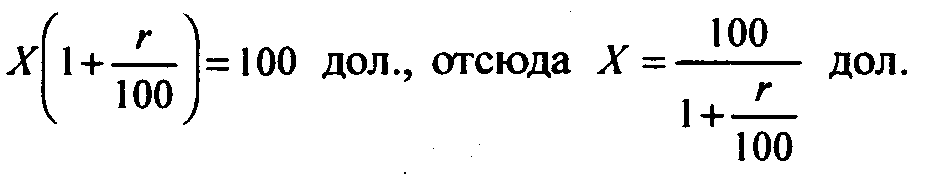
5.2. ОЦЕНКА ТЕКУЩЕЙ СТОИМОСТИ ФИРМЫ

Будем рассматривать экономическое поведение неограничен­но долго работающей акционерной фирмы в условиях неопреде­ленности.

Покажем, что для такой фирмы, функционирующей во вре­мени, существует простое правило, которому она должна следо­вать, чтобы максимизировать свою прибыль: *максимизировать текугцую стоимость фирмы* (включая и стоимость потенциаль­ной возможности выполнения ею проектов).

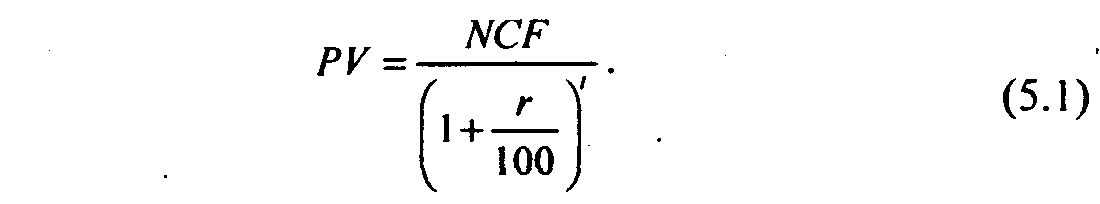
5.2.1. ЧИСТАЯ ПРИВЕДЕННАЯ СТОИМОСТЬ (БЕЗРИСКОВАЯ СИТУАЦИЯ)

Дается ответ на вопрос: сколько вы сегодня заплатите за проект, который через год даст 100 дол. дохода? Плата составля­ет *X* дол., *r -* заданный процент прибыли (*r %* годовых - коэф­фициент дисконтирования):



Рассмотрим безрисковую ситуацию, которая обеспечивает­ся государственными ценными бумагами (облигациями, серти­фикатами и т.д.).

Общее правило: если через *t* лет мы получим чистые налич­ные в стоимостном выражении *NCF,* то приведенная к начально­му моменту стоимость проекта *PV* равна:



Величину *PV* можно интерпретировать как сумму ожидае­мого дохода минус процент на капитал в качестве компенсации за ожидание.

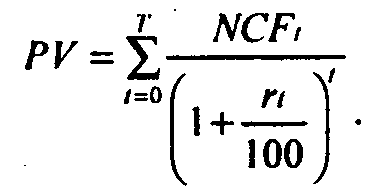
Исходя из формулы (5.1) выявим некоторые практически важные закономерности.

1. Существует обратная зависимость между величиной *PV* и продолжительностью периода времени, через которую сумма *NCF* будет получена: *PV* для периода *t* будет больше, чем для периода *t* + *i*. Другими словами, сегодняшние деньги дороже завтрашних *даже при отсутствии инфляции.* А инфляция этот процесс только усиливает.

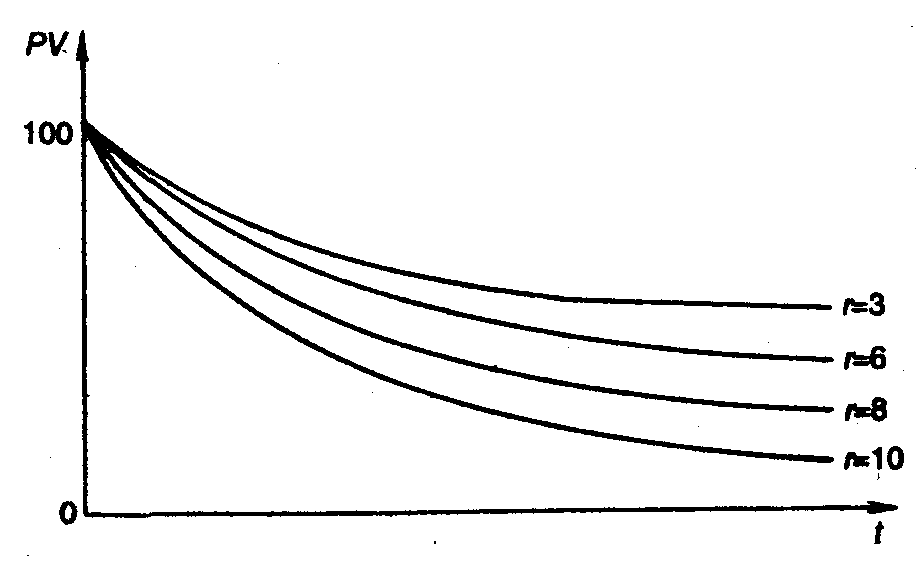
2. Существует обратная зависимость между величиной *РV* при определенном размере *NCF* и коэффициент дисконтировая *r*: чем больше *r*, тем значение *PV* меньше при *NCF* = const, т.е. чем больше *r*, тем более сегодняшние деньги дороже завтрашних.

3. Существует прямая зависимость между *PV* и *NCF* при фиксированных значениях *r* и периоде выплаты *t*.

Пусть в течение периода *t* мы получаем: через год – *NCF1 ,* через 2 года – *NCF2 ,...,* через *t* лет – *NCFt* и пусть *rt* – ежегод­ный процент на капитал, который мы получаем через *t* лет (предполагается, что процент на капитал может ежегодно менять­ся, как это и наблюдается на практике). Тогда приведенная к на­чальному моменту стоимость *PV* равна:



Суть формулы (5.1) при различных значениях *г* графически отражена на рис.5.1.



*Рис. 5.1. Темпы спада pV в зависимости от времени и коэффициента дисконтирования*

**Пример 5.1.** Пусть в конце 1986 г. руководству одной из фирм США предложили участвовать в строительстве и эксплуатации нового офиса в течение 6 лет. Строительство должно начаться 1 января 1987 г. и закончиться 31 декабря 1987 г. Доходы от сдачи здания в аренду и расходы известны с определенностью и пред­ставлены в табл. 5.4 (цифры условные).

Таблица 5.4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Арендные платежи (доход), тыс. дол. | Затраты, тыс. дол. | Чистая прибыль *NCF,* тыс. дол. |
| 1988 | 325 | 200 | 125 |
| 1989 | 425 | 250 | 175 |
| 1990 | 525 | 300 | 225 |
| 1991 | 525 | 300 | 225 |
| 1992 | 525 | 325 | 200 |

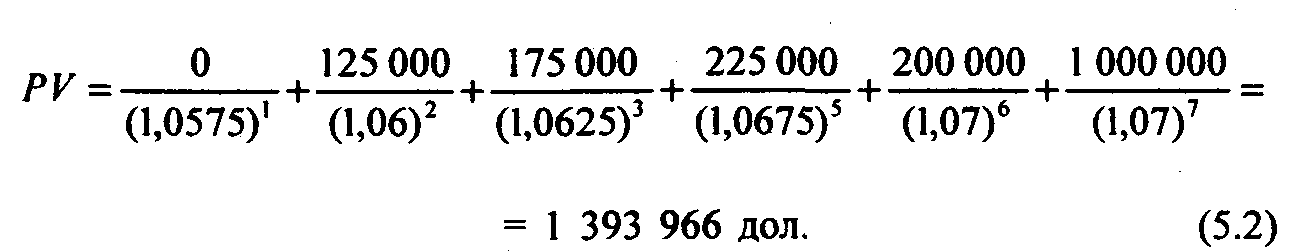
Предполагается для простоты, что платежи и поступления имеют место в конце каждого гада. В конце 1992 г. стоимость здания составляла бы 1 млн дол. Какова приведенная стоимость ( к началу 1987 г.) проекта в конце 1992 г. - начале 1993 г., если процентные ставки государственных облигации, соответствую­щие одному, двум, ... , шести годам, будут такими, как показано в табл. 5.5?

Таблица 5.5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год выплаты | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
| Процентная ставка (г %) | 5,75 | 6,00 | 6,25 | 6,50 | 6,75 | 7,00 |

В 1987 г. здание еще строилось и прибыли не давало. Поэто­му *NCF1* = 0.

С учетом данных табл. 5.4 и 5.5 приведенная к начальному моменту (1987 г.) стоимость проекта *PV* (строительство здания и сдача его в аренду) равна:



**Пример** **5.2.** Рассчитаем чистую приведенную стоимость проекта *NPV.* Она равна разности между приведенной стоимос­тью всех начальных поступлений от проекта и текущей платой за проект:

*NPV = PV -* плата за проект. **(5.3)**

Пусть согласно условиям примера 5.1 фирме предложили 33%-ное участие в шестилетнем соглашении за 450 тыс. дол. Тогда для фирмы

*NPV* = 0,33\*1 393 966 - 450 000 = 10 009 дол. **(5.4)**

Таким образом, с помощью формул (5.1) - (5.4) отражена экономика одного проекта фирмы. Потенциальные возможности фирмы можно охарактеризовать, по существу, портфелем ее проектов.

Ценность фирмы - это ее чистая приведенная стоимость плюс чистая приведенная стоимость портфеля проектов, т.е. сумма чистых приведенных стоимостей проектов портфеля.

*Каким должно быть деловое поведение фирмы, желающей максимизировать свою приведенную стоимость?*

Пусть фирма представляется совокупностью *п* проектов. Станет ли она богаче, приобретя еще один, (*n*+1)-й, проект? Очевидно, что чистая приведенная стоимость фирмы увеличива­ется, если предельная выгода (приведенная стоимость дополни­тельного проекта) будет больше предельных затрат (того, что мы заплатили за дополнительный проект), т.е. фирма станет богаче, *если чистая приведенная стоимость дополнительного проекта положительна.*

Фирма может выиграть от сокращения, продав проекты (ка­питал), которые имеют отрицательную чистую приведенную стоимость. То, что невыгодно данной фирме, может быть выгод­но другой, поэтому такие проекты могут купить.

Итак, чтобы максимизировать ценность (стоимость) фирмы в условиях определенности, нужно приобретать капитал (осуще­ствлять проекты) с положительными *NPV* и избавляться от капи­тала с отрицательным *NPV.*

Согласно формуле (5.4) предложенный проект имел чистую приведенную стоимость *NPV=*10009дол.>0, однако если бы при той же (33 %) доле участия цена за это участие составляла 470 000 дол. (вместо 450 000), то *NPV* = –9 991 дол. < 0, т.е. такой проект следовало бы отвергнуть.

Таким образом, в условиях определенности относительно малые цифры в разнице (450 000 и 470 000 дол.) затрат за уча­стие в проекте могут решить судьбу проекта с точностью до наоборот.

5.2.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЛЯ РИСКОВАННОГО ПРОЕКТА

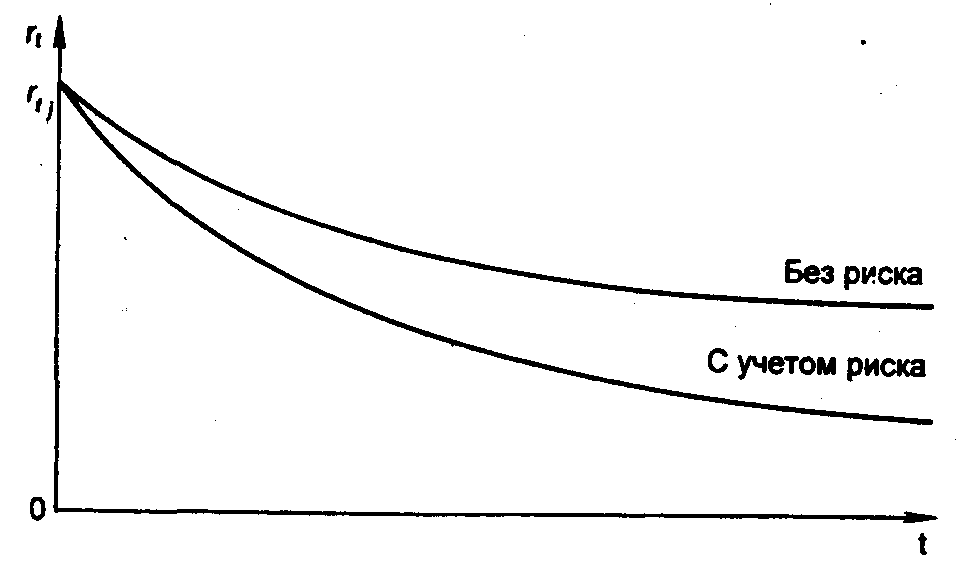
Коэффициенты *rt -* процент на капитал, - как уже упомина­лось, иначе еще называют коэффициентами дисконтирования.

Коэффициенты дисконтирования от реализации рискованно­го проекта должны быть выше соответствующих безрисковых (гарантированных) коэффициентов, чтобы компенсировать фир­ме риск:

*rij* *=rt +* премия за риск для *j*-го проекта,

где *rt -* гарантированный коэффициент дисконтирования в году *t* (рис. 5.2).

В практике экономики США премия за риск задается в виде экспертных оценок (табл. 5.6).



*Рис. 5.2. Гарантированный коэффициент дисконтирования в году t и с учетом риска*

Таблица 5.6

|  |  |
| --- | --- |
| Характер проекта | Премия за риск, % |
| Низкорискованный | 3 |
| Среднерискованный | 6 |
| Высокорискованный | 9 |

Чем выше степень рисковости проекта (премия за риск), тем больше значения знаменателей в формуле (5.2) и соответственно меньше значение приведенной стоимости проекта и тем менее охотно инвесторы склонны вкладывать капиталы в такие проек­ты. Эта ситуация характерна сейчас для России и других стран СНГ.

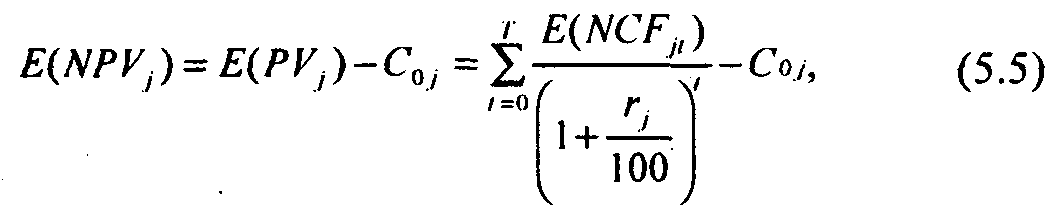
Отсюда вывод: если фирма хочет постоянно повышать свою стоимость, равную стоимости ведущихся ею проектов, она дол­жна привлекать к себе доверие потенциальных инвесторов, умень­шая премию за риск и повышая тем самым стоимость приведен­ных к начальному моменту проектов. Привлечение доверия вклю­чает своевременную выплату дивидендов, другие акты взаимно­го доверия. Таким образом, постоянно действующей на рынке капитала фирме выгодно быть честной, это повышает ее прибы­ли за длительный период. Ведение инвестиционных проектов очень затрудняется в экономике вообще, если теряется доверие инвесторов.

5.3. ОЦЕНКА ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОЕКТА

Ранее мы смотрели на проблему максимизации прибыли с точки зрения динамики и неопределенности. Относительно ди­намики установлено, что «сегодняшние деньги дороже завтраш­них». В части фактора неопределенности доказано, что коэффи­циент дисконтирования должен увеличиваться за счет «премии за риск» и по этой причине снижается приведенная к начально­му моменту стоимость проекта.

Теперь рассмотрим, какие проекты фирме следует предпри­нимать.

Согласно формуле (5.3) чистая приведенная стоимость про­екта равна приведенной к начальному моменту стоимости про­екта минус приведенные затраты на его осуществление. Запи­шем формулу (5.3) по-другому:



где *Е —* математическое ожидание.

Если *E(NPV) >* 0, *j*-й проект следует принять.

Если *E(NPV) <* 0, *j*-й проект следует отклонить.

Процедура реализации этого правила следующая:

1. Спрогнозировать спрос и получить ожидаемую выручку (поступления) от *j*-го проекта *E(Rjt)* в период *t*.

2. Спрогнозировать затраты (оценить их) и получить *Е(Сjt).*

3. Рассчитать *E(NCFjt)* = *E(Rjt) – Е(Сjt).*

4. С использованием табл. 5.5 и 5.6 определить *rjt*.

5. Получить ожидаемую приведенную стоимость *j*-го проек­та *E(PVj).*

6. Вычесть текущую цену *j*-го проекта (приведенные издер­жки на проект) и согласно формуле (5.3) получить *E(NPVj).*

Проиллюстрируем реализацию этих правил на следующем практическом примере.

Рассматривается вопрос о приобретении фирмой нового обо­рудования за 5,3 млн дол. (далее все цифры условные, но при­ближенные к реальным для фирм США) [11]. Оборудование того же типа, что и остальное на фирме. Предполагается использо­вать это оборудование в течение пяти лет, а затем продать. Сле­дует осуществлять этот проект или отклонить его?

Менеджеры фирмы подготовили следующую информацию.

Затраты фирмы - средние *(А -* average) и общие *(Т-* total) на единицу продукции описываются соответственно формулами:

*AVC =* 20 *–* 3*Q* + 0,25 Q2;

*TVC = AVC\*Q,*

где *Q -* выпуск продукции в млн единиц в год.

Прогноз цены (оптимистической, наиболее вероятной и пес­симистической) на продукцию фирмы по годам реализации про­екта с учетом вероятностей ее возникновения отражен в табл. 5.7.

Таблица 5.7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Цена на продукцию фирмы, дол. | | |
| Оптимистичес­кая (0,3)\* | Наиболее вероятная (0,5) | Пессимистичес­кая (0,2) |
| Первый | 20 | 15 | 7 |
| Второй | 20 | 15 | 10 |
| Третий | 24 | 20 | 10 |
| Четвертый | 24 | 20 | 15 |
| Пятый | 24 | 20 | 15 |

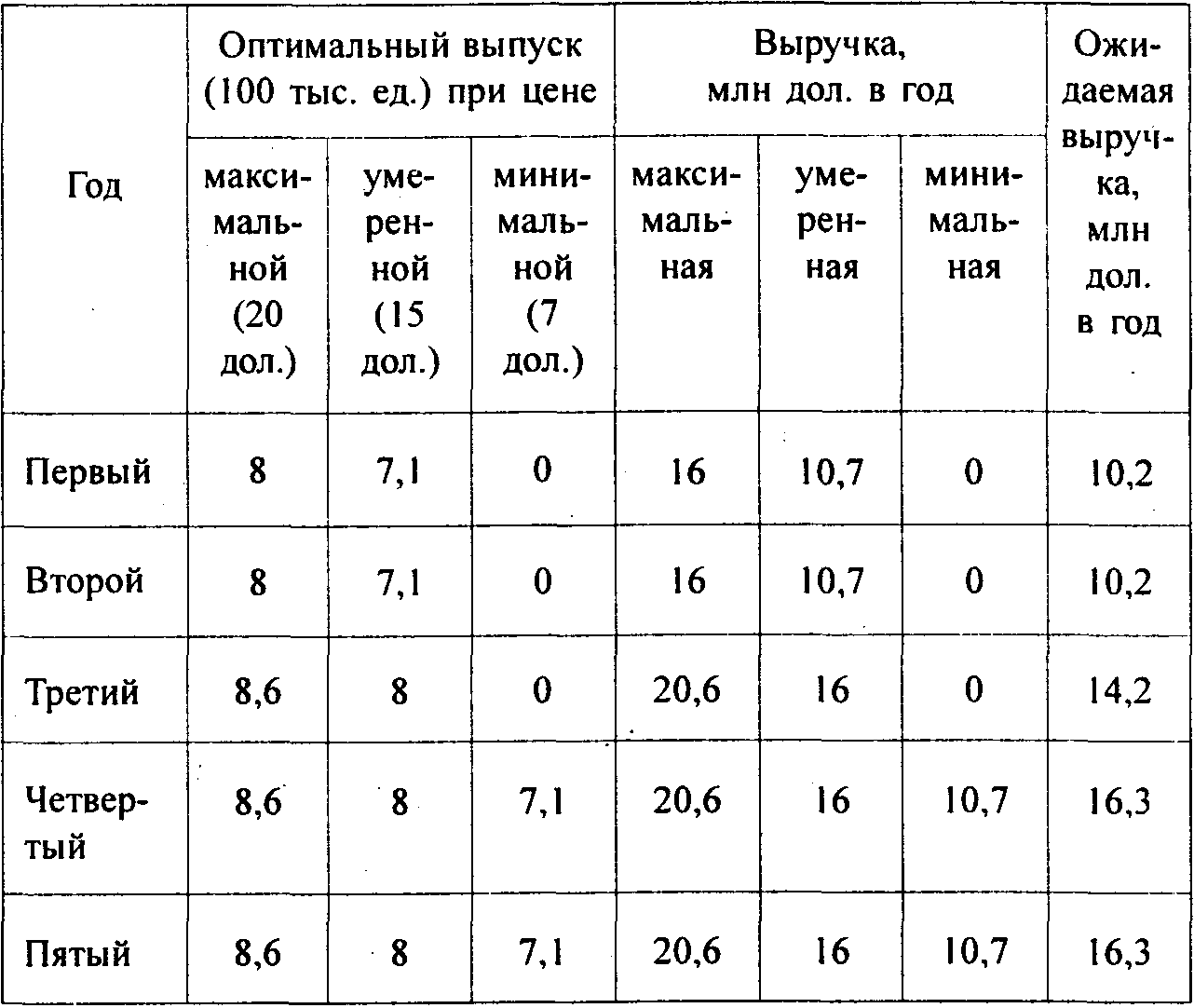
\* В скобках указаны вероятности соответствующих цен.

Оптимальный выпуск продукции и ожидаемая выручка по годам реализации проекта представлены в табл.5.8. Ожидаемая выручка рассчитывается как математическое ожидание с учетом вероятностей исходов согласно табл. 5.7. Например (первая циф­ра сверху в последней колонке табл. 5.8):

10,2 = 16 \* 0,3 + 10,7 \* 0,5 + 0 \* 0,2.

Зная объем выпуска, можно определить полные переменные затраты и, прибавив ежегодные фиксированные затраты, опреде­лить полные ежегодные затраты. Пусть в нашем случае ежегод­ные фиксированные затраты составляют 3,5 млн дол.

Таблица 5.8



В табл. 5.9 приведены полные затраты при различных ценах и различных вероятностях исходов.

Таблица 5.9

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Полные затраты, млн дол. в год при цене | | | Ожидаемые полные затраты, млн дол. в год |
| высокой (0,3)\* | умеренной (0,5) | низкой (0,2) |
| Первый | 13.1 | 11,5 | 3,5 | 10,4 |
| Второй | 13,1 | 11,5 | 3,5 | 10,4 |
| Третий | 14,4 | 13,1, | 3,5 | 11,6 |
| Четвертый | 14,4 | 13,1 | 11,5 | 13,2 |
| Пятый | 14,4 | 13,1 | 11,5 | 13,2 |

\* В скобках указаны вероятности соответствующих цен.

Расчет ожидаемых полных затрат (верхнее число в правой колонке, *см.* табл. 5.9):

10,4 = 13,1 \* 0,3 +11,5 \* 0,5 + 3,5 \* 0,2 .

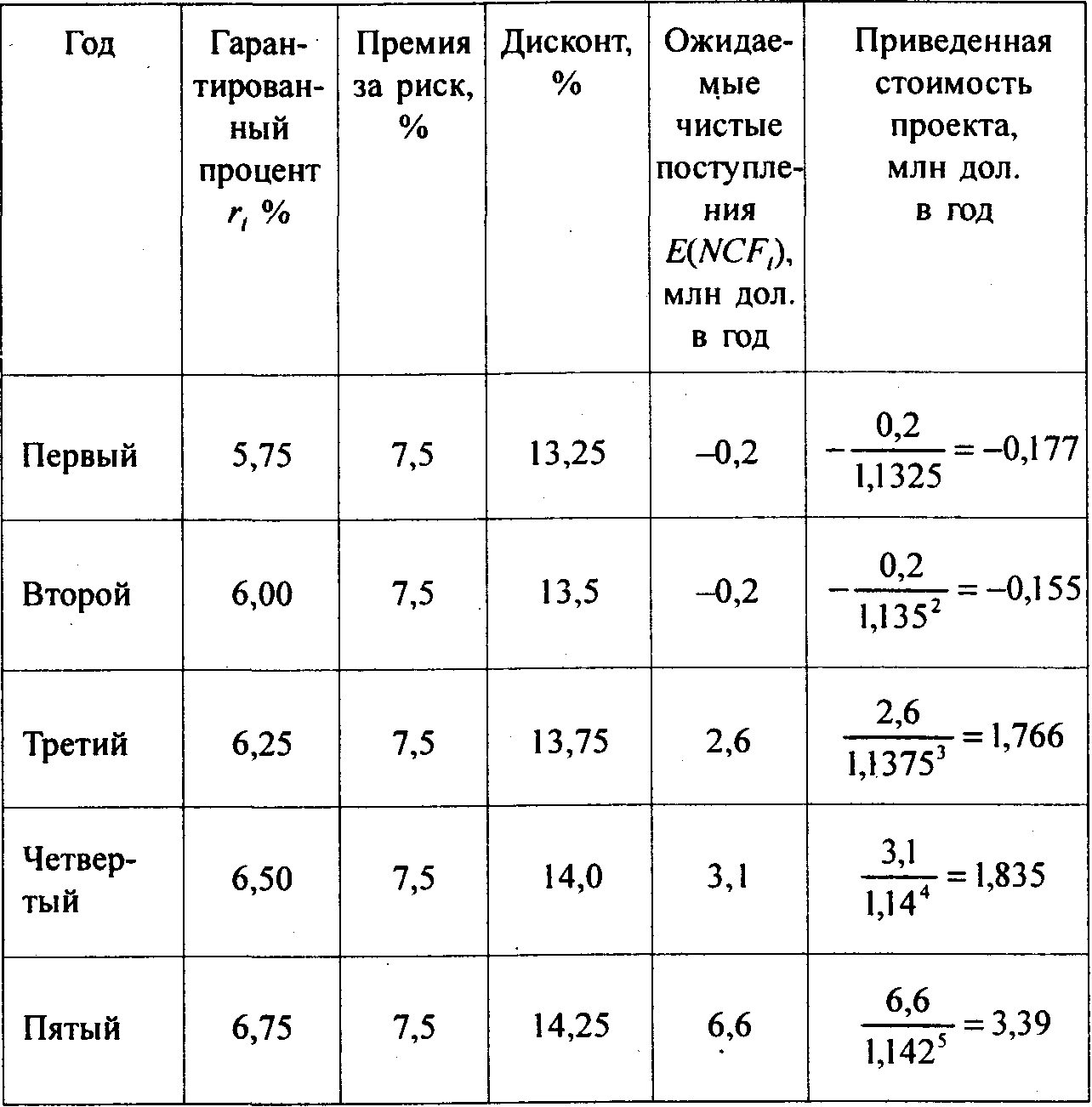
Получив из табл. 5.8 и 5.9 ожидаемую выручку и ожидае­мые затраты, комбинируем рассчитанные данные и получаем ожидаемые чистые поступления по годам в млн дол., т.е. *E(NCFt),* табл. 5.10.

Таблица 5.10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Ожидаемые поступле­ния | Ожидаемая выручка от продажи оборудования | Ожидаемые полные затраты | Ожидаемые чистые поступления |
| Первый | 10,2 | - | 10,4 | -0.2 |
| Второй | 10,2 | - | 10,4 | -0.2 |
| Третий | 14,2 | - | 11,6 | 2.6 |
| Четвертый | 16,3 | - | 13,2 | 3.1 |
| Пятый | 16,3 | 3,5 | 13,2 | 6.6 |

Теперь определяем коэффициент дисконтирования, считая проект средним между рискованным и высокорискованным. С учетом данных табл. 5.6 примем премию за риск, равную 7,5 %. В результате получим приведенную стоимость проекта (табл. 5.11).

Таблица 5.11



Всего за 5 лет приведенная стоимость проекта составит:

-0,177 - 0,155 + 1,766 + 1,835 + 3,39 = 6,659 млн дол.

Чистая приведенная стоимость рассматриваемого *j-*го проек­та за это же время равна:

*E{NPVj) =* 6,659 - 5,3 = 1,359 млн дол. > 0, **(5.6)**

где 5,3 млн дол. - затраты на приобретение оборудования по первона­чальному условию.

Вывод. Проект следует принять. Все представленные рас­четы выполнены на уровне математических ожиданий, поэтому действительный результат в отношении чистой приведенной стоимости проекта может отличаться и в ту, и в другую сторону. Тем не менее, несмотря на приближенность расчета, *это обо­снование проекта, а не принятие решения* «*по* *интуиции» или просто волевое решение - без обоснования.*

5.4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТА

Кроме описанного наиболее точного, но и наиболее трудоем­кого метода принятия инвестиционных решений используются другие методы, определяемые следующими критериями:

• срок окупаемости;

• прибыль на капитал;

• внутренняя норма прибыли.

Рассмотрим суть этих методов.

*Срок окупаемости.* Это период, в течение которого фирма вернет начальные капитальные вложения. Если срок окупаемос­ти меньше заданного нормативного срока, то проект принимает­ся. В противном случае отвергается.

**Пример 5.3.** Пусть для рассмотренного в разд. 5.3 инвести­ционного проекта установлен нормативный срок окупаемости капитальных вложений 3 года. Начальные капитальные вложе­ния были определены выше и равны 5,3 млн дол.

Из табл. 5.11 очевидным образом получается табл. 5.12.

Поскольку наличные капиталовложения равны 5,3 млн дол., то проект окупится, как видно из табл. 5.12., лишь через 4 года при нормативном сроке 3 года. Поэтому проект должен быть отклонен. Таким образом, использование критерия по сроку окупаемости может привести к отклонению инвестиционного проекта с положительной ожидаемой чистой стоимостью (она у нас была равна 1,359 млн дол.). Нетрудно видеть, что при других нормативных сроках освоения капитальных вложений согласно данному критерию можно также прийти к принятию проекта с отрицательной ожидаемой чистой стоимостью *E(NPVj) <* 0*.* При­чина в том, что поступления от проекта в разные моменты вре­мени *не дисконтируются.* Следовательно, по этому критерию слишком большой вес придается ранним поступлениям и слиш­ком малый - более поздним. Поступления после заданного срока окупаемости не имеют ценности вообще, что противоречит здра­вому смыслу. Да и заданный нормативный срок окупаемости (в данном случае 3 года) субъективный. Если бы в данном примере был установлен срок 4 года, проект был бы принят.

Таблица 5.12

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Ожидаемые чистые поступления *E*(*NCFt*), млн дол. в год | Накопленные ожидае­мые чистые поступ­ления, млн дол. |
| Первый | -0,2 | -0,2 |
| Второй | -0,2 | -0,4 |
| Третий | 2,6 | 2,2 |
| Четвертый | 3,1 | 5,3 |
| Пятый | 6,6 | 11,9 |

Таким образом, метод простой, но за простотой стоит очень невысокая точность результатов, что, впрочем, логично: без се­рьезных научных исследований нельзя получить достаточно на­дежных результатов.

*Прибыль на капитал.* Средняя прибыль на капитал инвести­ционного проекта определяется как среднегодовая прибыль, де­ленная на сумму инвестиций в проект. Принять или не принять проект, определяется сравнением прибыли проекта с заданной.

**Пример 5.4.** Пусть требуемая средняя норма прибыли проек­та равна 60 %. Суммарные чистые поступления от проекта составляют 11,9 млн дол. в течение 5 лет (*см.* табл. 5.12), т.е. сред­негодовая прибыль равна:

 = 2,38 млн дол.

Инвестиции составили 5,3 млн дол., поэтому прибыль проек­та будет

 \* 100% = 44,9%

что меньше заданных 60 %. Таким образом, проект и по этому критерию отклоняется, хотя для него согласно формуле (5.6) положительная ожидаемая чистая стоимость *E(NPV)* > 0, и при более точной оценке проект должен быть принят.

В отличие от критерия по сроку окупаемости здесь, наобо­рот, слишком большой вес придается поздним поступлениям: поскольку поступления не дисконтируются, удаленные по вре­мени поступления рассматриваются как текущие, нарушается установленное выше правило, что «сегодняшние деньги дороже завтрашних».

*Внутренняя норма прибыли.* Суть этого критерия проиллюс­трируем на следующем примере.

**Пример 5.5.** Рассмотрим однопериодный инвестиционный проект:

Инвестиции, дол. ............................................. 100 000

Чистые поступления в конце года, дол. ....... 108 000

Норма прибыли *N* при этом равна:



Следовательно, для одного периода критерий, эквивалентный правилу чистой приведенной стоимости проекта, был бы такой: принять проект, если коэффициент дисконтирования (процент на капитал) *r* меньше 8 %. Другими словами, вместо принятия проекта с инвестициями 100 000 дол. и под прибыль *r* = 8 % выгоднее просто положить деньги в банк под *р %* годовых, если *р>r*.

По этой схеме работают фирмы по продаже автомашин, не­движимости в ряде западных стран. Машину можно купить в кредит под 6 % годовых, а деньги положить в банк под 9 % годовых. Здесь коэффициент дисконтирования *r =* 6 % < 9 %. Если бы *r* стал больше 9 %, состоятельные люди покупали бы машины за наличные, а часть других, возможно, не покупала бы вообще. В результате спрос на автомашины снизился бы, что было бы невыгодно производителям автомобилей. На западном рынке так обстоит дело с приобретением многих товаров и услуг, в результате значительная часть общества живет в кредит, хотя это никак не говорит об их бедности.

Глава 6 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Создателем теории статистических игр считается А. Вальд. Он показал, что в теории принятия решений статистические игры являются основным подходом, если решение принимается в ус­ловиях частичной неопределенности.

Статистические модели представляют собой игру двух лиц (человека и природы) с использованием человеком дополнитель­ной статистической информации о состояниях природы.

Она существенно отличается от антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой, где выигрыш одного равен проигрышу другого.

В статистической игре природа не является разумным игро­ком, который стремится выбрать для себя оптимальные страте­гии. Этот игрок не заинтересован в выигрыше. Другое дело -человек, в данном случае статистик. Он имеет целью выиграть игру с воображаемым противником, т. е. с природой.

Игрок-природа не выбирает оптимальной стратегии, но ста­тистик должен стремиться к определению распределения веро­ятностей состояния природы. Следовательно, основными отли­чиями статистической игры от стратегической являются:

• отсутствие стремления к выигрышу у игрока-природы, т. е. отсутствие антагонистического противника;

• возможность второго игрока - статистика провести статис­тический эксперимент для получения дополнительной информа­ции о стратегиях природы.

Так, например, статистик, работающий в фирме «Одежда», может изучить многолетние данные о погодных условиях в местностях, где одежда будет продаваться, и в зависимости от наи­более вероятного состояния погоды выработать рекомендации, куда и какое количество партий изделий отправлять, где выгод­нее и на каком уровне провести сезонное снижение цен и т. д.

Таким образом, теория статистических решений является теорией проведения статистических наблюдений, обработки этих наблюдений и их использования.

В теории статистических решений основные правила могут быть детерминированными и рандомизированными.

В статистических играх используются понятия: риск (функ­ция риска), потери (функция потерь), решение (функция реше­ния), функции распределения при определенных условиях.

Необходимо пояснить понятие *рандомизации.* Это статисти­ческая процедура, в которой решение принимается случайным образом. Математическая энциклопедия это определяет более подробно: «Статистическая процедура принятия решения, в ко­торой по наблюденной реализации *х* случайной величины *Х* решение принимается с помощью розыгрыша по вероятностно­му закону, называется рандомизацией»\*.

\* Математическая энциклопедия. Т.4. - М.: Советская энциклопедия, 1984. - С. 865.

Введем условные обозначения:

*В* или Ω - множество состояний природы;

*В.* или Θ*j* - отдельное состояние природы, Θ*j* ∈ Ω;

*А —* множество действий (решений) статистика;

*а -* отдельное решение статистика, *a* ∈ *А;*

*L -* функция потерь. Множества Ω и *А* предполагаются чис­ленно определенными, поэтому представляется возможным ус­тановить распределение вероятностей. Если принятое статисти­ком решение *a* ∈ *А* и состояние природы Θ ∈ Ω, то функция потерь запишется *L*(Θ; *a*);

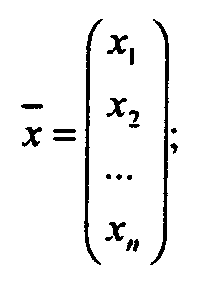
*D -* совокупность всех нерандомизированных (чистых) фун­кций решения;

*d() -* функция решения; * -* случайный вектор. Характери­стикой функции решения является функция потерь. Статистик может перед принятием одного из возможных решений провести эксперимент, который заключается в наблюдении случайной переменной *х.* В итоге представляется возможным получить рас­пределение этой случайной переменной в зависимости от состо­яния природы Θ;

*F*(*x*|Θ) *-* функция условного распределения случайной пере­менной *х.* Предполагается, что для каждого состояния природы Θ известно значение функции *F*(*x*|Θ);

*п -* объем выборки;

*x*Θ *—* множество всех выборок объема *п.* После получения ре­зультата эксперимента *х* статистик использует некоторую функ­цию решения и принимает одно из решений *а ∈* *А,* когда резуль­тат эксперимента - вектор :



*R —* функция риска;

*R*(Θ*,*d) *-* функция риска, определенная на прямом произведе­нии Ω×*D* множества состояний природы и множества решений.

Игра (Ω, *A, L) -* исходная стратегическая игра, соответствующая стратегической задаче принятия решения;

*G =* (Ω, *D, R) -* статистическая игра;

σ - рандомизированная функция решения;

*D\* -* множество случайных функций решения, σ ∈ *D\*.* Под­разумевается, что *D* ⊂ *D\*,* так как чистая функция решения (не­рандомизированная) может быть рассмотрена как смешанная, ко­торая используется с вероятностью, равной 1;

*G*(Θ) *-* функция априорного распределения состояний при­роды Θ;

Ξ - совокупность всех априорных распределений ξ ∈ Ξ.

6.2. СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИГР

Функция решения, отображающая множество выборок *X*Θ в множество решений статистика *A*, называется *нерандомизирован­ной (чистой) функцией решения статистика.* Так, по результа­там эксперимента статистик определяет, какое решение *а* ∈ *А* он должен выбрать. Для выбора из множества *D* наилучшей функции решения он использует функцию риска.

Функция риска зависит от множества состояний природы и от множества функций решения и принимает значение, выражен­ное действительными числами. Она определяет математическое ожидание функции потерь при некотором состоянии природы Θ и известной статистику функции распределения *F*(|Θ)*,* когда *а=d(**).*

Представим функцию риска:

,

где *M -* знак математического ожидания;

*L(*Θ*, a) -* функция потерь при состоянии природы Θ и *d(**) = a.*

В теории статистических функций любую неотрицательную функцию *L,* определенную прямым произведением Ω×*D,* назы­вают *функцией потерь.* Значение *L(*Θ*,d)* функции потерь *L* в про­извольной точке (Θ, *d)*∈ Ω×*D* интерпретируют как ущерб, к ко­торому приводит принятие решений *d, d*∈*D,* если истинное зна­чение параметра есть Θ, Θ ∈ Ω.

Выражение Ω×*D* - прямое произведение множества состоя­ний природы и множества функций решения. Функция *R(*Θ*, d)* не является случайной величиной, а принимается как платеж ста­тистика в его игре с природой при следующих условиях:

• состояние природы фиксировано;

• функция решений выбрана, *d* ∈ *D*.

Стратегическая игра (Ω, *A, L)* становится статистической, *G* = (Ω, *D, R),* если используется результат эксперимента - век­тор *.* Игра называется статистической, если в ней:

• *X*Θ - множество *n*-мерных выборок;

• *D* - множество функций решений, которые преобразуют *X*Θ в *А*;

*•* Ω *-* множество состояний природы;

• *R*(Θ*, d*) *-* функция риска.

Статистическая игра записывается как *G* = (Ω, *D, R).* Данная игра является игрой двух лиц с нулевой суммой, где *d*∈*D -*функция решения статистика, а риск *R*(Θ*, d*) статистика - пла­теж природе.

Статистик может не прибегать к рандомизации, если он ис­пользует как оптимальную байесовскую функцию решения *r* (*см.* разд. 6.2.1).

Рандомизация на стороне статистика проводится двумя мето­дами:

1) применение решений *а*∈*А с* определенными вероятностя­ми (смешение решений);

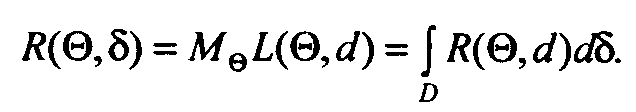
2) смешение чистых функций решения *d*∈*D,* т.е. рандомиза­ция функций решения.

Чаще применяется второй метод.

Распределение вероятностей δ на множестве *D* чистых фун­кций решения *d* называется *рандомизированной (смешанной) функцией решения статистика.*

Функция риска становится случайной величиной, если экс­периментатор применяет в статистической игре случайную фун­кцию решения δ∈*D*\*, т. е. когда каждой чистой функции реше­ния *d*∈*D* приписывается вероятность, с которой она должна использоваться.

Платежом будет математическое ожидание функции потерь, взятое для некоторого состояния природы Θ при распределении δ, определенном на множестве чистых функций решения *D*:



Если статистик использует случайные функции решения δ∈*D*\*, то этим расширяется (обобщается) статистическая игра.

Расширенная статистическая игра (Ω, *D\*, R)* называется так­же *смешанным расширением статистической игры с рандоми­зацией на стороне статистика.*

Дальнейшее расширение статистической игры может быть достигнуто при предположении, что природа также «применяет» стратегию при «выборе» своего состояния Θ.

Априорное распределение вероятностей ξ на множестве Ωсостояний природы означает распределение до проведения экспе­римента. Это априорное распределение ξ∈Ξ состояний природы является случайной (смешанной) стратегией природы в статисти­ческой игре, где природа не рассматривается как разумный игрок.

Если Θ предполагается случайной величиной с априорным распределением ξ, то риск *R*(Θ,δ) становится случайной пере­менной при фиксированной функции решения δ. В данном слу­чае математическое ожидание риска *R*(Θ,δ) при априорном рас­пределении ξ, задаваемом функцией распределения *G(*Θ*),* оп­ределяется как

,

где *r*(ξ,δ) -байесовский риск функции решения δ с учетом априорно­го распределения ξ.

Если в качестве оптимальной принимается байесовская фун­кция решения, то используется формула *r*(ξ,δ).

Вводя рандомизацию на стороне природы, приходим к даль­нейшему расширению статистической игры.

Игра (Ξ, *D\*, r*) со смешанным расширением статистической игры с рандомизацией на стороне статистика и на стороне при­роды называется *полностью расширенной статистической иг­рой.*

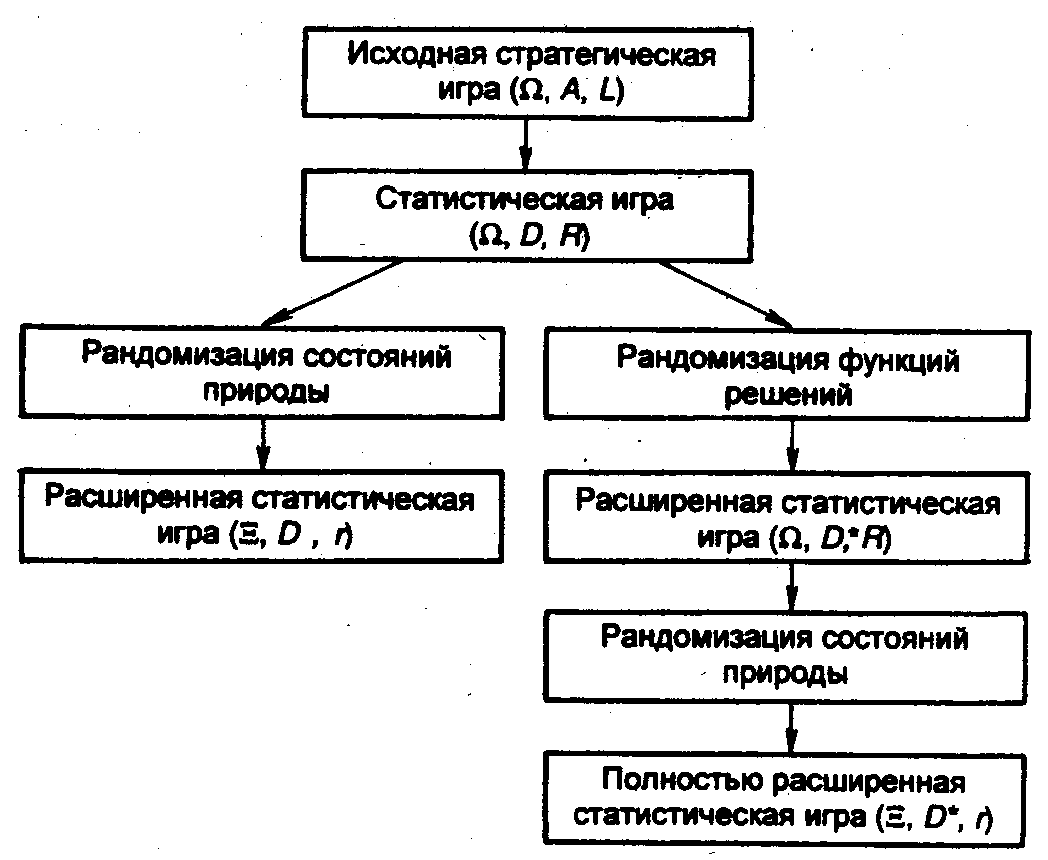
Поясним в полностью расширенной статистической игре (Ξ, *D\*, r*) ее составляющие:

Ξ - множество всех априорных распределений ξ состояний природы или множество ее смешанных стратегий;

*D\* -* множество всех случайных функций решения;

*r = r*(ξ,δ) - байесовский риск.

Представим схему расширения статистической игры (рис. 6.1). При наличии данных без учета стохастических распределений имеем исходную стратегическую игру двух лиц с нулевой сум­мой, которая относится к антагонистическим играм. Данная игра является исходной для соответствующей статистической задачи принятия решения.



*Рис. 6.1. Расширение статистической игры*

Если статистик (экспериментатор) не имеет возможности провести эксперимент со случайной величиной *X,* чтобы полу­чить ее распределение, которое зависит от состояния природы, он вынужден будет использовать только стратегическую игру (Ω, *A, L*).

Однако очень часто статистик может провести эксперимент и получить в результате вектор *,* которым он в состоянии вос­пользоваться при принятии решения *а∈А* функции *d(*). В этом случае платеж *L(*Θ*, а*) становится случайной величиной, а игра - статистической G(Ω, *D*, *R).* Стратегией статистика будет *d∈D,* а платежом природе от статистика станет его риск *R*(Θ*, d*).

Далее у статистика остаются две альтернативы:

1) воспользоваться рандомизацией состояний природы и пе­рейти к расширенной (Ξ, *D, r)* статистической игре;

2) воспользоваться рандомизацией функций решения и перей­ти к расширенной статистической игре (Ω, *D\*, R).*

Наконец, если статистик применит смешанные стратегии для обоих игроков, то получит полностью расширенную статисти­ческую игру ((Ω, *D\*, r).*

На практике статистик для выбора оптимальной стратегии может не производить рандомизацию, а в качестве оптимальной взять байесовскую функцию решения.

А. Вальд, создавая теорию статистических игр, опирался на созданную Д. Нейманом теорию стратегических игр, поэтому сравним далее понятия стратегических игр двух лиц с нулевой суммой и понятия статистических игр статистика с природой. Для этого укажем основные обозначения в стратегической и статистической играх:

*Х -* совокупности стратегий игрока 1;

*Y -* совокупности стратегий игрока 2;

*W—* платежная функция;

*W(X,Y) -* платеж игрока 2 игроку 1;

*G* == *(X,Y,W) -* игра игрока 1 с игроком 2;

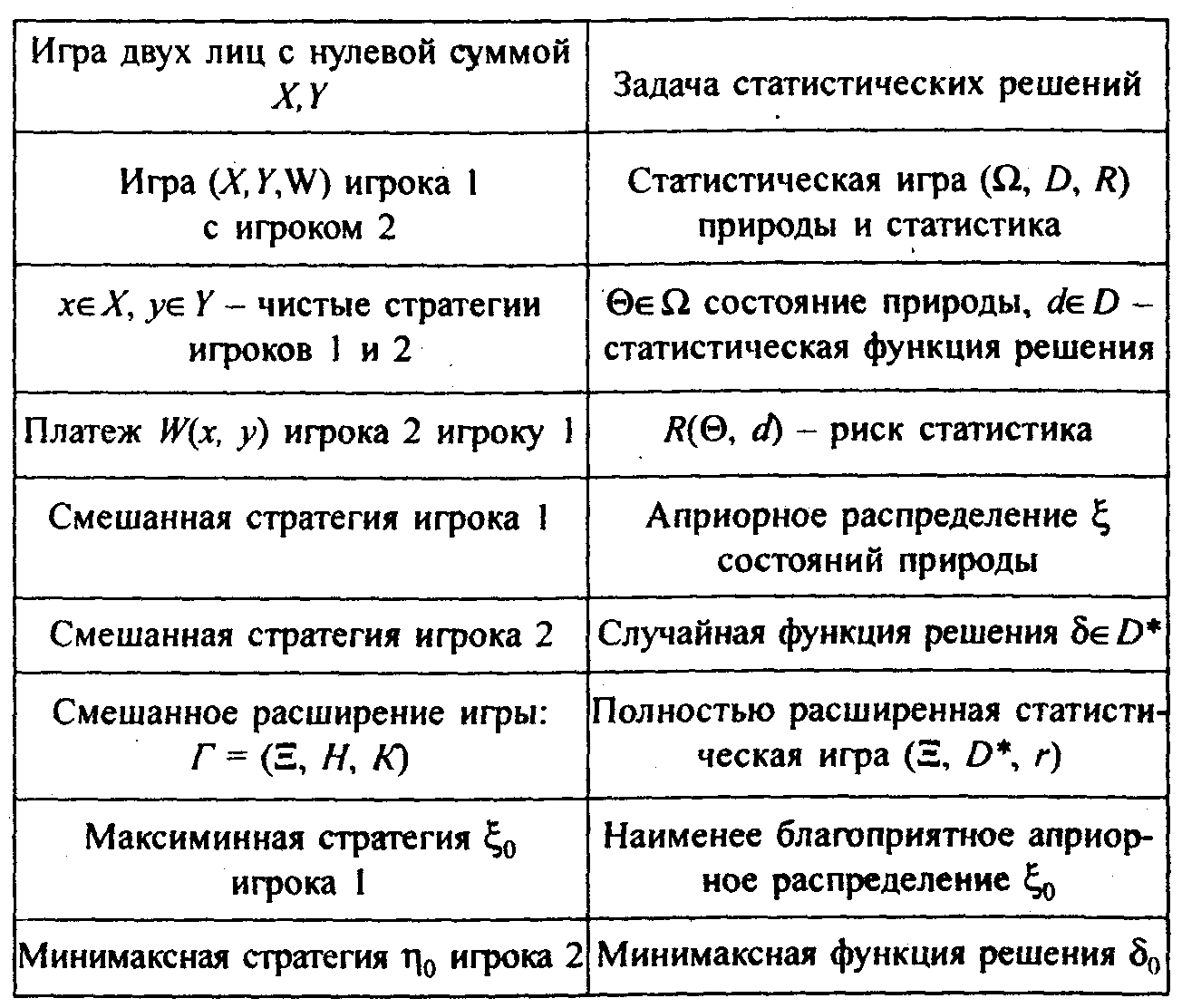
*Г* = (Ξ, *Н, К) ~* смешанное расширение игры *G = (X, Y,W),* где Ξ - множество всех смешанных стратегий ξ игрока 1;

*Н -* множество всех смешанных стратегий η игрока 2;

*К -* риск игрока 2.

Составим сравнительную таблицу задач статистических ре­шений с игрой двух лиц с нулевой суммой (табл. 6.1).

Таблица 6.1



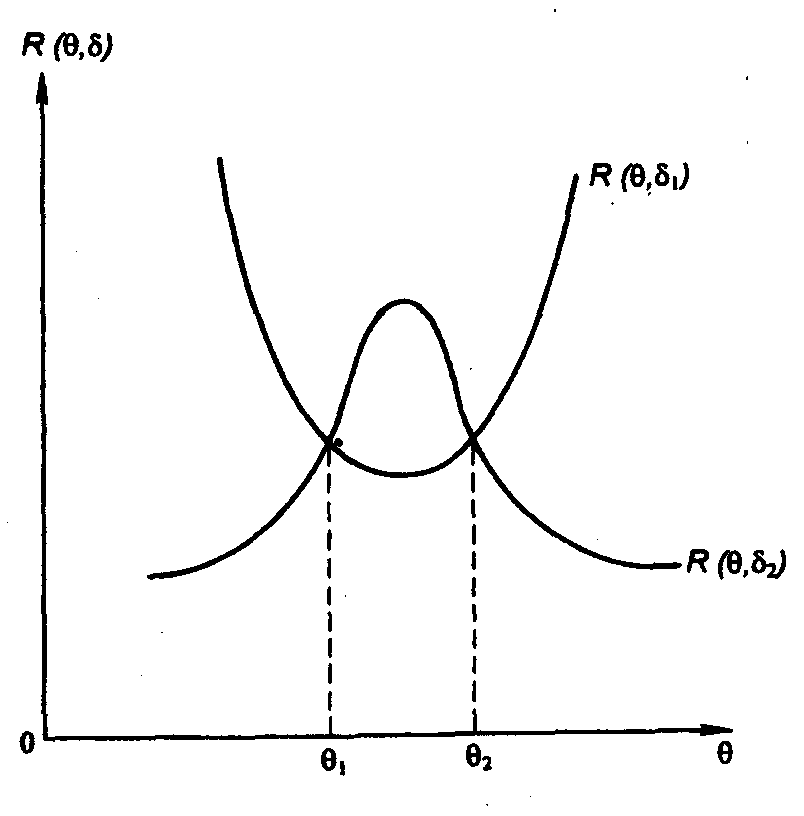
6.2.1. ВЫБОР ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ

Для всех состояний природы не существует одной наилуч­шей функции решения. От статистика требуется применение таких методов, которые дают оптимальные функции решения в более узком диапазоне.

Для этого необходимо использовать критерии оптимальности.

Статистик в статистической игре (Ω, *D, R)* или в расширен­ных статистических играх стремится к выигрышу, т. е. к опреде­лению наилучшей функции решения, при которой риск *R*(Θ*,* δ)был бы минимальным. Но это не просто, так как для каждого состояния природы Θ имеется своя лучшая функция.

Пусть у нас имеются две различные функции решения δ1 и (рис. 6.2).



*Рис. 6.2. Сравнение двух функций решения*

Можно выделить область, где функция δ1 будет лучшей, - в диапазоне состояний природы Θ1< Θ<Θ2. Вторая функция δ2 будет лучшей для состояния природы при Θ<Θ1 и при Θ>Θ2*.*

Функция δ ∈ *D* называется *допустимой,* если в множестве *D\** нет никакой другой функции решения δ0, которая была бы лучшей δ для всех Θ∈Ω*.* Данная функция для каждого Θ∈Ω дол­жна удовлетворять неравенству *R*(Θ*,*δ0) ≤ *R*(Θ*,*δ). Таким обра­зом, допустимая функция решения не будет доминирующей стра­тегией статистика в статистической игре.

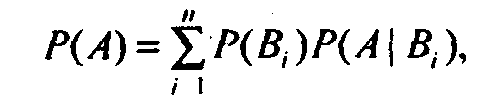
Рассмотрение только допустимых функций существенно уменьшит множество *D\** до множества допустимых функций решения.

Отметим, что байесовские функции решения входят в класс допустимых функций.

*Определение.* Функция решения δ0∈*D\** называется байесов­ской относительно априорного распределения ξ∈Ξ состояний природы Θ, если она минимизирует байесовский риск *r*(ξ, δ) на множестве *D\*.*

Таким образом, *r*(ξ, δ) *=* *r*(ξ, δ). Приведем формулу Байеса. Прежде чем ее написать, обратимся к теореме о полной вероятности [2, разд. 2.5, 2.6].

**Теорема.** Если событие *А* может наступить только при усло­вии появления одного из событий *В1*, *В2, ...,Bn*, образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события *А* равна сумме произведений вероятностей каждого из событий *В1*, *В2, ...,Bn* на соответствующую условную вероятность собы­тия *А:*

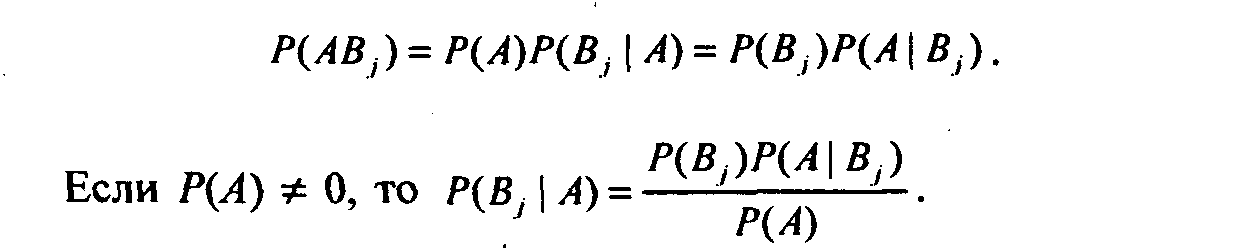


где *P*(*Bi*) - вероятность события *Bi*;

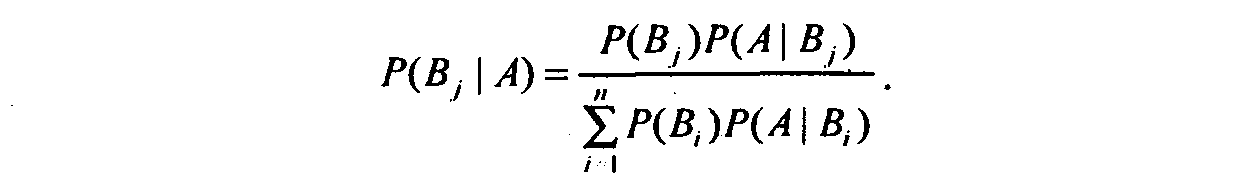
*Р(А|Вi) -* условная вероятность события *А* в случае, если событие *Вi* уже произошло.

Формула Байеса используется тогда, когда событие *А* появля­ется совместно с каким-либо из полной группы несовместных событий *В1*, *В2, ..., Bn .* Событие *А* произошло, и требуется про­извести количественную переоценку вероятностей событий *В1*, *В2, ..., Bn*. При этом известны вероятности *Р(В1), Р(В2),...,* *Р*(*Bn*) до опыта (априорные). Требуется определить вероятности после опыта (апостериорные).

Апостериорные вероятности представляют собой условные вероятности *Р(В1|А), Р(В2|А) ,..., Р(Вn|А).* Вероятность совместно­го наступления событий *А с* любым из этих событий *Вj* по тео­реме умножения равна:



Эту формулу можно переписать исходя из формулы полной вероятности:



**Задача 6.1.** Собирается партия исправных изделий с трех предприятий. Первый завод поставляет 60 %, второй - 30 %, третий - 10 % изделий. *В1*, *В2, В3 -* события, соответствующие тому, что изделия изготовлены на первом, втором и третьем предприятиях.

Вероятность исправной работы изделий первого предприя­тия равна 0,98, второго - 0,99, третьего - 0,96.

Определить вероятность того, что в собранную партию ис­правных изделий попали соответственно изделия с первого, второго и третьего предприятий.

Введем обозначения:

*А -* событие, заключающееся в том, что изделие исправно;

*Р(А) -* полная вероятность того, что изделие исправно;

*Р(В1|А), Р(В2|А),* *Р(В3|А)* - условные вероятности того, что исправное изделие изготовлено соответственно на первом, вто­ром и третьем предприятиях;

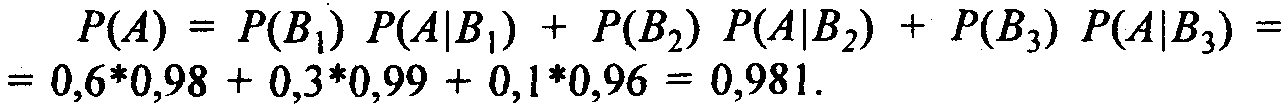
*Р(A|В1), Р(A|В2),* *Р(A|В3)* *-* условные вероятности того, что изделие, изготовленное соответственно на первом, втором и тре­тьем предприятиях, исправно;

*Р(В1), Р(В2),* *Р(В3) -* вероятности того, что изделие изготов­лено соответственно на первом, втором и третьем предприятиях.

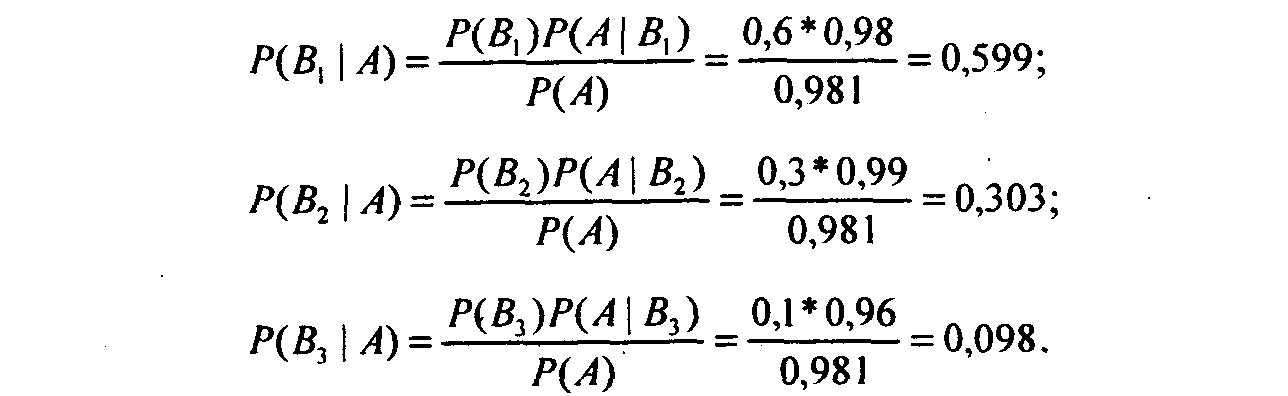
Известно: *Р*(*А*|*В1*) *=* 0,98; *Р*(*А*|*В2*)= 0,99; *Р*(*А*|*В3*)= 0,96; *Р*(*В1*) = 0,60; *Р*(*В2*) = 0,30; *Р*(*В3*) = 0,10.

Требуется определить *Р(А); Р(В1|А); Р(В2|А); Р(В3|А)*.

Решение. 1. Определим полную вероятность того, что из­делия, прибывшие с разных предприятии, исправны:



2. Вычислим условные вероятности того, что в партию ис­правных попали изделия с первого, второго и третьего предпри­ятии соответственно:



3. Проверим: *Р(В1|А) + Р(В2|А) + Р(В3|А)* = 0,599 + 0,303 + + 0,098 = 1*.*

Вывод. По формуле Байеса количественная переоценка доли предприятии в партии исправных изделии составляет: первое предприятие имеет 59,9 %; второе - 30,3 %; третье - 9,8 %.

Остановимся на некоторых нестандартных принципах при­нятия решений.

**Принцип Байеса - Лапласа.** Данный принцип отступает СП-условий полной неопределенности. В нем предполагается, что возможные состояния природы могут достигаться с вероятнос­тями *Р1, P2,..., Рn* при условии, что *Р1+ P2+,...,+ Рn* *=*1. Байес в 1763 г. предложил считать равными вероятности отдельных состояний природы.

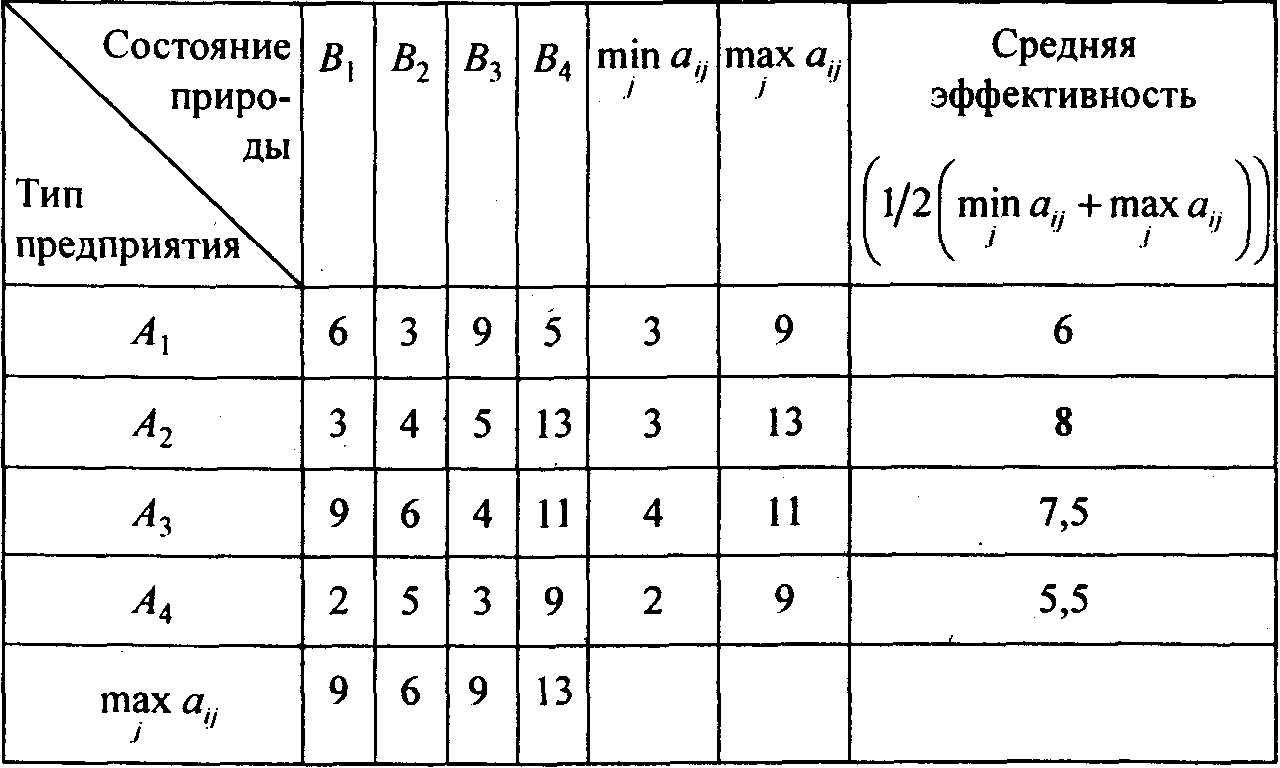
В 1812 г. Лаплас обобщил этот принцип на случай различ­ных вероятностей, но тем не менее говорят и о байесовском подходе. Если напомнить, что байесовские функции решения входят в класс допустимых функций, то будет понятно их широ­кое использование в практике принятия решений (*см. гл.* 3).

**Принцип Гурвица.** Этот принцип является упрощенным вариантом принципа Байеса - Лапласа. Если известны вероят­ности отдельных состояний, то берут среднее арифметичес­кое результатов при наилучшем решении. Иногда, если суще­ствует возможность определить вес наихудшего и наилучшего решений, то используют их взвешенную среднюю арифмети­ческую.

Проиллюстрируем применение данного принципа на приме­ре строительства предприятий при четырех разных состояниях природы и наличии четырех разных типов предприятий.

**Задача 6.2.** Имеются определенные средства на возведение предприятий. Необходимо наиболее эффективно использовать капиталовложения с учетом климатических условий, подъезд­ных путей, расходов по перевозкам и т.д. Сочетание этих фак­торов по влиянию на эффективность капиталовложений можно разбить на четыре состояния природы *B1*, *В2, В3, В4.* Типы предприятий обозначим *А1, А2, А3, А4.* Эффективность строи­тельства определяется как процент прироста дохода по отно­шению к сумме капитальных вложений. Информацию, отража­ющую постановку задачи, представим в табл. 6.2.

Таблица 6.2



Варианты решений

1. Решение по принципу стратегических игр, по принципу максимина:  = 4 . Нужно строить предприятие *А3.*

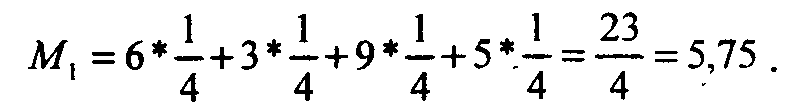
Изменим условия задачи и предположим, что в табл. 6.2 отражены затраты на строительство предприятий, тогда выбор типа предприятий следует осуществить по принципу минимакса:  =9. Нужно строить предприятие *А1* или *А4.*

2. Решение по принципу Гурвица.

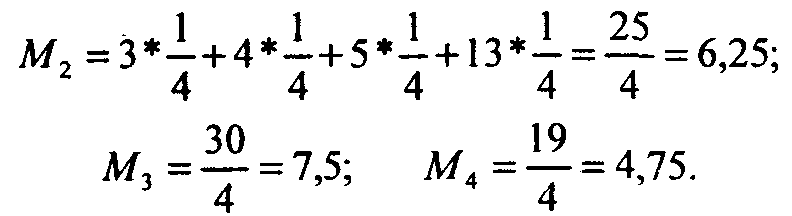
Если известны все вероятности, определяющие состояния природы, сделаем выбор с помощью среднего арифметического лучшего и худшего результатов.

Согласно табл. 6.2 это будет рекомендация строить предпри­ятие *А2,* обеспечивающее максимальную среднюю эффективность Ф =  = 8.

3. Применим принцип Байеса при равных вероятностях со­стояний природы *Р(В1)=Р(В2)*=*Р(В3)*=*Р(В4)*=1/4. Определим рентабельность, соответствующую решению *А1,* т. е. *М1*:



Далее определяем *М2, М3,* и *М4.*



Выводы. Предполагая, что все вероятности состояний при­роды равны, следует строить предприятие *А3,* так как *M3 =* 7,5 = max (*M1*, *M2, M3, M4).* Отметим, что принцип Байеса-Лапласа имеет смысл применять, если возможно оценить веро­ятности отдельных состояний природы. При этом необходимо, чтобы решения также повторялись многократно.

Когда события повторяются многократно, действует закон больших чисел, согласно которому достигается максимальный средний результат.

При единичных решениях принцип Байеса - Лапласа не следует применять.

Принцип Гурвица фактически является упрощением байесов­ских оценок. Гурвиц допускает, в частности, при отсутствии информации о вероятностях возникновения отдельных состоя­ний природы брать среднее арифметическое значение результа­тов наилучшего и наихудшего решений.

6.2.2. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

При применении теории статистических игр на предприятии, в фирме бывает возможным получить дополнительную статис­тическую информацию, которая позволяет перейти от стратеги­ческой к статистической игре с природой. Очень часто при воз­можности многократного повторения как состояний природы, так и решений статистика мы можем принимать минимаксные бай­есовские решения.

Для макроэкономических задач значительно реже удается получать информацию о состояниях природы. Кроме того, имея распределение вероятностей ее состояний, мы не всегда можем этой информацией воспользоваться. Принятие решения может носить одноразовый характер. В этой ситуации наилучшая бай­есовская стратегия при многократном принятии решения утра­чивает свои оптимизационные свойства.

Задачи, решаемые в условиях неопределенности, имеющие характер игры с природой, делятся на два типа:

1) *в* *условиях полной неопределенности,* когда отсутствует возможность получения дополнительной статистической инфор­мации о состояниях природы; основной моделью при этом слу­жит стратегическая игра (Ω, *A, L),* которая не преобразуется в статистическую;

2) *в условиях риска,* если существует возможность сбора до­полнительной статистической информации о распределении со­стояний природы; эти задачи можно преобразовать к статисти­ческой игре (Ω, *D, R),* в которой функции риска рассматривают­ся как платежи.

Рассмотрим практический пример.

**Задача 6.3.** Получение лицензии на новую продукцию.

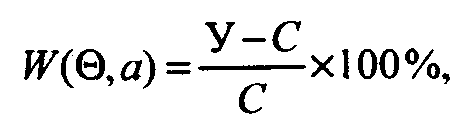
Требуется выбрать лучшую лицензию на выпуск легкового автомобиля у иностранных фирм. Имеются четыре предложения, следовательно, множество решении *А = {а1, а2, а3, а4},* где *а1 -*решение о покупке лицензии у инофирмы *Ai (i* = ).

Фирмы требуют неодинаковые суммы за лицензии в зависи­мости от различных затрат на организацию производства и из­держек эксплуатации.

Известно, что основным требованиям владельцев автомоби­лей (эстетика, количество мест в салоне, скорость) удовлетворяют все четыре фирмы. В результате главным критерием являют­ся затраты, связанные со сделкой.

Пусть на основе экономического расчета вычислена эффек­тивность покупки каждой из четырех лицензий. Эта эффектив­ность зависит от длительности периода, в течение которого мож­но будет выпускать автомобили по лицензии, учитывая уровень их рентабельности и соответствия последним достижениям на­уки и техники в области автомобилестроения. Множество состо­яний природы , где Θ1, Θ2 - рентабельность и со­ответствие техническому уровню выпущенных по приобретен­ной лицензии первого и второго автомобилей, достигаемые со­ответственно через 15 и 25 лет.

Представим формулу экономической эффективности:



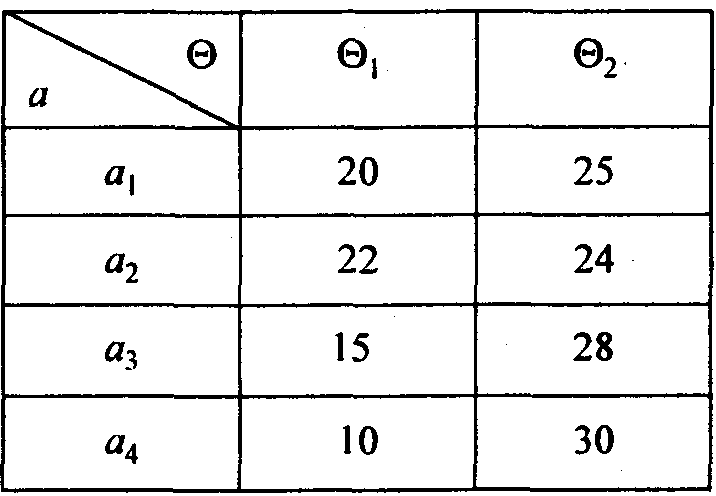
где *У* - продажная цена автомобиля;

*С* - себестоимость;

*W-* выигрыш игрока 1, в данном случае статистика, представляю­щего автомобильную промышленность.

Отразим в табл. 6.3 полученные значения эффективности *W*(Θ*, a*).

Таблица 6.3.



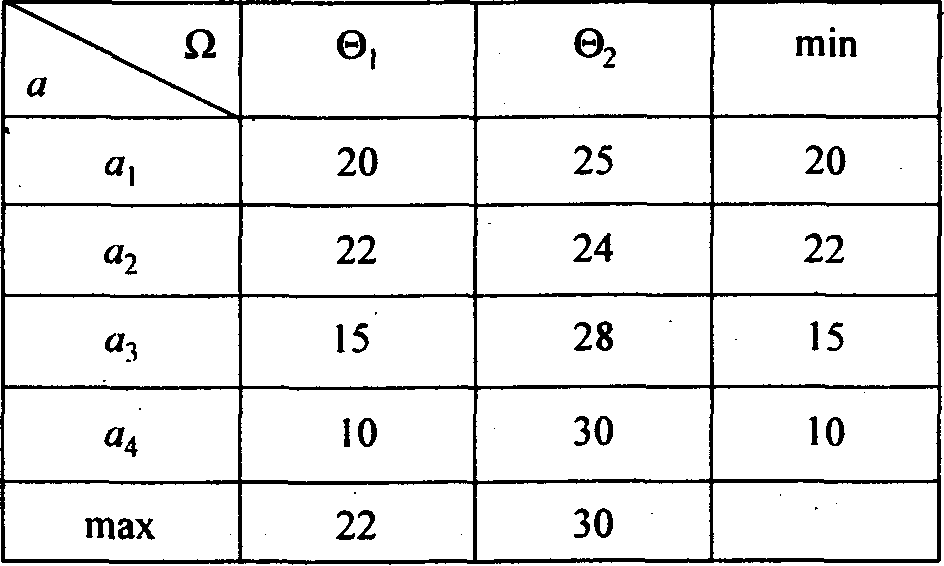
О стратегиях природы нет информации, и ее невозможно получить.

Решение нужно найти при полной неопределенности, так как нет данных для перехода от стратегической игры к статистической.

Применим максиминный критерий Вальда.

Для этого перепишем табл. 6.3 и найдем минимальные зна­чения по строке и максимальные - по столбцу. Это определит матрицу игры (табл. 6.4).

Таблица 6.4



Матрица игры (Ω, *A, W)* имеет седловую точку, равную 22 %, поскольку



Итак, оптимальной нерандомизированной максиминной стра­тегией статистика (игрока 1), представляющего интересы авто­мобильной промышленности, будет решение *а2,* что соответствует покупке лицензии у фирмы *А2* на производство легкового авто­мобиля.

Это наиболее осторожная стратегия в игре с природой при отсутствии дополнительной статистической информации. При этом в качестве функций платежей была принята эффективность сделки *W*(Θ *, a)* = 22.

Глава 7 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ

7.1. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

**Задача 7.1.** Необходимо построить в регионе электростанцию большой мощности. В данном регионе имеются возможности:

• *а1 -* построение большого водохранилища и гидроэлектро­станции;

• *a*2 - сооружение тепловой электростанции на основном (газовом) топливе и резервном (мазуте);

• *a3* - сооружение атомной электростанции.

Возможные решения *А* = *{а1, а2, а3}.* Экономическая эффек­тивность каждого варианта рассчитана проектным институтом, который учитывал затраты на строительство и эксплуатацион­ные расходы.

На эксплуатационные расходы гидроэлектростанции влияют климатические условия, например, такие, как погодные условия, определяющие уровень воды в водохранилищах.

Большое число случайных факторов воздействует на эконо­мическую эффективность тепловой станции: цены на мазут и газ, срывы поставок мазута из-за неритмичности работы транспорта в зимнее время, особенно во время снегопадов и продолжитель­ных морозов.

Экономическая эффективность атомной электростанции бу­дет зависеть от больших затрат на строительство и устойчивости агрегатов и системы управления во время эксплуатации.

Таким образом, погодные условия будут в основном сказы­ваться на расходах по эксплуатации гидроэлектростанции и теп­ловой электростанции. Следовательно, на эффективность тепло­вой электростанции будут влиять как погодные условия, так и цены на газ и мазут.

Случайные факторы, от которых зависит экономическая эф­фективность вариантов капиталовложении, объединим в четыре возможных состояния природы - Ω = (Θ1, Θ2, Θ3, Θ4) с учетом окупаемости:

Θ1 - цены на газ и мазут низкие и климатические условия благоприятные;

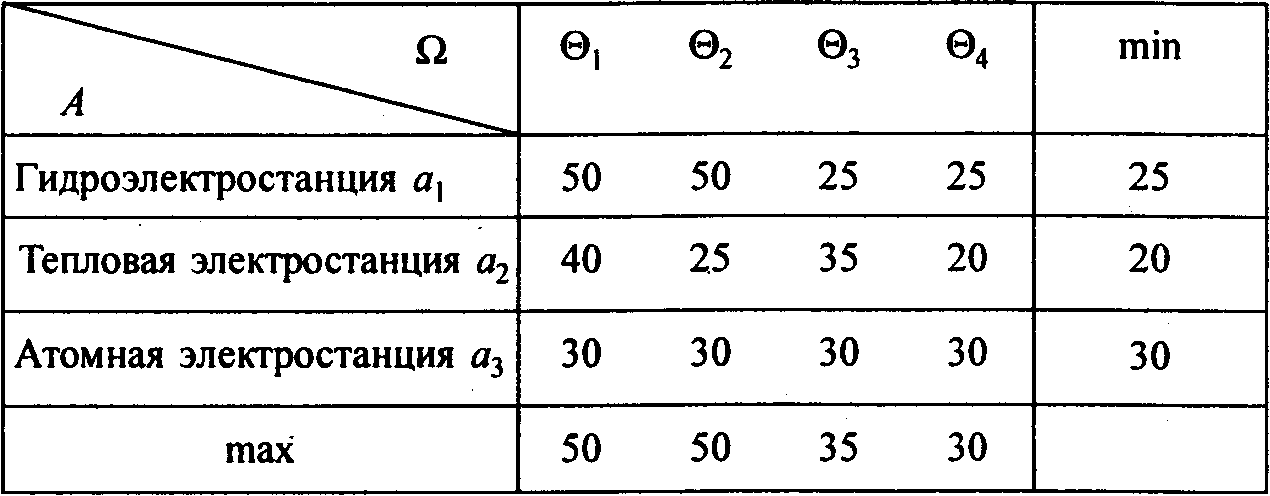
Θ2 - цены на газ и мазут высокие и климатические условия благоприятные;

Θ3 - цены на газ и мазут низкие и климатические условия неблагоприятные;

Θ4 - цены на газ и мазут высокие и климатические условия неблагоприятные.

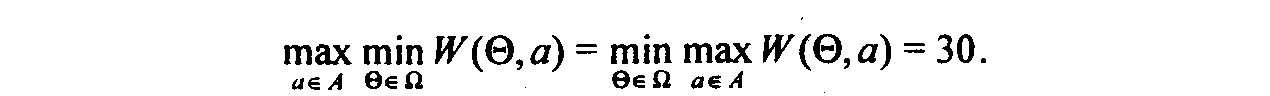
Решение. Представим в табл. 7.1 полученные расчеты эф­фективности *W*(Θ*, a*).

Таблица 7.1



В стратегической игре (Ω, *A, W)* игрок 1 - статистик, а игрок 2 - природа.

Матрица игры имеет седловую точку, равную 30 ед.:



Если бы не было дополнительной статистической информа­ции, то на этом игра закончилась бы решением *a3* - строить атом­ную электростанцию. Это было бы осторожным решением.

С помощью имеющихся временных рядов можно получить апостериорную информацию, поскольку о влиянии на цены за газ, мазут таких состоянии, как наводнения, засухи, морозы, сильные снегопады и т.п., существует статистическая информация.

По данным многолетней статистики цен и состояний получе­ны оценки апостериорного распределения состояний природы. Данные непосредственного наблюдения состояний природы по­зволили получить апостериорное распределение состояний при­роды:

*P*(Θ1) = 0,15; *Р*(Θ3) = 0,20;

*P*(Θ2) =0,30; *P*(Θ4) *=* 0,35.

Имея апостериорное распределение состояний природы, мож­но преобразовать стратегическую игру (Ω, *A, W)* в статистичес­кую, в которой платеж игроку (статистику) будет определен как математическое ожидание в данном распределении состояний природы *M*[*W*(Θ*, a*)].

Математическое ожидание максимизирует оптимальная бай­есовская стратегия статистика, что эквивалентно минимизации байесовского риска в статистической игре, в которой функция потерь *L*(Θ, *a)* = *-W(*Θ*, a).*

Для отдельных решений получим математические ожидания *M[W(Q, a)]:*

*M*[*W(*Θ*,* *a1*)] *=* 50\*0,15 + 50\*0,30 + 25\*0,20 + 25\*0,35 = 36,25;

*M*[*W(*Θ*, а2)*] *=* 40\*0,15 + 25\*0,30 + 35\*0,20 + 20\*0,35 = 27,50;

*M*[*W(*Θ*,* *a3*)]=30\*0,15+30\*0,30+30\*0,20+30\*0,3 5=30,00;

max *M*[*W*(Θ, *a*)]=*M*[*W*(Θ, *a1*)]=36,25.

Вывод. Оптимальным решением будет инвестирование средств в проект *а1 -* строительство гидроэлектростанции.

7.2. ИНВЕСТИЦИИ В РАЗРАБОТКУ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

**Задача** **7.2.** Разведка недр в регионе показала наличие место­рождений серы. Требуется решить, разрабатывать месторождение, т. е. инвестировать строительство комплекса (*а1*)*,* или воздержать­ся (*a2*). Таким образом, множество решений *А= {а1, а2}.* Прове­денные геологические исследования позволили открыть месторож­дение, но не дали ответа, строить или не строить комплекс.

Состоянием природы в данном случае будет глубина залега­ния, так как истинное залегание пластов неизвестно. Если глу­бина небольшая, то экономическая эффективность разработки будет высокой. Если глубина большая, то эффективность может оказаться низкой и добыча серы может не окупиться.

Введем обозначения для состояний природы:

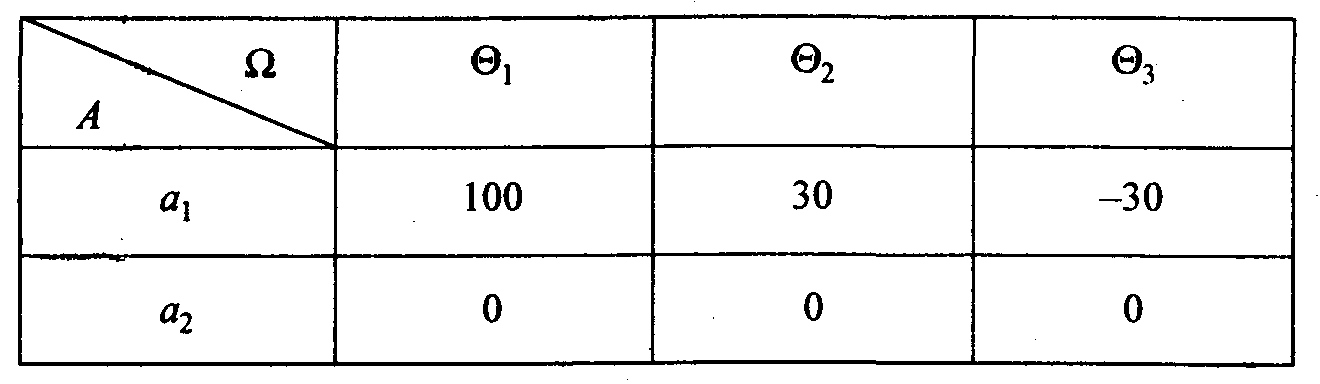
Θ1 - месторождение находится на глубине, благоприятной для разработки;

Θ2 - месторождение находится как на малой, так и на боль­шой глубине;

Θ3 - месторождение находится в основном на большой глу­бине.

Решение. Проведем экономический расчет эффективности и результаты расчета в рублях представим в табл. 7.2.

Таблица 7.2



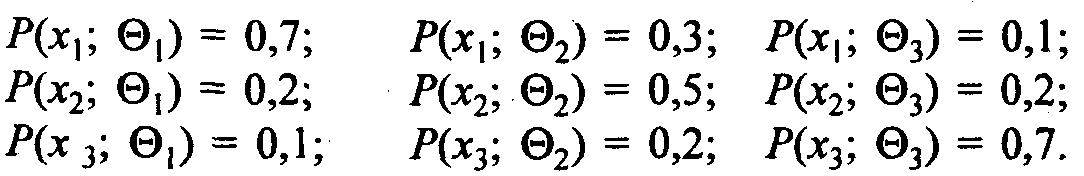
Нулевая эффективность относится к случаю отказа от разра­ботки, *a1* = –30 означает, что разработка и добыча месторожде­ний серы не оправдают затрат, а, наоборот, приведут к убыткам в 30 тыс. руб.

Полную неопределенность можно уменьшить благодаря до­полнительной статистической информации. Тогда задача станет не стратегической, а статистической. Эту информацию можно получить, проведя сейсморазведку и поисковое бурение, что позволит более точно, чем при разведочных работах, определить среднюю глубину Залегания пластов серы, так как станут изве­стны вероятности залегания. Это несколько снизит эффектив­ность, но оправдает дополнительные затраты. По результатам дополнительных исследований получим множество

*Х* = *{х1*, *х2, x3*},

где *х1*, *х2, x3* - малая средняя, умеренная средняя и большая средняя глубина залегания пластов соответственно.

По данным дополнительных исследований были оценены условные вероятности получения отдельных результатов *хi* ∈ *Х* для соответствующих состояний природы Θ∈Ω:

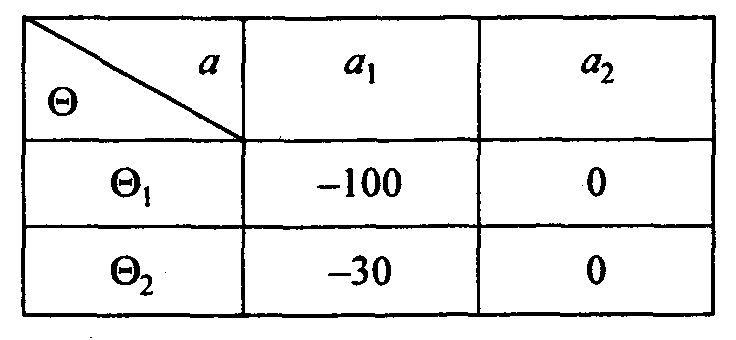


От стратегической игры (Ω, *A, W)* переходим к задаче в ус­ловиях риска (Ω, *D, R).*

При этом игроком 1 будет природа, а игроком 2 - статистик. Обозначим *D -* множество стратегий статистика, т. е. множество функций *d,* отображающих множество *Х* во множество *А.*

Функцией платежей будет функция риска *R(*Θ*, d) = M*[*L(*Θ*, а)],* где функция потерь принимает значения *L*(Θ, *a*) = –*W(*Θ*, а)* (табл. 7.3).

Таблица 7.3



Составим таблицу множества возможных нерандомизирован­ных функций *d* (*d∈D;* 23 = 8) решений при разных *хi* (табл. 7.4). Рассчитаем по табл. 7.4 значения риска. Воспользуемся дан­ными вероятностей состояний природы и получим на основании функции потерь их математические ожидания, т. е. функции риска:

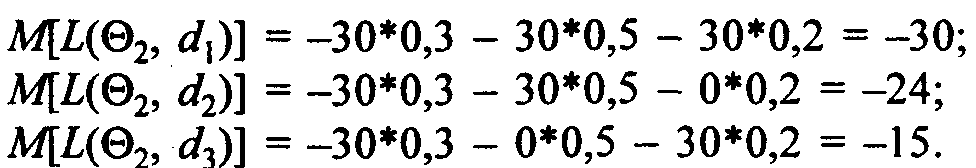
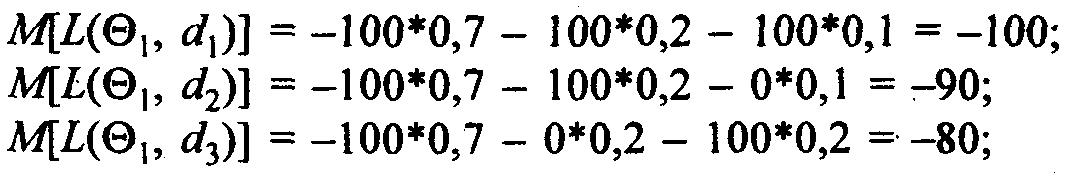
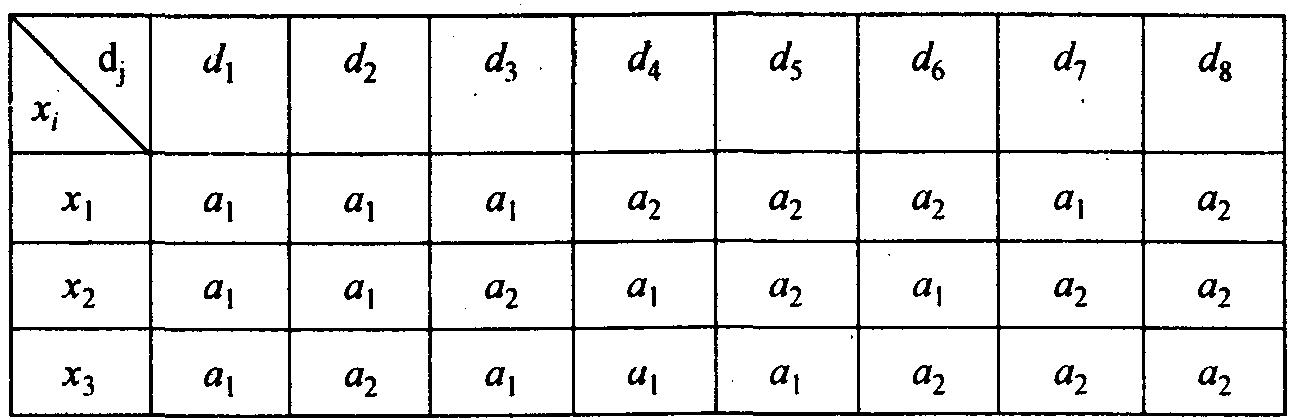
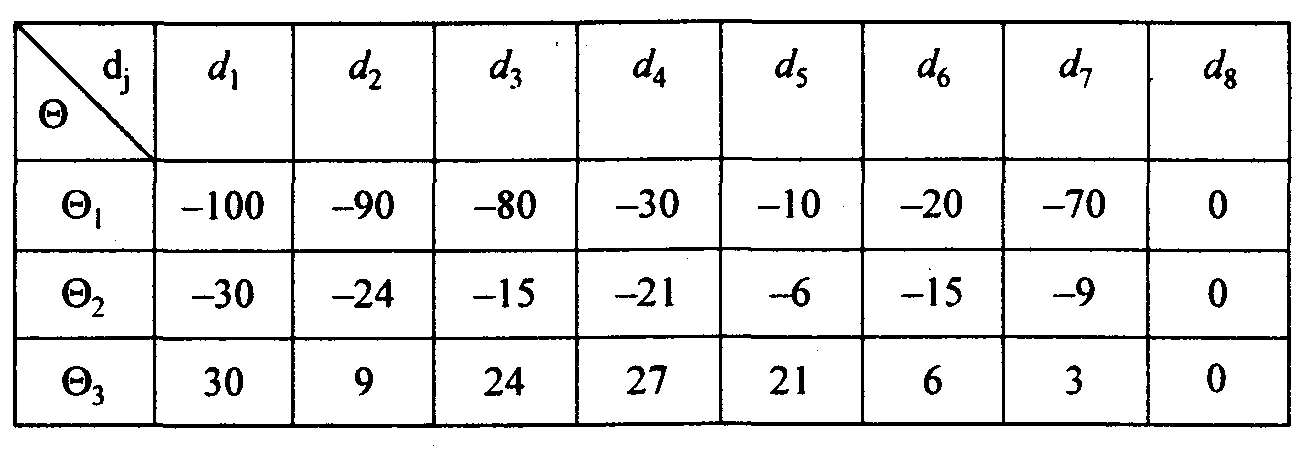


Таблица 7.4



Продолжая далее расчеты, получим таблицу значении риска. Матрица (табл. 7.5) имеет седловую точку, равную нулю. Но это решение нельзя отнести к разумной стратегии. С учетом чрезмерной осторожности всегда предполагается принятие ре­шения *a2* - не разрабатывать месторождение, не инвестируя - не рискуешь, но и прибыли не получишь.

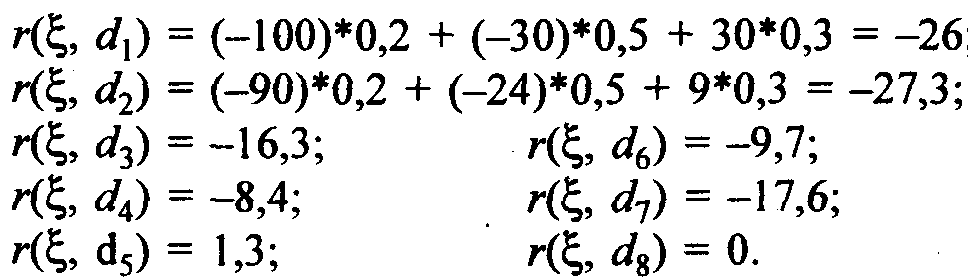
Таблица 7.5



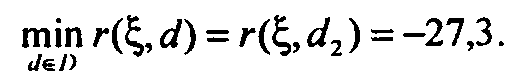
Оптимальной стратегией статистика, представляющего инве­стиционную организацию, будет байесовская функция решения, которую можно оценить с использованием функции распределе­ния вероятностей залегания серы на разной глубине, полученной на основе полных, достаточно обширных геологических иссле­дований и равной: *P*(Θ1) *=* 0,2; *P(*Θ2*) =* 0,5; *P(*Θ3*)* = 0,3.

С учетом априорного распределения *r*(ξ, *d)* можно опреде­лить оптимальную байесовскую функцию, минимизируя риски.

Для этого вычислим все восемь значений и возьмем мини­мальное из них:



Из полученных данных заключаем, что



Итак, оптимальной байесовской стратегией статистика в ста­тистической игре (Ω, *D, R),* которая моделирует эксплуатацию месторождений, будет функция решения *d2,* в которой *d2(x1) = a1; d2(x2)=a1; d2(x3)=a2.*

Вывод. Инвестиции оправдывают затраты и могут дать при­быль 27,3 тыс. руб., если дополнительные исследования дали результат *x1* - малая глубина или *х2 -* средняя глубина залегания серы.

Только в случае, если геологические исследования дадут результаты *x3* (в среднем глубокое залегание), нужно принять решение *а2*: в связи с экономической неэффективностью разра­ботки месторождения воздержаться от его инвестирования.

Глава 8 ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

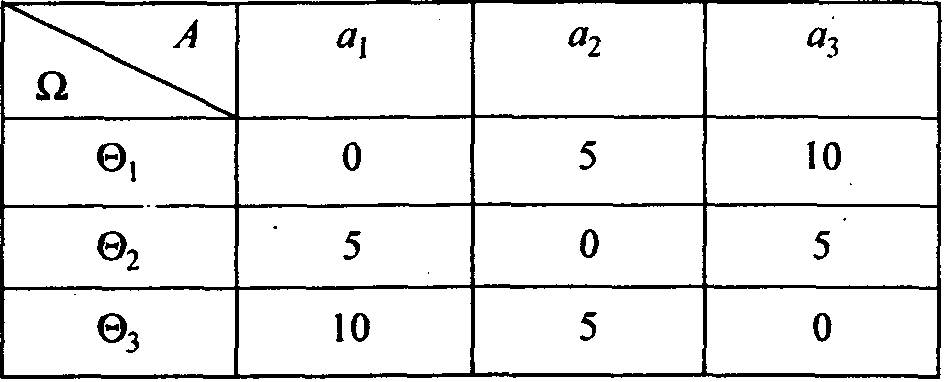
8.1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАРШРУТОВ ГОРОДСКОГО ТРАНСПОРТА

**Задача** 8.1. Выбор трассы новой автобусной линии в городе. Построен за городом новый жилой микрорайон, который нужно связать с центром города. Имеем исходную стратегическую игру *(*Ω*,A,L).* Статистик пришел к выводу, что линию можно провести до пункта *А1,* или *А2,* или *А3.* Решение *А = {а1, а2, а3},* где *a1*, означает проведение трассы до *А1*, *а2 -* до *А2, а3 -* до *А3,* причем *А1* и *А3* находятся в разных концах города. Множеством состоя­ний природы Ω являются Θ1, Θ2, Θ3 - состояния, когда большин­ство жителей микрорайона работает соответственно в окрестнос­ти пункта *А1,* пункта *А2* и пункта *А3,* находящегося в самом центре города.

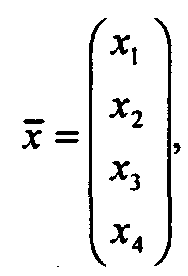
Если принятое решение провести трассу не будет удовлетво­рять нужды жителей микрорайона, то транспортное предприя­тие понесет потери. Потери будут максимальными при ошибоч­ном решении проложить трассу к пункту *А3* вместо *А1* или на­оборот.

Решение. Функция *L(*Θ*, а)* потерь характеризуется матри­цей (табл. 8.1).

Таблица 8.1



Преобразуем стратегическую игру (Ω, *A, L)* в статистичес­кую (Ω, *D, R)* при учете информации о действительном состоя­нии природы. Для этого проводится выборочный опрос жителей микрорайона. Результаты этого опроса образуют вектор

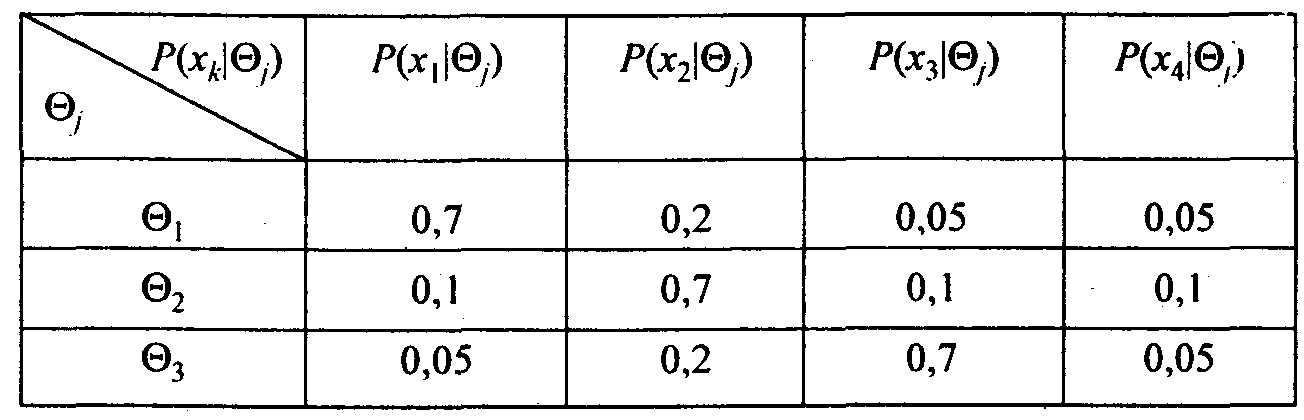


где *x1, х2, х3*, - доля от общего числа опрошенных (не менее 50 %), которые предлагают строительство трассы до пунктов *А1, А2, A3* соответственно;

*x*4 — любое из трех направлений не получило решающего количества голосов.

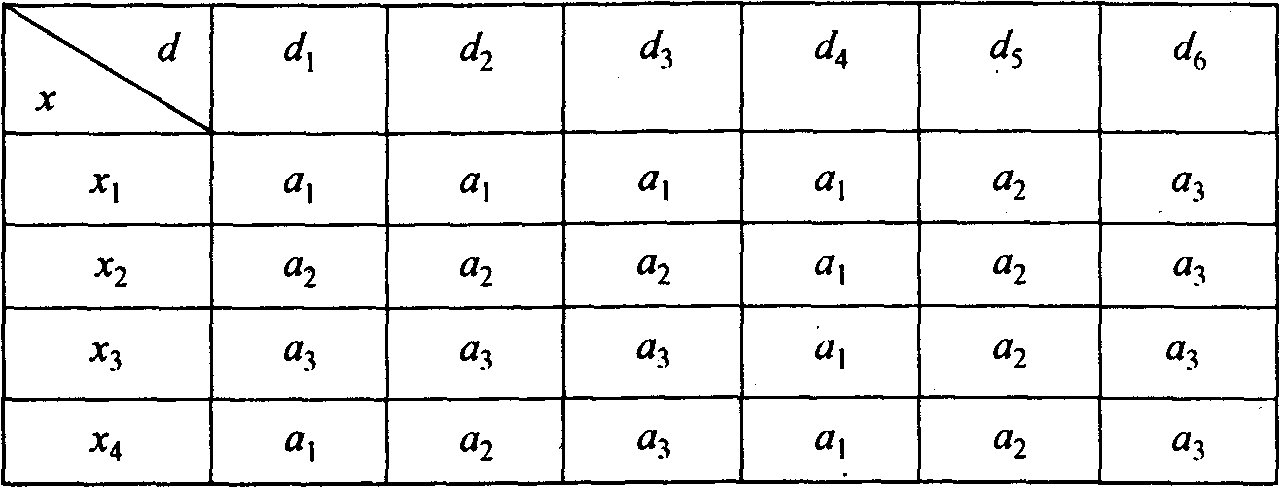
Действительные данные результата опроса показали следую­щие вероятности рекомендаций жителей (табл. 8.2) в зависимо­сти от состояний природы Θ.

Таблица 8.2



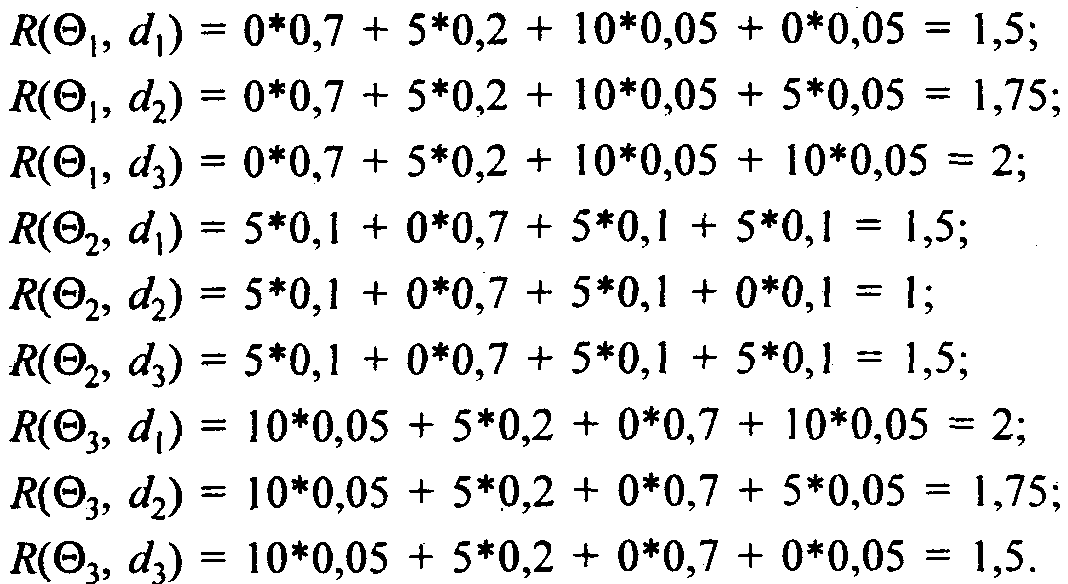
В результате опроса получаем условные вероятности *P(x1|*Θ1*) =* *P(x2|*Θ2*) = P(x3|*Θ3*)* = 0,7. Пусть *d(x) = а -* нерандомизированная функция решения, преобразующая множество *Х* результатов эк­сперимента в множество решений. Множество *D* нерандомизи­рованных решений при наличии четырех результатов экспери­мента и трех возможных решений будет иметь 34 = 81 различ­ную функцию решений статистика в статистической игре с при­родой (Ω, *D, R}.* Из них мы ограничимся шестью допустимыми функциями: *d1, d2, ... , d6* (табл. 8.3).

Таблица 8.3



Какие же решения не вошли в допустимые? Недопустимые функции решения — это все функции *d*∈*D,* которые не ставят в соответствие хотя бы одному из результатов *x1, x2, x3* решение *а1, а2, a3* потому, что для этих функции значе­ние риска *R(*Θ*, d)* будет всюду большим по сравнению с други­ми функциями решений. Результат *х4* при этом во внимание не принимается, поскольку он не отражает конструктивного пред­ложения.

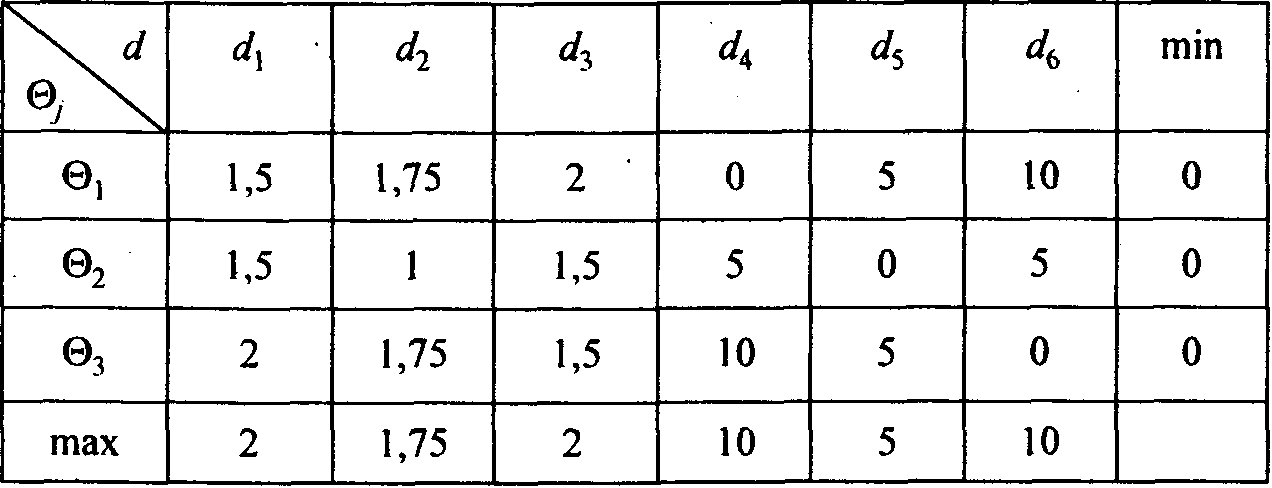
Учтем полученные условные вероятности и, зная значения функций потерь, вычислим математические ожидания функций потерь, т. е. получим функции риска для допустимых функций решений:



Из табл. 8.3 видно, что вне зависимости от *х1, х2 х3, х4* реше­ние *d*4 будет соответствовать решению *а1, d5*→*a2, d6*→*a3.*

Объединим все полученные решения в табл. 8.4 и выпишем минимальные значения функции риска по строке и максималь­ные значения - по столбцу.

Таблица 8.4



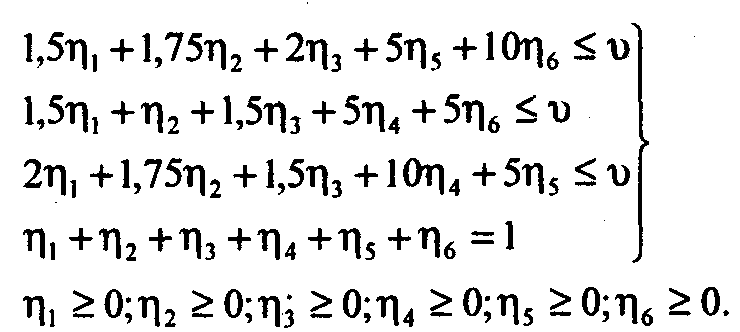
Таким образом, как показывает табл. 8.4, среди нерандо­мизированных функций решений нет минимаксной функции: *v1*=0<*v*2=1,75. Следовательно, минимаксную функцию реше­ния надо искать во множестве *D\** рандомизированных функций δ.

В данной статистической игре (Ω, *D, R)* в качестве оптималь­ной нужно принять минимаксную функцию решения.

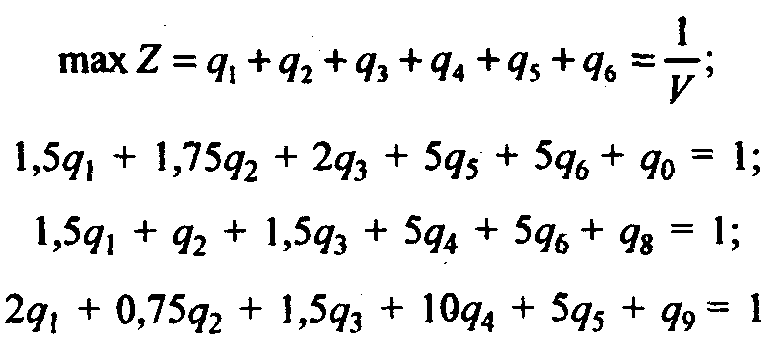
Для того чтобы найти рандомизированную минимаксную функцию решения δ0, следует обратиться к линейному програм­мированию *(см.* приложение).

Пусть δ - распределение вероятностей на множестве неран­домизированных функций решения *d.* Обозначим это распреде­ление η1 = *P(d1),* η2 = *P(d2), ... ,* η6 = *P(d6).* Теперь обозначим через υ цену расширенной статистической игры (Ω, *D\*, R)* при рандо­мизации функций решений и запишем в терминах линейного про­граммирования задачу статистика, который решает ее в интере­сах транспортного предприятия.

Для этого воспользуемся данными табл. 8.4:



Преобразуем переменные, разделив η на цену игры υ*>* 0*,* и введем дополнительные переменные *q7, q8, q9.* В результате пе­рейдем от неравенств к равенствам:



при *qj* > 0, *j =* .

Решим эту задачу линейного программирования симплексным методом (техника решения известна и здесь не излагается) и получим базисное оптимальное решение:

*q1* = *q3 =* 2/7; *q2* = *q4* = *q*5 = *q*б = 0.

Значит, *Z*max = *q1* + *q3 =* 2/7 +2/7 = 4/7.

Отсюда υ = l/Zmax = 2/7 = 1,75.

Перейдем к исходным переменным ηi = *qi* υ; *i =* , где ηi - вероятности, с которыми следует сочетать соответствующие нерандомизированные функции решения *di (i* = ). После пере­множения получим рандомизированные функции δ:



Итак, получена минимаксная рандомизированная функция ре­шения δ0 с распределением вероятностей: *P(d1)* = 1/2; *P(d3)* = 1/2. Как ее охарактеризовать? Это смешанная стратегия δ0 с одина­ковыми вероятностями чистых функций решения *d1* и *d3.* Они различаются только результатом статистического эксперимента.

Вывод. В задаче выбора транспортным предприятием наи­лучшей трассы маршрута новой автобусной линии получена оптимальная минимаксная функция решения:

• если по эксперименту с анкетами получен результат *х*1, или *x2,* или *x3,* то следует принять решение *а*1 или *а2,* или *a3* соответ­ственно;

• если получен результат *х4,* то нужно использовать механизм случайного выбора между решениями *а1* (трассу вести до *А1)* и *a3* (трассу вести до *А3)* с одинаковыми вероятностями, равными 0,5. Следует сделать одно важное замечание: в данном случае мы из расчетов получили одинаковые вероятности. (Это реше­ние не имеет ничего общего с принципом равновероятности, который иногда необоснованно применяется при отсутствии информации о возможных вероятностях событии.)

8.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

**Задача 8.2.** Планирование участков земли под картофель, проводимое методом Байеса. При наличии больших массивов земли в хозяйстве можно сознательно выбирать наиболее выгод­ные для урожая участки с учетом их влажности.

В период вегетации требуется определенное количество вла­ги. Если влажность будет излишняя, то часть посадочного мате­риала начнет гнить, урожай будет плохим.

Картофель в средней полосе сажают обычно в апреле. В это время трудно предвидеть, каким будет лето - сухим или влаж­ным. Фактически создается ситуация, которую можно считать игрой с природой. Мы должны принять решение, на каких уча­стках сажать картофель: на сухих или на тех, которые сами по себе являются влажными.

Введем условные обозначения:

Ω = {Θ1, Θ2} - множество состояний природы;

Θ1 - осадки выше нормы;

Θ2 – сухое лето (осадки не выше нормы);

*А =* {*а1, a2*} - множество решений статистика;

*а1* - посадку производить на участках с большой влажностью почвы;

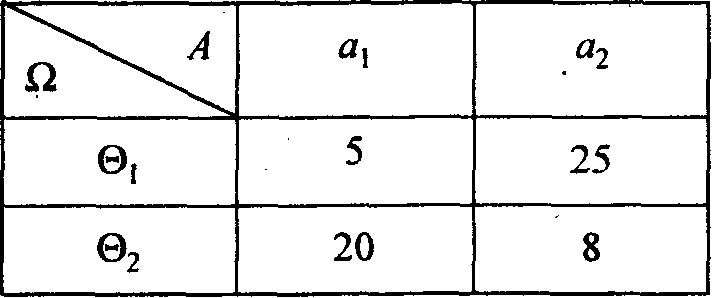
*a2* - посадку производить на сухих участках, так как ожида­ется влажное лето.

Известны средние урожаи в зависимости от принятого реше­ния и состояния природы. При этом наименьшие урожаи быва­ют, если осадки выше нормы (Θ1), и принимается решение *а1 -*сажать картофель на влажных участках.

Наибольшие урожаи в среднем бывают при решении *а2 -*сажать картофель на сухих участках и при состояниях природы Θ1 - влажное лето.

Прибыль на 1 га в тыс. руб. в среднем известна по многолет­ним результатам (табл. 8.5).

Таблица 8.5

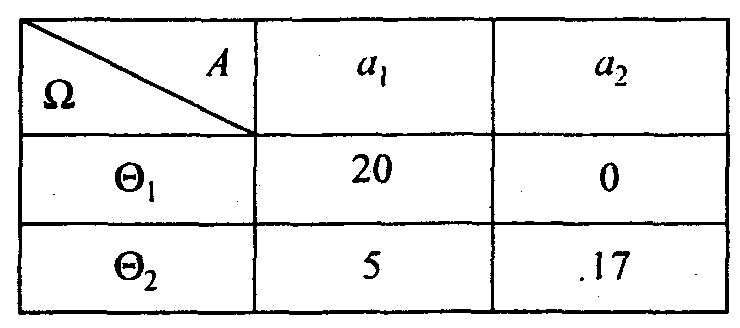


Итак, мы получили значения прибыли, а нас интересуют потери.

Решение. Представим функцию потерь *L*(Θ, *a*) в виде разно­сти между наибольшей прибылью и прибылью, которая может быть получена во всех остальных случаях (табл. 8.6).

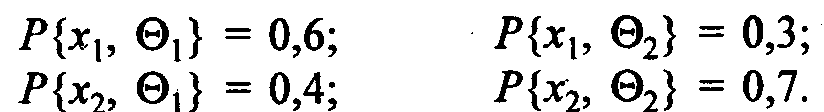
Статистик должен получить дополнительную информацию о состояниях природы при наблюдениях погоды в апреле, когда проводится посадка.

Таблица 8.6



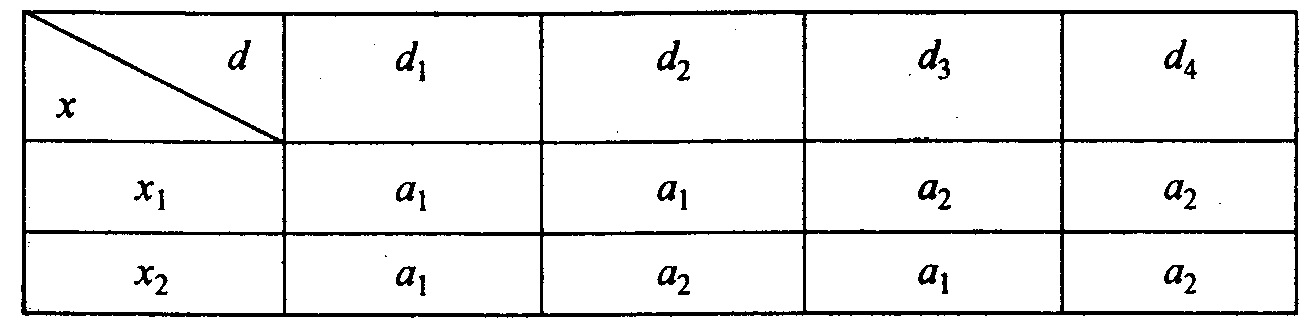
Пусть *X* = {*x1, x2*} *-* множество наблюдений, где *х1* и *х2 -* наблюдается большое и малое количество осадков соответ­ственно.

В зависимости от состояния природы Θ*j* и наблюдения пого­ды *хi* получим следующие значения условных распределений:

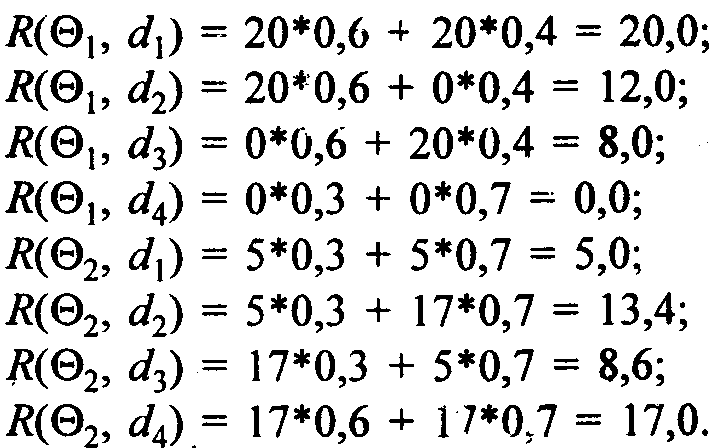


По двум решениям статистика *а1* и *а2* и результатам наблю­дения получаем четыре нерандомизированные функции решения *d* ∈ *D* (табл. 8.7).

Таблица 8.7

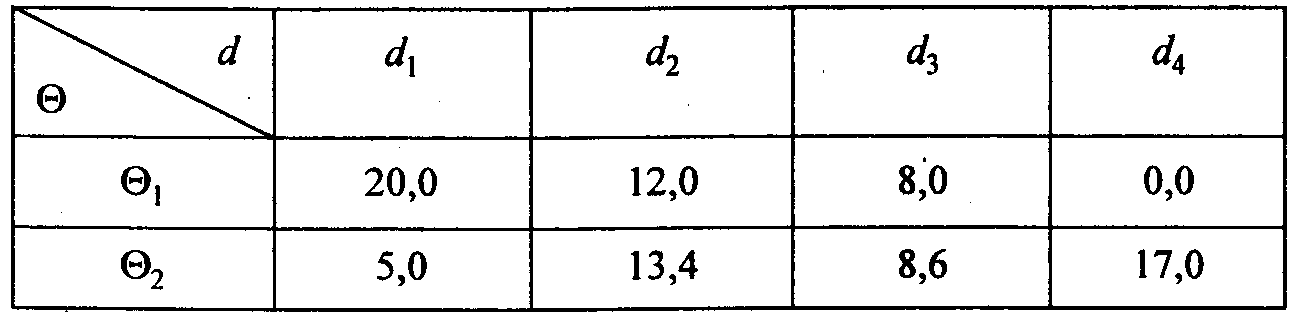


В статистической игре (Ω, *D, R*), которая посвящена выбору участков земли для посадки картофеля, определим функции риска *R*(Θ*, d*):



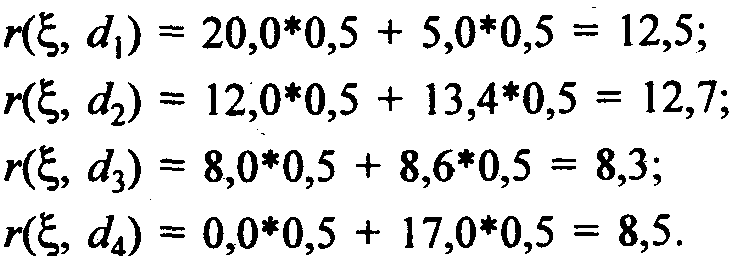
Полученные результаты функций риска *R(*Θ*, d)* представим в табл. 8.8, откуда видно, что функция решения *d2* доминирует над функцией *d3*. Следовательно, *d2* недопустима. Она не относится к подмножеству допустимых функций решения. Мы в этом убе­димся при расчете байесовских рисков.

Таблица 8.8



Будем считать, что в рассматриваемом районе априорное распределение состояний природы приводит к одинаковым шан­сам для сухого и влажного лета при исследовании состояний природы. Значит, *Р(*Θ1*) =* 0,5; *P(*Θ2*)* = 0,5.

Вычислим байесовский риск *r*(ξ, *d)*:



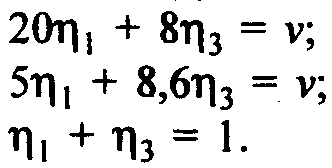
Минимальный байесовский риск наблюдается для функции *d3,* что не противоречит выводу, сделанному из табл. 8.8.

Вывод. Нерандомизированная функция решения *d3,* кото­рая включает решение для *d(x1) = а2* и *d(x2)* = *а1*, является бай­есовской функцией решения. Это оптимальная стратегия стати­стика: в рассматриваемых условиях, если весной много осадков (*x1*), принимается решение *а2* о том, что картофель нужно сажать на сухих участках земли *А2.* Если весной мало осадков (*x2*), при­нимается решение *а*1 о посадке картофеля на участках *А1,* где влажность почвы большая.

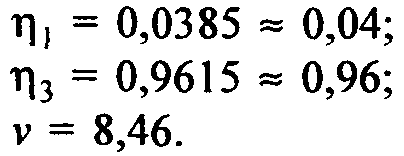
**Задача 8.3.** Планирование участков земли под посевы карто­феля методом линейного программирования. В задаче 8.2 мы получили оптимальное байесовское решение *d3.* Теперь попро­буем получить минимаксную, более осторожную стратегию.

Минимаксную функцию решения следует искать как смешан­ную стратегию среди рандомизированных функций решения, по­тому что матрица значений функций риска *R(*Θ*, d)* для нерандо­мизированных функций решения *d* ∈ *D* не имеет седловой точки.

Применяя метод линейного программирования и учитывая, что при оптимальном решении ограничения записываются как равенства, получаем из табл. 8.8 при ненулевых значениях η1 и η3 систему уравнений, которая включает цену игры *v*:



В результате решения этой системы уравнений получим:



Вывод. Минимаксная стратегия, еще более осторожная, чем оптимальная байесовская, для сельскохозяйственного предприя­тия заключается в использовании стратегий *d1* и *d3* с вероятно­стью соответственно 0,04 и 0,96.

Как это применять на практике?

Если весной наблюдается *х1* (большое количество осадков), то осуществляется случайный выбор с вероятностями 0,04 и 0,96 одного из решений: *а1* или *а2.* При наблюдении *х2* (малое коли­чество осадков весной) принимается решение *a1* о посадке кар­тофеля на влажных участках *А*1*.*

8.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ПАРТИИ ГОТОВЫХ ИЗДЕЛИЙ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕБОЕВ ПРОИЗВОДСТВА

На основе статистических планов приемки продукции всегда должно быть известно, сколько изделий следует случайным об­разом отобрать для статистического контроля и при каких усло­виях принимается решение о браковке или приемке партии.

Планов контроля имеется большое множество, однако благо­даря своей простоте часто применяется одноступенчатый стати­стический план премки *k|n,* где *п -* объем выборки; *k -* приемоч­ное число. Если из проверенных изделий число дефектных *Z* не будет превышать *k,* партия принимается. Значит, *k -* допустимое число дефектных в выборке из *п* изделий.

Представитель торгового предприятия при *Z* ≤ *k* считает партию хорошей и принимает ее на основе анализа выборки. Затем производитель покрывает стоимость каждого обнаружен­ного в переданной партии бракованного изделия путем замены, бесплатного ремонта или другим путем, означенным в договоре.

Если *Z* > *k,* то партия не принимается торговым предприяти­ем, а производитель осуществляет сплошную проверку партии и выявляет дефектные изделия.

**Задача 8.4.** Выбрать оптимальное критическое число *k.* Зна­чение *k* может быть определено при помощи статистической игры.

Введем обозначения:

*W (W*∈Ω), доля дефектных изделий, - состояние природы Θ;

*N -* объем партии изделии;

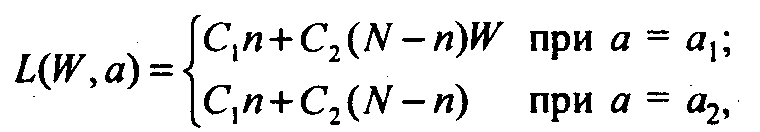
Ω = [0,1] - интервал от 0 до 1 с включением границ этого интервала;

*А =* {*а1, a2*}*-* множество решении статистика, где *а1, а2 -* ре­шения о приемке и о браковке партии со сплошным ее контро­лем соответственно;

*С1* - затраты на проверку одного изделия;

*С*2- сумма, уплачиваемая производителем за каждое обнару­женное дефектное изделие после приемки партии.

Функция потерь



где *С1п -* стоимость контроля выборочной совокупности изде­лии в процессе контроля;

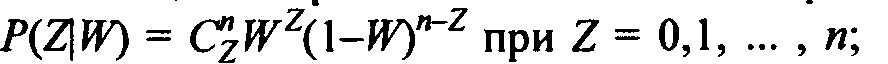
*C2(N–n)W -* сумма, выплачиваемая производителем за изделия, ког­да они окажутся дефектными после приемки;

*С1* *n* + *С2(N–п) -* затраты на сплошной контроль, если партия не была принята.

Итак, стратегическая игра будет иметь вид (Ω, *A, L).* Для оп­ределенности будем считать:

• торговая фирма оплачивает только исправные изделия, а дефектные заменяются исправными;

• при большой партии распределение вероятностей случай­ной переменной - числа дефектных изделий *Z* - подчиняется биномиальному закону. Функция вероятности зависит от действи­тельной доли бракованных изделий в принимаемой партии *W:*



*•* контролер наблюдает число *Z* в выборке объема *п;*

*• d(Z) = а -* статистическая нерандомизированная функция решения контролера. Контролер может принять одно из двух зна­чений: *a1* (принять) или *a2* (не принять партию).

Однако нам необходимо осуществить оптимальный выбор критического числа *k,* поэтому перейдем к статистической игре. В этой игре используем информацию о числе *Z* забракованных изделий в выборке объемом *п;* распределение *Z* зависит от со­стояния природы *W -* доли дефектных изделий.

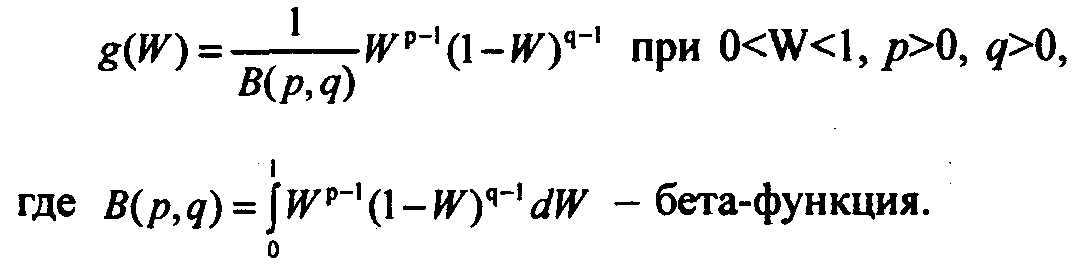
Решение. Для состояния природы *W* и статистической не­рандомизированной функции решения *d(Z),* определяющей кри­тическое число *k* при контроле партии готовых изделий, можно в статистической игре (Ω, *D, R)* найти функцию платежей или функцию риска *R(W, d):*



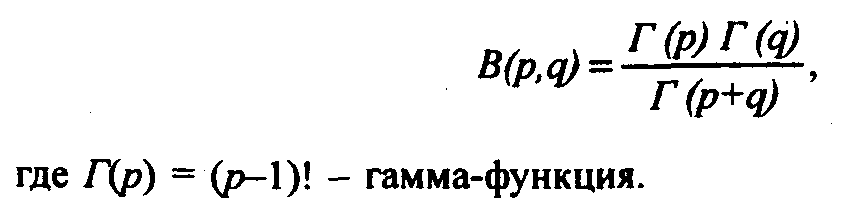
Это выражение можно раскрыть, используя биномиальное распределение.

Далее в качестве целевой функции *d(Z),* определяющей опти­мальное критическое число *k* выберем байесовскую нерандоми­зированную функцию. Пусть процесс производства является отлаженным, тогда доля дефектных изделий в партии *W* будет иметь бета-распределение, заданное на интервале [0,1]. В зави­симости от принятых параметров *р* и *q* можно определить апри­орное распределение доли дефектных изделий *W* в принимае­мых партиях.

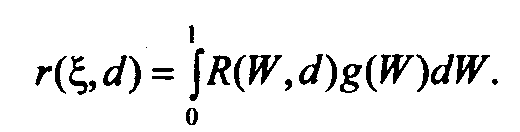
Таким образом, априорным распределением ξ состояний природы *W* принимается бета-распределение с функцией плот­ности



Известно, что существует связь между бета- и гамма-функ­циями:



Байесовский риск при этом распределении будет



Этот байесовский риск следует минимизировать относитель­но *k.* При известных размерах партии *N,* выборки *п,* затрат *C1* и *С2*, параметров априорного бета-распределения *р* и *q* байесовс­кий риск будет только функцией *k:*

*r(*ξ*, d) = f(k).*

Теперь нужно найти такое натуральное *k,* чтобы удовлетво­рялись неравенства

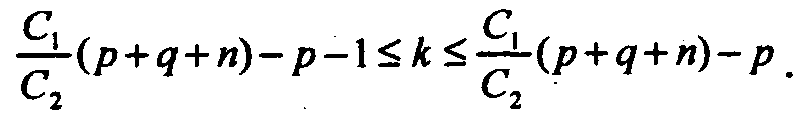
*f(k)*≤ *f(k+*1) и *f(k)*≤ *f(k–*1)

Рассмотрим неравенство *f(k)*≤ *f(k+*1), из которого следует, что *f(k+*1) – *f(k)* ≥ 0.

Используя связи между бета- и гамма-распределениями  и формулу гамма-функции Г(*n*) = (*n–*1)! , где *(n*–1)! - факториал, получим *f(k+*1) *– f(k)* ≥ 0*,* если *С2(р + k +* 1*)/(р + q + п) –* *С1*  ≤ 0.

Значит, *(p+k+*1*)* ≥ (*p+q+n)* и неравенство *f(k)* ≤ *f(k+* 1) выполняется при *k* ≥ *(p+q+n) - (p+*1)*.*

Обратимся к неравенству *f*(*k–*1*) – f(k)* ≥ 0 и найдем значе­ние *k,* для которого оно выполняется. При этом необходимо пре­образовать байесовский риск *r*(ξ, *d)* = *f(k),* после чего получаем неравенство *f*(*k–*1*) – f(k)* ≥ 0, которое выполняется, если *С2 р + k)/(p + q + п) – C1*  ≤ 0. Тогда *(p + k)* ≤  *(p+q+n),* т. е. при *k*≤ *(p+q+n) - p.* В этом случае байесовский риск примет минимальное значение для такого натурального числа *k,* которое удовлетворяет двойному неравенству:



Вывод. С помощью нерандомизированной байесовской фун­кции получаем решение при одноступенчатом статистическом плане приемки партии изделий, если известно распределение доли дефектных изделий в партии, т.е. априорное распределение со­стояний природы.

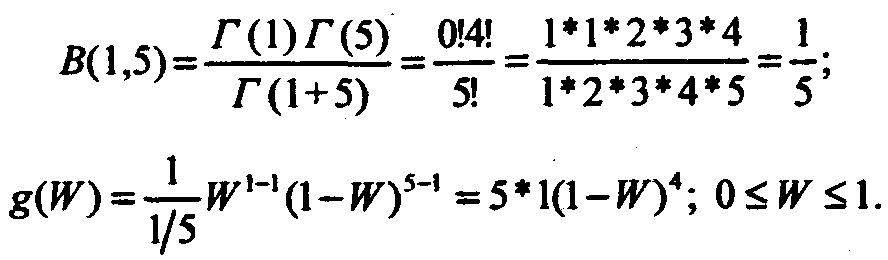
**Пример 8.1.** Производитель продает торговой фирме боль­шую *(п* = 100) партию изделий. По договору представитель тор­говой фирмы отбирает случайным образом *п* = 30 изделий. Кон­троль проводится по согласованной программе при одноступен­чатом плане. Стоимость проверки одного изделия *C1* = 180 руб., стоимость исправного изделия *С2* = 2 000 руб.

Требуется найти критическое число *k* при предположении, что доля дефектных изделий *W* подчинена бета-распределению.

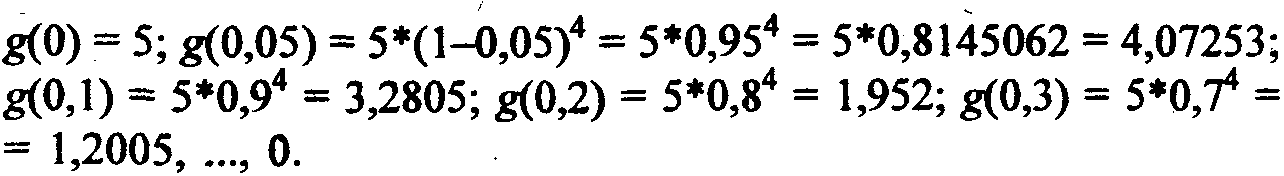
Предполагаем, что доля бракованных изделий при отлажен­ном производстве близка к нулю, поэтому *g(W)* будет иметь большое значение. Пусть аргументы бета-функции *B(p,q)* равны: *p=1, q=*5.

Нужно построить график распределения и определить мини­мальное число *k.* (Функция на графике при росте доли дефект­ных изделий будет быстро стремиться к нулю.)

Решение. Определим *B(p,q):*

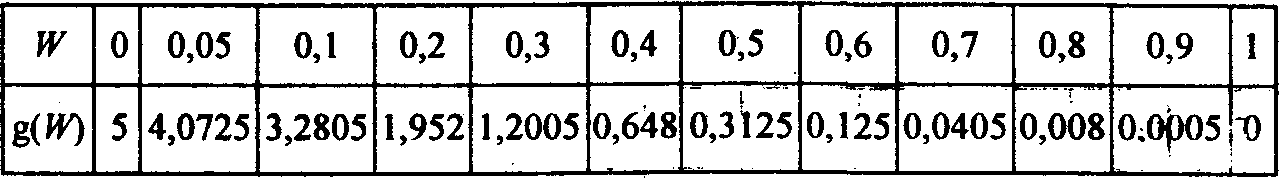


Используя значения доли *W* (пусть *W* = 0; 0,05; 0,1; 0,2; ...,0,9;1), получаем:

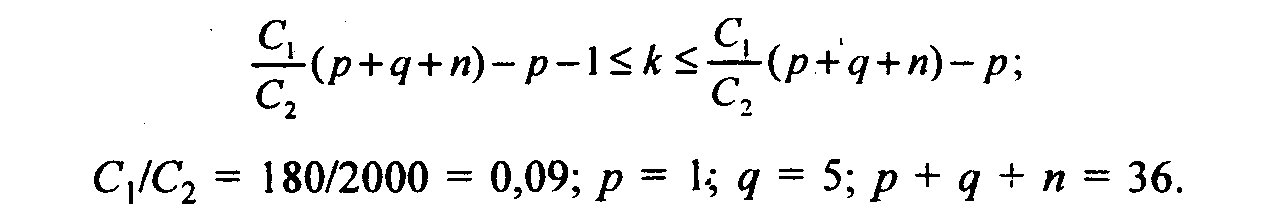


Составим таблицу распределения *g{W)* при значении аргумен­тов бета-функции: *q* = 5, *р =* 1 (табл. 8.9).

Таблица 8.9



Найдем критическое число *k* при *п* = 30, которое должно удовлетворять двойному неравенству:



Подставив численные значения параметров в эти неравенства, получаем *k:*

0,09\*36 - 1 - 1 ≤ *k* ≤ 0,09\*36 - 1.

1,24 ≤ *k* ≤ 2,24.

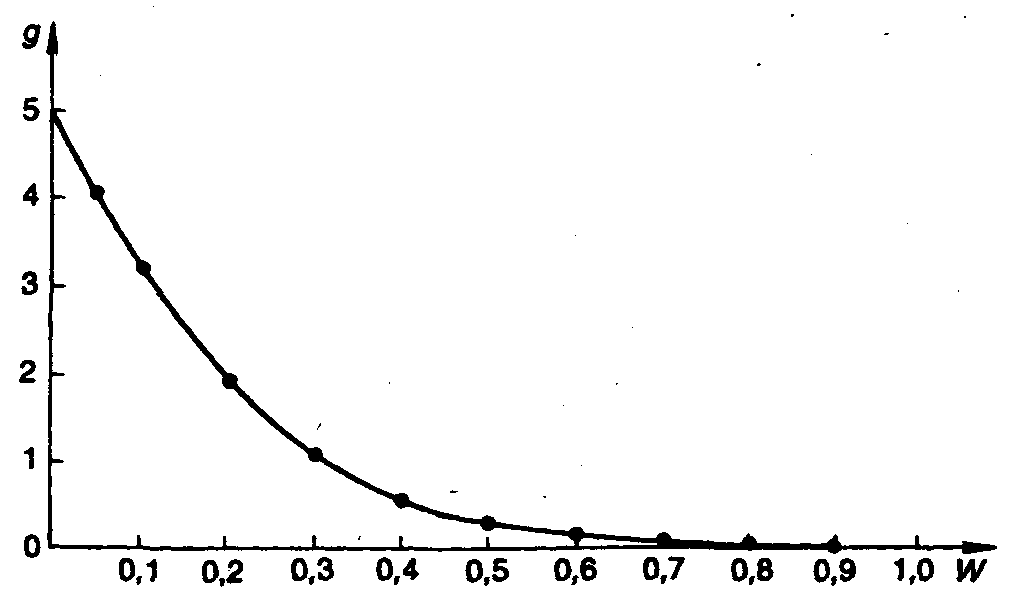
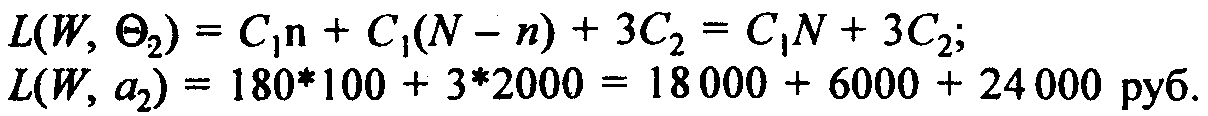
Следовательно, *k* = 2 .

Вывод. Критическое число равно 2, статистический план запишется (2|30).

Партия будет принята при числе бракованных в выборке из 30 изделий, не превышающем 2 шт. В противном случае партия будет забракована.

**Пример** **8.2.** Для условий примера 8.1 при плане (2|30) под­считать функцию потерь при: *k =* 3; *k = 2* и возможном отказе в принятой партии двух изделий из числа непроверенных *(N-n),* если *N* = 100; *k* = 2 и возможном возврате изделий из числа непроверенных, если *W=* 0,05.

Решение. Определим функцию потерь при *k =* 3, полагая согласно рис. 8.1, что *р =* 1:



*Рис. 8.1. Бета-распределение при р = 1,q=5*

Найдем функцию потерь при *k =* 2, когда партия была при­нята, но затем в торговой фирме было обнаружено 2 неисправ­ных изделия из числа непроверенных при сдаче:

*L(W,* *a1*) *=* 180*n* +2C2+2C2 = 180\*30 + 4\*2 000 = 5 400 + 8 000 = 13400 руб.

Вычислим функцию потерь при *k =* 2 и возможных отказах при *W* =0,05:

*L(W, а1)* = 180*n* + 2*C2* + *C2(N -* *n*) = 5 400 + 4 000 + 70\*0,050*C2* = 9400 + 3,5\*2000 = 16400 руб.

Поскольку 3,5 отказа невозможны (могут быть 3 или 4), до­бавляем (отнимаем) половину стоимости изделия и получаем:

*L(W, a1) =* (16400 *±* 1000) руб.

**Пример 8.3.** Оставим условия примера 8.1, но изменим объем выборки. Вместо *п =* 30 примем *п* = 45. Требуется определить критическое число *k,* если оно удовлетворяет двойному неравен­ству при нерандомизированной байесовской функции решения *r(*ξ*, d)=f(k):*

(*p+q+n) – p –* 1 ≤ *k* ≤(*p+q+n) – p.*

Решение. Запишем в принятых выше обозначениях усло­вия: *С1* = 180 руб.; *С*2 = 2 000 руб.; *р* = 1; *q =* 5, *п* = 45:

(*p+q+n*)=1+5+45=51; ==0,09.

Вычислим минимальное значение *k:*

0,09\*51 - 1 - 1 ≤ *k*  ≤ 0,09\*51 - 1;

2,59 ≤ *k* ≤ 3,59.

Таким образом, *k =* 3.

Вывод. Партия будет принята при *k* == 1, 2 или 3, а при *k* = 4 или более партия изделии будет забракована, 4 бракованных изделия будут заменены в выборке на годные, остальные 55 из 100 изделий будут проверены.

**Пример 8.4.** Оценить возможности сбоев производства из-за нарушения кооперированных поставок.

С помощью методов математического программирования можно составить оптимальный план производства. Однако этот план при нерегулярности кооперированных поставок смежников может быть фактически не реализован.

В данной ситуации возможно вычислить вероятность регу­лярности кооперированных поставок, что должно соответство­вать вероятности отсутствия сбоев производства.

Введем обозначения:

Θ (состояние природы) - вероятность отсутствия сбоев про­изводства Θ ∈ Ω = [0,1];

*А* = [0,1] - область решения статистика;

*а -* оценка вероятности Θ.

Примем в виде квадратичной функцию потерь *L(*Θ*, a*)= (Θ - *а*)2. Оценим вероятность Θ по информации за предыдущий месяц. Пусть *W* и *N -* события, заключающиеся в том, что в предыду­щем месяце были соответственно выполнены и не выполнены кооперированные поставки. Пространство выборок *Х= {W, N}; d -* нерандомизированная функция решения статистика, отобра­жающая пространство выборок *Х* в пространство решений *А.*

Решение. Функция решения может быть записана следую­щим образом:

*d(W) = a1; d(N) = a2; a1* ∈ *А*; *а2* ∈А.

Имеет место статистическая игра (Ω, *D, R).*

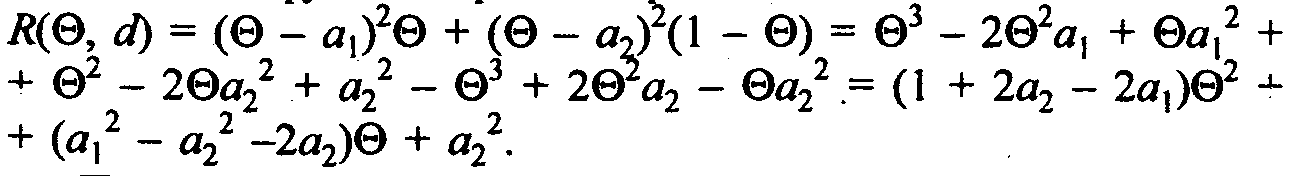
Опишем функцию риска:

*R(*Θ*, d)* = *ML(*Θ*, a).*

Считаем, что вероятности событии будут:

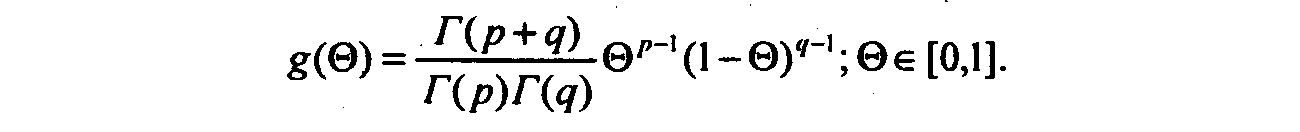
*P{W|*Θ*} =*Θ; *P{N|*Θ*}* = 1 - Θ.

Запишем функцию риска через *а* и Θ.

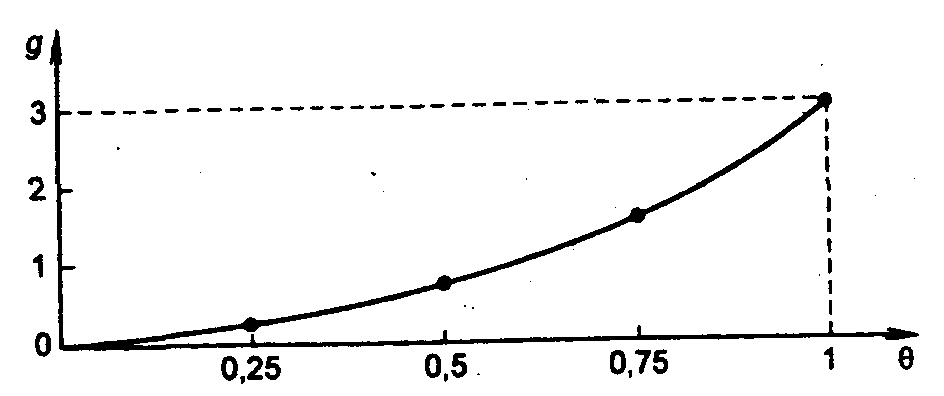


Предположим, что для ряда месяцев вероятность отсутствия сбоев кооперированных поставок - это случайная величина с бета-распределением, имеющим параметры *р > 0* и *q > 0.*

Функция плотности распределения вероятностей будет иметь вид:



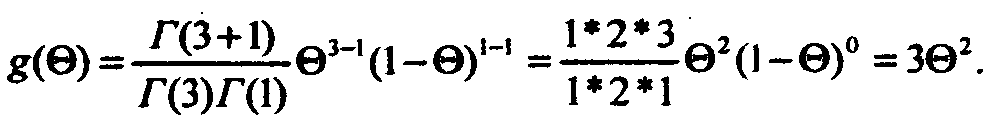
Вид данной функции плотности распределения вероятностей можно определить, если примем бета-распределение с парамет­рами *р =* 3 и *q* = 1 (рис. 8.2 и табл. 8.10).



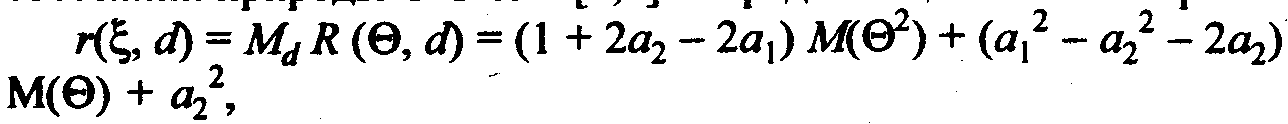
*Рис. 8.2. Бета-распределение при р =* 3*, q =*1

Таблица 8.10

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Θ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| *g(*Θ*)* | 0 | 0,1875 | 0,75 | 1,6875 | 3 |

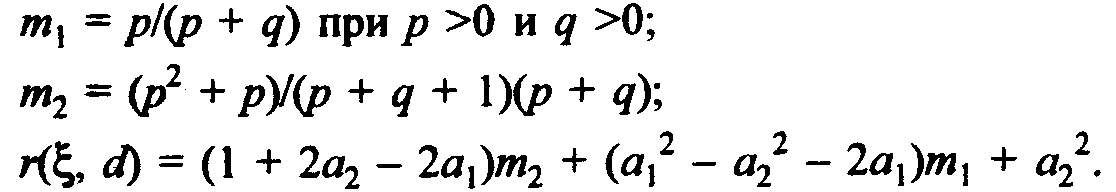
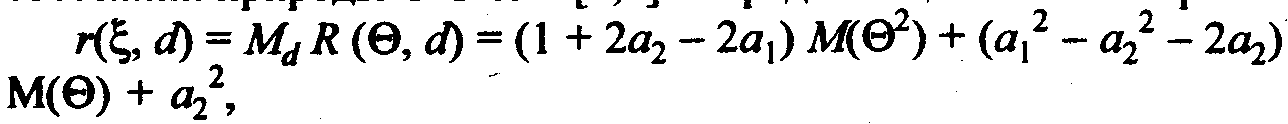


Бета-распределение является априорным распределением ξ состояний природы Θ∈Ω = [0,1]. Определим байесовский риск:

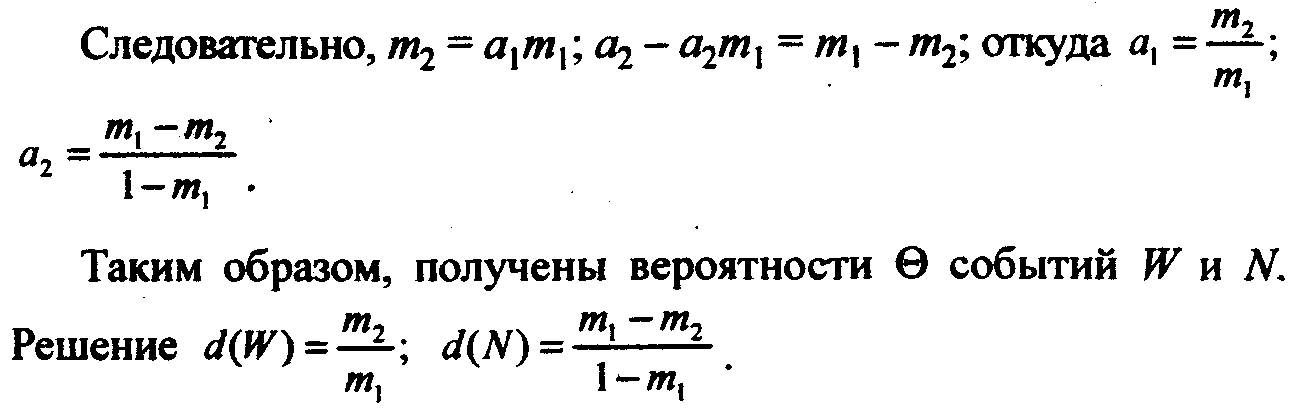
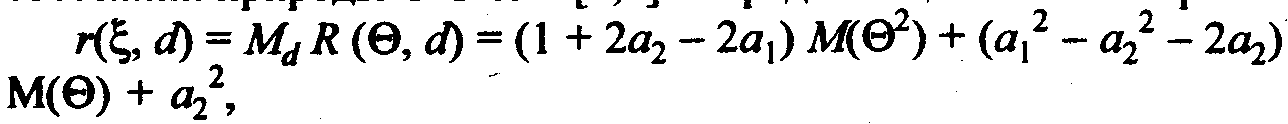
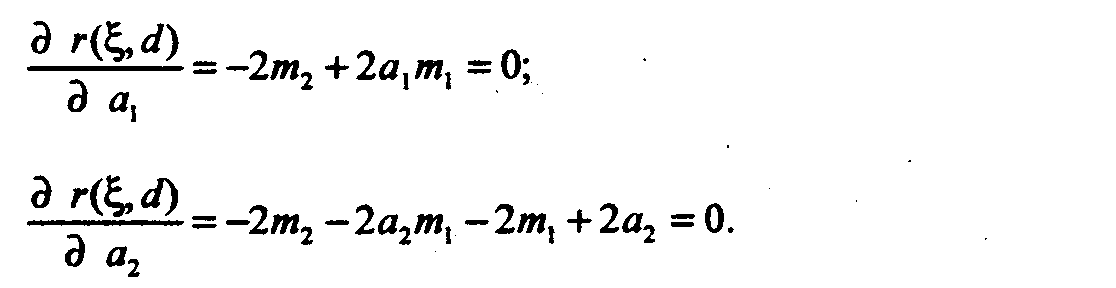
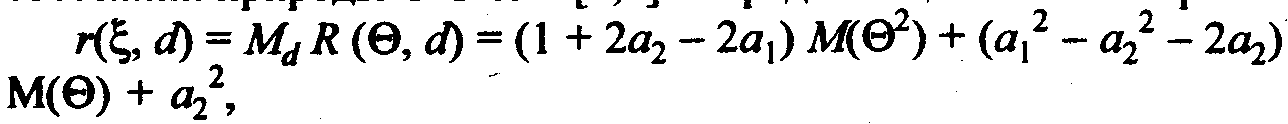


где *M*(Θ) = *m1*, и *М*(Θ2) *= т2 -* первый начальный и второй начальный момен­ты Θ при бета-распределении с функцией плот­ности *g(*Θ*)* соответственно.

Известно, что



Чтобы определить выражения для получения *a1* и *a2*, необхо­димо минимизировать байесовский риск для априорного распре­деления ξ. Продифференцируем *r*(ξ, *d)* по *a1* и *a2* и результаты приравняем к нулю:

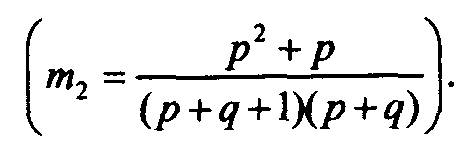
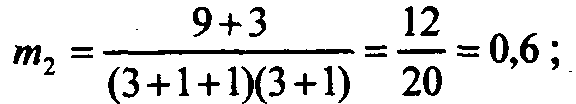


Вывод. Вероятность бесперебойной работы определится как *т2/т1,* если в прошлом месяце не было срывов кооперированных поставок. В противном случае вероятность бесперебойной рабо­ты предприятия будет равна (*т1 – m2)/(*1 *– m1*).

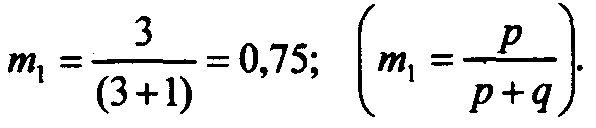
**Пример 8.5.** Оценить вероятность отсутствия перебоев в кооперированных поставках в данном месяце, если события *W* и *N* состоят соответственно в отсутствии и наличии срыва поста­вок в предыдущем месяце.

Априорное распределение - это бета-распределение с пара­метрами *р =* 3, *q =* 1. В данном распределении значения Θ, близ­кие к единице, имеют большую плотность, чем значения, близ­кие к нулю.

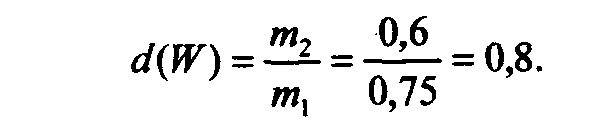
Решение*.* Определим



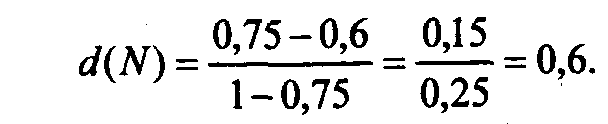
Вычислим



Определим вероятность бесперебойной работы предприятия при отсутствии срыва поставок в предыдущем месяце:



Оценим вероятность бесперебойной работы предприятия, если в прошлом месяце было событие *N -* срыв кооперированных поставок:



Выводы. Вероятность бесперебойной работы предприятия в данном месяце при условии выполнения договорных обяза­тельств по кооперированным поставкам, если в прошлом месяце также не было срывов, равна 0,8.

Если же в прошлом месяце был срыв в кооперированных поставках, то вероятность бесперебойной работы предприятия снизится в этом месяце до 0,6.

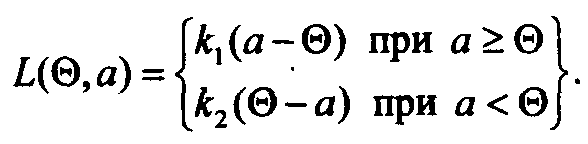
8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАПАСА ПРОДУКЦИИ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Пусть Θ - рыночный спрос на продукт торговой фирмы для фиксированного периода (день, неделя, месяц). Воспримем это как спрос игрока 1. Этот спрос может быть любым действитель­ным положительным числом. Область состояний Ω = [0, ∞]. Про­даваемый продукт оценивается, например, в килограммах и мо­жет заказываться в любом количестве. Нереализованный в дан­ном периоде продукт не может быть продан в следующем пери­оде, так как теряет за время хранения свои потребительские качества. Значение Θ∈Ω заранее неизвестно.

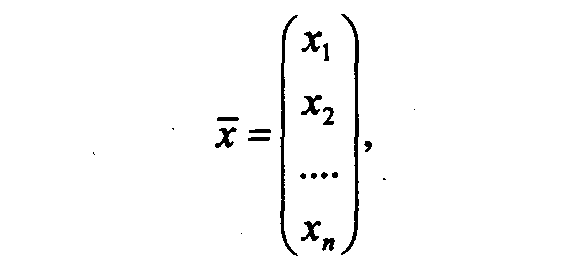
Введем обозначения: *а -* запас продукта на некоторый пери­од. Следовательно, считаем, что множество решений фирмы *А* = [0, ∞]; *а*∈*А -* конкретное решение фирмы (игрока 2), при­нимаемое в статистической игре с природой, которая определяет действительный спрос Θ на продукт; *L*(Θ, *a*) - функция потерь. Она является функцией платежей в исходной стратегической игре (Ω, *A, L); k1 -* себестоимость + дополнительные затраты на хра­нение 1 кг продукта, который не был продан в установленное время, так как спрос на него оказался меньше прогнозируемого;

*k*2- потеря прибыли на 1 кг продукта, обусловленная отсутстви­ем товара, спрос на который превысил заказанное количество.

Принимая указанные обозначения, запишем кусочно-линей­ную функцию потерь фирмы:



Стратегическую игру (Ω, *A, L)* можно преобразовать в стати­стическую, если получить дополнительную статистическую ин­формацию о спросе на продукт Θ∈Ω. Действительный спрос по периодам представлен заказчиком. Это вектор



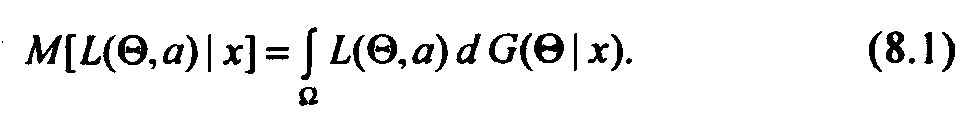
который в различные периоды времени представляет разные размеры спроса. Пусть *а = d(x) -* статистическая нерандомизи­рованная функция решения. Значение функции, определяющей оптимальное решение *а* об уровне запаса, найдем с помощью байесовской функции решения.

Известна функция действительного спроса на товар, соответ­ствующего статистическому наблюдению, т. е. *.*

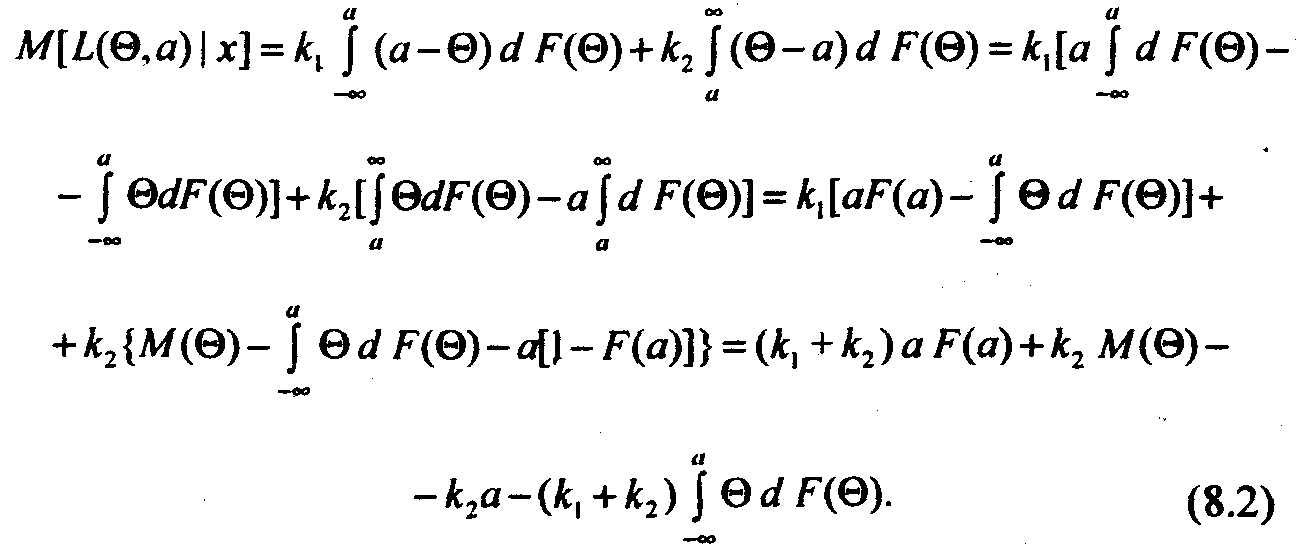
Функцию априорного наблюдения *G*(Θ|) распределения спро­са (состояний природы) обозначим *F(*Θ*).*

Имеет место теорема: «Если, решая задачу, поставленную в форме статистической игры, статистик (игрок 2) провел экспе­римент, наблюдая случайную величину *Х с* функцией условного распределения *G*(Θ|) или [F(Θ)], и получил результат *х,* то не­случайная байесовская функция решения относительно некото­рого априорного распределения ξ состояний природы равна *а* = *d(x),* где *а* ∈ *А -* решение, минимизирующее ожидаемое зна­чение функции потерь *L*(Θ, *а*) в условном апостериорном рас­пределении состояний природы, заданном функцией распреде­ления *G*(Θ| *x)».*

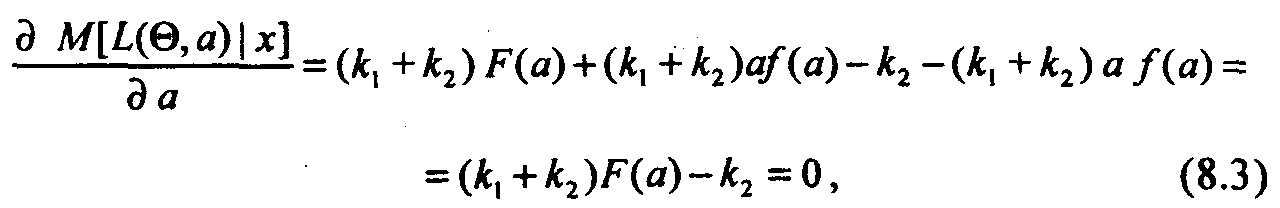
Согласно данной теореме нужно минимизировать математи­ческое ожидание



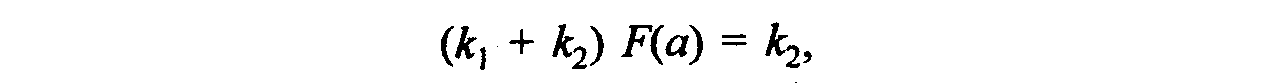
С использованием формулы (8.1) можно определить матема­тическое ожидание при апостериорном распределении спроса Θ:



Минимизируя математическое ожидание функции потерь (8.2) относительно о, получим:



где *f(a) -* плотность в точке *а* апостериорного распределения спроса. В соответствии с необходимым условием (8.3) получим урав­нение



откуда



Итак, с помощью байесовской функции получено выражение для оптимального запаса. Оно равно числу *а0,* удовлетворяюще­му равенству



где *F(a0)* -функция апостериорного распределения спроса Θ на про­дукт.

Результат (8.4) с учетом (8.5) означает, что для *a0* в распределении спроса Θ должно выполняться условие . Значит, *a0* должно быть квантилем порядка  апостериорного распределения спроса Θ.

Для вычисления оптимального запаса *а0* данного продукта на определенный период времени нужно:

1. Знать параметры *k1* и *k2,* входящие в функцию потерь *L(*Θ*, a).*

2. На основе статистических наблюдений получить апосте­риорное распределение спроса на товар.

3. С помощью функции этого распределения определить квантиль порядка .

Если, в частности, *k1* = *k2,* то оптимальный уровень запаса *a0* будет соответствовать равенству *F(a0) = *.Другими словами, оп­тимальный уровень запаса представляет собой медиану в апос­териорном распределении спроса Θ.

Распределение близко к нормальному *N(M, δ*), где *М -* мате­матическое ожидание, *δ* - среднее квадратичное отклонение.

Значение *a0* (или квантиль порядка ) можно определить по таблице нормированного нормального распределения.

Иногда распределение не относится ни к одному из извест­ных исследователю законов распределения, тогда с помощью графика функции распределения спроса нужно определить квантиль порядка . Рассмотрим, как это делается на практике.

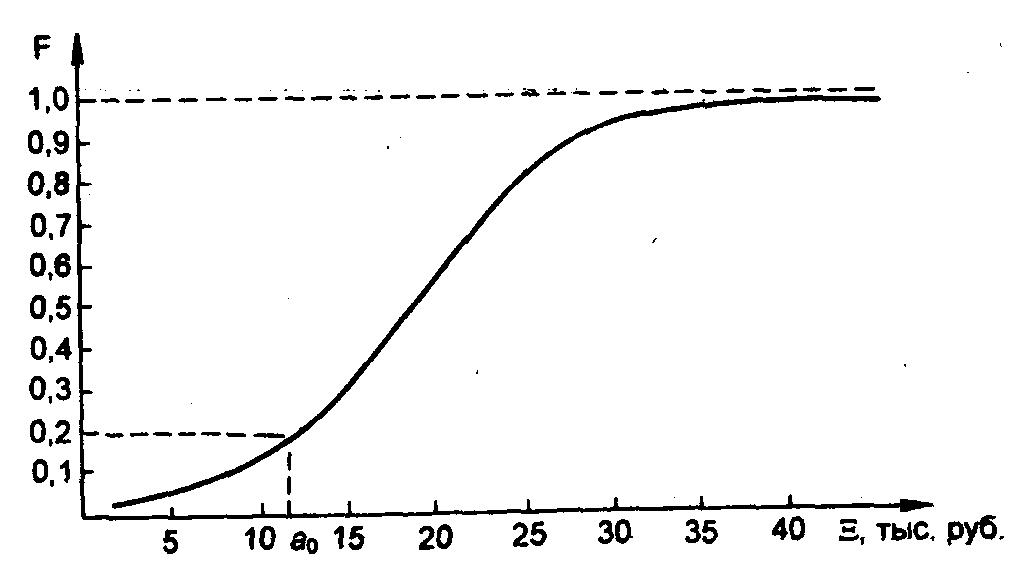
**Пример 8.6.** Требуется определить оптимальное значение за­паса товара. Известно: *k1 =* 0,8; *k2 =* 0,2; распределение спроса Θ.

Решение. Представим распределение дневного спроса на товар, полученное по данным наблюдения (табл. 8.11).

Таблица 8.11

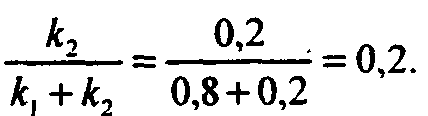
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Доход, тыс. руб. | Частота | Накопленная частота |
| 0-5 | 0,03 | 0,03 |
| 5-10 | 0,07 | 0,10 |
| 10-15 | 0,10 | 0,20 |
| 15-20 | 0,20 | 0,40 |
| 20-25 | 0,25 | 0,65 |
| 25-30 | 0,25 | 0,90 |
| . 30-35 | 0,08 | 0,98 |
| 35-40 | 0,02 | 1,00 |

По табл. 8.11 строим график распределения спроса на товар (рис. 8.3).



*Рис. 8.3. Определение квантиля распределения*

Рассчитаем квантиль распределения:



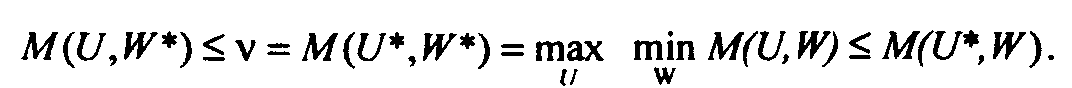
По квантилю, равному 0,2 (см. рис. 8.3), определяем *a0 =* 12,3 тыс. руб. Это стоимостное выражение искомого оптимального запаса продукции торговой фирмы, равное 12,3 тыс. руб.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СВЯЗЬ МАТРИЧНЫХ ИГР С ЛИНЕЙНЫМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ИГР). ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

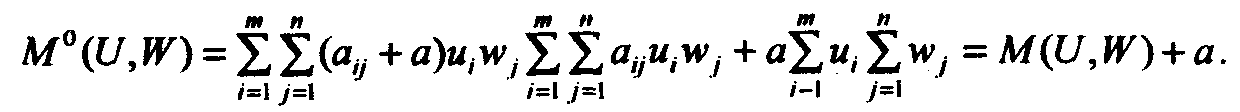
Первоначально развитие теории стратегических матричных игр осуществлялось параллельно и независимо от линейного программирования. Позже было установлено, что стратегичес­кая матричная игра может быть сведена к паре двойственных задач линейного программирования. Решив одну из них, полу­чаем оптимальные стратегии игрока 1; решив другую, получа­ем оптимальные стратегии игрока 2. Математическое соответ­ствие между стратегическими матричными играми и линейным программированием было установлено Дж. Б. Данцигом, сфор­мулировавшим и доказавшим в 1951 г. основную теорему тео­рии игр [23].

**Теорема.** Каждая матричная игра с нулевой суммой всегда имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. существуют такое число *v* и такие стратегии *U\** и *W\** игроков 1 и 2 соответственно, что выполняются неравенства:



Поясним смысл доказываемых неравенств: если игрок 1 от­клоняется от своей оптимальной стратегии, то его выигрыш не увеличивается по сравнению с ценой игры; если от своей опти­мальной стратегии отклоняется игрок 2, то по сравнению с це­ной игры его проигрыш не уменьшается.

**Доказательство.** Пусть матрица игры равна *A* =  . Всегда можно считать, что все коэффициенты *аij* > 0. Если это не так, то предположим, что наименьший из всех отрицательных коэффициентов есть *а0* < 0. Тогда увеличим все элементы платежной матрицы на произвольное положительное число *а > – а0 .* Функция выигрыша при этом окажется равной



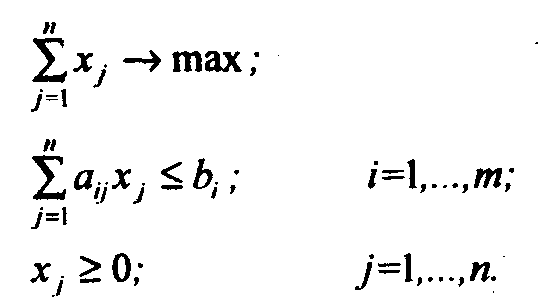
Из этого следует, что от увеличения всех элементов матрицы *A* =  на величину *a* цена игры увеличивается на эту величи­ну, причем оптимальные смешанные стратегии не изменяются.

Для определения среднего оптимального выигрыша игрока 1, соответствующего первоначальной платежной матрице, необхо­димо из найденной цены игры вычесть величину *а.*

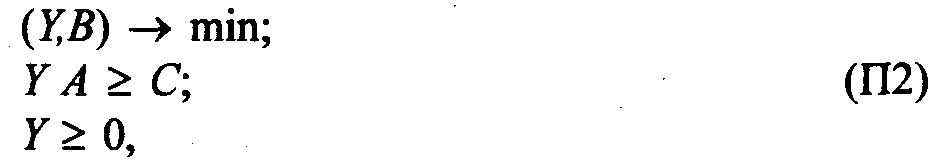
Рассмотрим теперь пару двойственных задач линейного про­граммирования с матрицей условий *A* =  (*aij* > 0), совпадаю­щей с платежной матрицей игры. Введем вектор ограничений прямой задачи *В* = (1, 1, ... , 1)*T*, состоящий из *т* единиц (это вектор-столбец, для удобства записи представленный в виде транспонированной строки. *Т -* символ транспонирования мат­рицы), и вектор-строку коэффициентов линейной формы или функционала *С* = (1, 1,..., 1), состоящий из *п* элементов. Тогда в векторно-матричной форме соответствующая задача линей­ного программирования может быть записана следующим образом:



где *Х-* вектор искомых переменных задачи (П1). То же в скалярной форме:

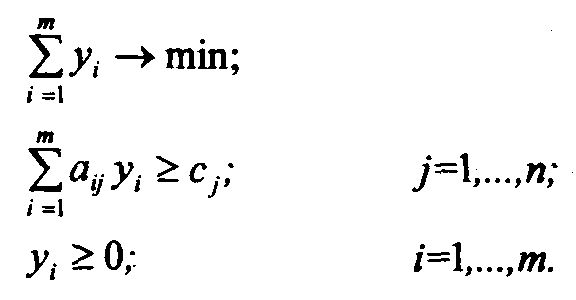


Двойственная задача к задаче линейного программирования (П1) может быть записана следующим образом:



где *Y -* вектор искомых переменных задачи (П2).

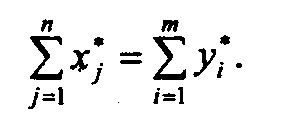
То же в скалярной форме:



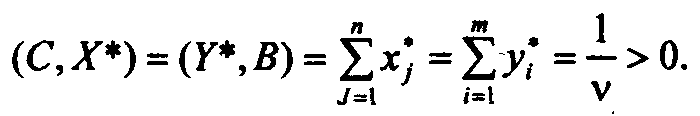
Все элементы матрицы *А* по предположению положительны, поэтому многогранные множества задач (П1) и (П2) ограниче­ны. Многогранник задачи (П1) не пуст, так как *Х =* 0 является допустимым планом. Следовательно, задача (П1), а с ней (по первой теореме двойственности) и задача (П2) разрешимы, и их функционалы в оптимальных планах совпадают (вторая теорема двойственности):

(*С, X\**) *=* (*У\* В*).

*С* учетом выбранных единичных векторов *С* и *В* получаем следующее соотношение:



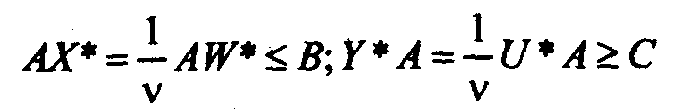
Из условия *YA* ≥ *С* следует, что *Y\*≠* 0*,* поэтому



Положительность значения *v* обеспечивается положительно­стью всех значений элементов платежной матрицы *А.*

Обозначим *U\* = vY\*, W\* = vX\*.* Поскольку *v*, *X\*, Y\** неотри­цательны, то *U\** ≥ 0*, W\** ≥ 0.

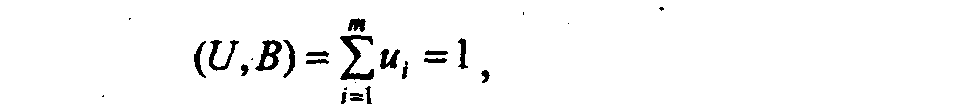
Кроме того, , , так как по определению это частоты использования смешанных стратегии, а сумма частот равна единице. По условиям прямой и двойственной задач *АХ* ≤ *В и YA* ≥ *С.* Оптимальные планы этих задач обозначим *X\** и *Y*\*, причем по предположению *X\** = *W\*/v , Y\*= U\*/v.* Поэтому



или



Умножим обе части неравенства (ПЗ) слева на произвольный w-мерный вектор *U* ≥0*,* для которого справедливо



где *В -* единичный вектор.

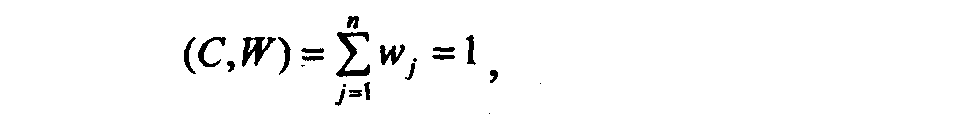
Получим:

*UAM\** ≥ *v(U,B)* = *v*,

т.е. имеет место неравенство

*UAM\** ≥ *v.* **(П5)**

Также умножим обе части неравенства (П4) справа на произ­вольный *n*-мерный вектор *W >* 0 , для которого справедливо



где *С* - единичный вектор.

Получим:

*U*\**AM* ≥ *v*(*C,W*) = *v*,

т.е. справедливо неравенство

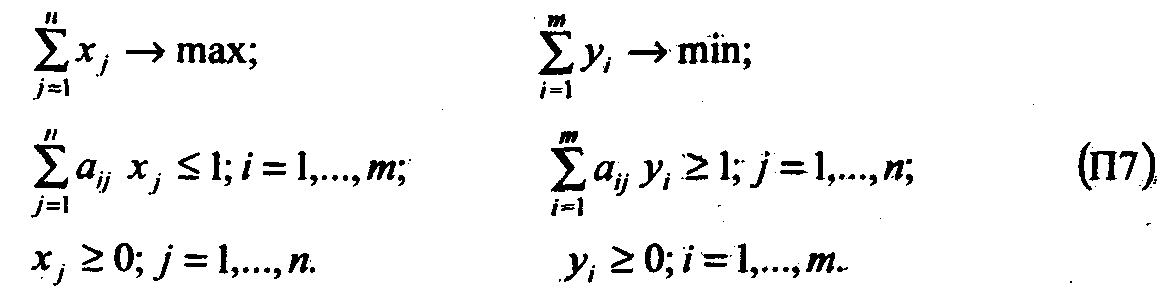
*U\*AM* ≥ *v.* **(П6)**

Сравнивая неравенства (П5) и (П6), приходим к соотноше­нию

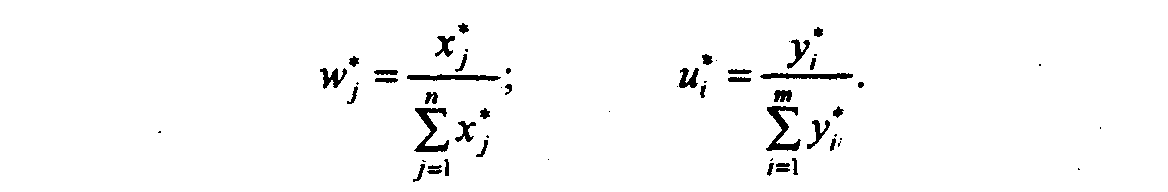
*UAW\** ≤ *v* ≤ *U\*AW,*

т.е. *U\** и *W\* -* оптимальные стратегии, а *v* - цена игры *с* платеж­ной матрицей *А,* что и требовалось доказать.

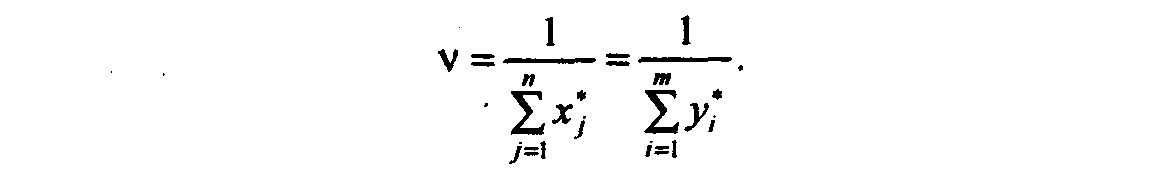
*Следствие (С1).* В процессе доказательства основной теоре­мы теории игр с платежной матрицей *A* =  (*aij* > 0) игре приведена в соответствие следующая пара задач линейного про­граммирования:



Составляющие оптимальных стратегий  и  игры связа­ны с компонентами  и  оптимальных планов двойственных задач линейного программирования (П7) формулами:



Цена игры

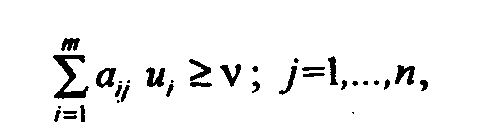


*Следствие (С2).* Вместо приведенной выше пары двойствен­ных задач линейного программирования (П7) иногда удобнее рассматривать другую пару задач, имеющих более ясный содер­жательный экономический смысл:

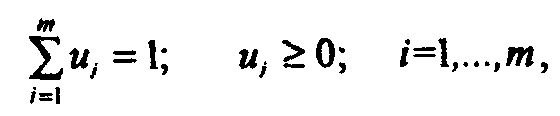
**1. Прямая задача.** Игрок 1 стремится увеличить цену игры:

*v* → mах **(П8)**

при условиях:



т. е. игрок 1 действует так, чтобы его средний выигрыш при использовании его стратегий с частотами *ui* для любой *j*-й стра­тегии игрока 2 был не меньше величины *v*, которую он стремит­ся увеличить;

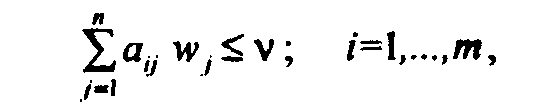


т. е. сумма частот применения стратегий игрока 1 равна единице.

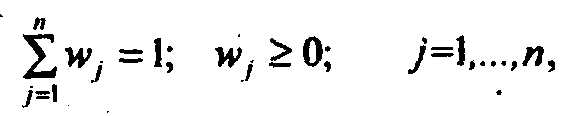
**2. Двойственная задача.** Игрок 2 стремится уменьшить свой проигрыш:

*v* → min **(П9)**

при условиях:



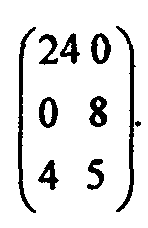
т. е. игрок 2 действует так, чтобы его средний проигрыш при использовании его стратегий с частотами *wj* для любой *i*-й стра­тегии игрока 1 не превышал величины *v*, которую он стремится уменьшить;



т. е. сумма частот применения стратегий игрока 2 равна единице.

В такой постановке каждая из задач (П8) и (П9) содержит на одно переменное (*v*) и на одно ограничение ( или ) больше, т.е. размерности прямой и двойственной задач соответ­ственно увеличиваются, что может сыграть определенную роль при ручном решении задач линейного программирования, но не имеет практического значения при решении задач линейного про­граммирования на ЭВМ.

**Пример решения задачи.** Решить аналитически (используя мажорирование) игру с платежной матрицей

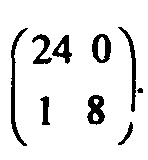


Решение. Если для первых двух строк матрицы взять ве­совые коэффициенты соответственно 0,25 и 0,75, то получим:

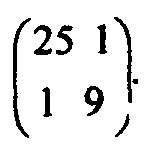
0,25 \* 24 + 0,75 \* 0 + 6 > 4;

0,25 \* 0 + 0,75 \* 8 = 6 > 4.

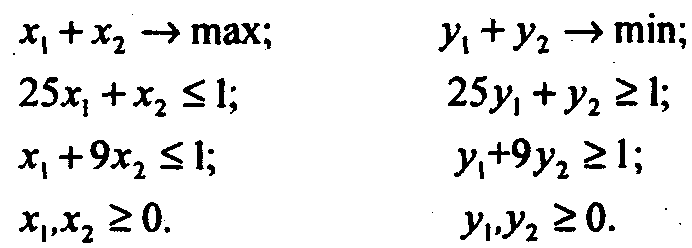
В итоге третья строка матрицы мажорируется выпуклой ли­нейной комбинацией первой и второй строк, поэтому третья строка вычеркивается, а матрица преобразуется к следующему виду:



В матрице есть два нуля. Для того чтобы все элементы мат­рицы стали больше нуля, прибавим к каждому элементу по еди­нице. Матрица примет вид:



Далее ставим и решаем пару задач (двойственных) линейно­го программирования:

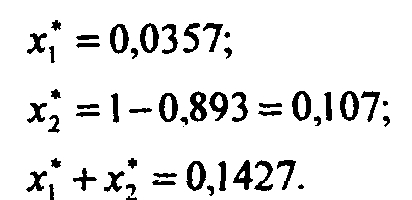


Для первой задачи (игрока 2) из условия угловой точки следует:

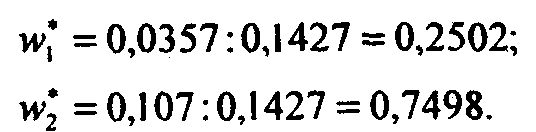
25*x1* + *x2* = 1;

*х1* + 9*x2* = 1,

откуда получаем оптимальное решение:



Находим оптимальные смешанные стратегии игрока 2:

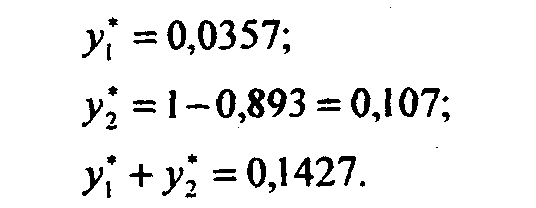


Для второй задачи (игрока 1) из условия угловой точки следует:

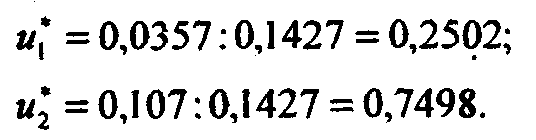
25*y1* + *y2* = 1;

*y1* + 9 *y2* = 1,

откуда оптимальное решение равно:



Оптимальными смешанными стратегиями игрока 1 будут:



Цена игры рассчитывается с учетом ее поправки на единицу:

*v* = 1:0,1427-1=6,008.

Ознакомившись теперь с основной теоремой теории игр, ме­тодом их сведения к паре двойственных задач линейного про­граммирования, мы видим, что, если в исходной матрице игры *А* в силу любых причин не произведены все возможные мажориро­вания строк и столбцов, это не скажется на результатах решения игры, но задачи линейного программирования получатся боль­шей размерности, чем потенциально они могли быть. Соответ­ственно в составе оптимальных смешанных стратегий игроков окажутся неактивные чистые стратегии.

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

**Вероятность случайного события -** основная категория в тео­рии вероятностей - положительное число, заключенное меж­ду нулем и единицей: 0 < *Р(А) <* 1, где *Р -* обозначение ве­роятности, *А -* случайное событие.

**Дискретные и непрерывные случайные величины** - основ­ные числовые показатели в теории вероятностей. Дискретная случайная величина может принимать конечное или беско­нечное счетное множество значений. Возможные значения не­прерывной случайной величины занимают некоторый интер­вал числовой оси (конечный или бесконечный).

**Дисперсия** - числовая характеристика степени разброса значе­ний случайной величины. Дисперсия постоянной величины равна нулю. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: *D(CX) = C2D(X),* где *D -* знак дисперсии; *С* — постоянная величина.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: *D(X + Y) = D (X) + D(Y).*

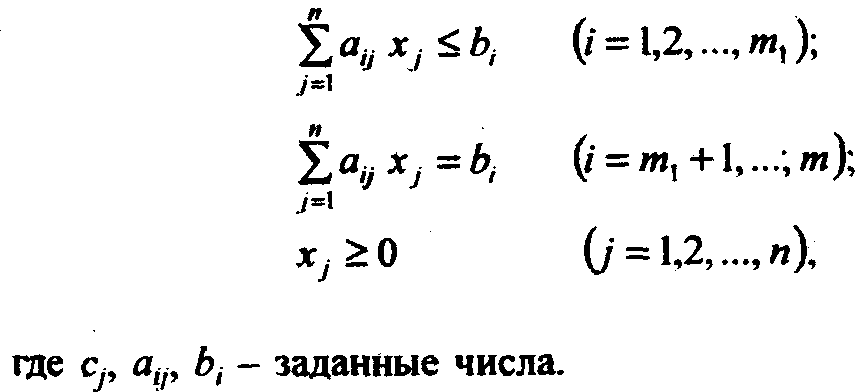
Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. Сумма посто­янной и случайной величин равна дисперсии случайной ве­личины. Дисперсия разности двух независимых величин рав­на сумме их дисперсий.

**Достоверное событие** - событие, в котором каждый элементар­ный исход испытания благоприятствует событию. Вероят­ность достоверного события равна 1.

**Закон распределения случайной величины** - соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями слу­чайной величины и соответствующими им вероятностями. Простейшей формой задания закона распределения дискрет­ной случайной величины *Х* является таблица, в которой пе­речислены возможные значения случайной величины и со­ответствующие им вероятности (ряд распределения). Для не­прерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения, так как она содержит бесконечное множество возможных значений, которые сплошь заполняют некоторый промежуток. Эти значения нельзя перечислить в какой-либо таблице. Каждое отдельное значение непрерывной случай­ной величины не обладает никакой отличной от нуля веро­ятностью.

**Линейное программирование** - раздел прикладной математи­ки, изучающий задачу отыскания минимума (максимума) ли­нейной функции многих переменных при линейных ограни­чениях в виде равенств или неравенств. Общую задачу ли­нейного программирования формулируют так:

найти минимум функции *п* переменных  при ограничениях:



Задача максимизации линейной функции сводится к задаче ее минимизации заменой знаков всех коэффициентов *сj* на противоположные.

**Математическое ожидание** - числовая характеристика случай­ной величины, определяющая ее среднее значение. Свойства: математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной; постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания; математическое ожидание произ­ведения двух независимых случайных величин равно произ­ведению их математических ожиданий: *M(ХY)* = *M(X)M(Y);* математическое ожидание суммы (разности) двух случай­ных величин равно сумме математических ожиданий сла­гаемых: *М(Х+ Y)* = *М(Х) + M(Y),* где *М -* знак математи­ческого ожидания; *М(Х) -* математическое ожидание слу­чайной величины *X.*

**Невозможное событие** - событие, которое не может произойти в результате испытания. Вероятность невозможного события равна 0.

**Независимое событие** - событие *В* не зависит от *А,* если появ­ление события *А* не изменяет вероятность события *В,* т.е. условная вероятность события *В* равна его безусловной веро­ятности: *РA(В)* = *Р(В)*. Если событие *В* не зависит от собы­тия *А,* то и событие *А* не зависит от события *В.* Это означает, что свойство независимости событий взаимно.

**Попарно-независимые события** - несколько событий, каждые два из которых независимы. Пусть *А, В, С* попарно независи­мы, тогда независимы *А* и *В, А* и *С, В* и *С.* Вероятность со­вместного появления нескольких событий, независимых в со­вокупности *(АВС),* равна произведению вероятностей этих событий: *Р(АВС) = Р(А)Р(В)Р(С).*

**Практически достоверное событие** - событие, вероятность которого не в точности равна единице, но очень близка к ней: *Р(А)* ≈ 1.

**Практически невозможное событие** - событие, вероятность которого не в точности равна нулю, но очень близка к нему: *Р(А)* ≈ 0.

Например, если парашют не раскрывается с вероятностью 0,01, - это недопустимо, а если поезд дальнего следования опоздает на 0,01 мин, можно считать, что поезд пришел вов­ремя.

**Предмет теории вероятностей -** изучение вероятностных зако­номерностей массовых однородных случайных событий.

**Противоположное событие** — событие *А* (не *А),* состоящее в непоявлении события *А.*

**Теорема умножения вероятностей** - инструмент для вычисле­ния вероятности совместного события: *Р(АВ) = Р(А)РA(В),* где *Р(АВ) —* вероятность совместного события; *Р(А) -* вероят­ность появления события *А; РA(В) -* вероятность появления события *В* при условии, что событие *А* уже наступило. Веро­ятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные веро­ятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились. В частности, для трех событий: *Р(АВС)* = *Р(А)РA(В) РAB(С).* Порядок, в котором рас­положены события, может быть любым.

**Теорема умножения независимых событий -** частный случай *теоремы умножения вероятностей.* Вероятность совместного наступления независимых событий *А* и *В* равна произведе­нию вероятностей этих событий: *Р(АВ)* = *Р(А)Р(В).*

**Функция распределения** (или интегральный закон распределе­ния) - функция *F(x),* определяющая для каждого значения *х* вероятность того, что случайная величина *Х* примет значе­ние, меньшее *х,* т.е. *F(x)* = *Р(Х < х).* Эта функция распреде­ления существует как для дискретных, так и для непрерыв­ных случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вальд А.* Последовательный анализ: Пер. с англ. - М.: Физмат-гиз, 1960.

2. *Вентцель Е. С., Овчаров А. А.* Теория вероятностей и ее инже­нерные приложения. - М.: Наука, 1988.

3. *Гольштейн Е. Г., ЮдинД. Б.* Новые направления в линейном про­граммировании. - М.: Сов. радио, 1966.

4. *Дубров А. М.* Последовательный анализ в статистической обра­ботке информации. - М.: Статистика, 1976.

5. *Дубров А. М.* Математико-статистическая оценка эффективности в экономических задачах. - М.: Финансы и статистика, 1982.

6. *Дубров А. М.* Статистические методы в инвестиционной дея­тельности // Рубин Ю. Б., Солдаткин В. И., Петраков Н. Я. Общая редакция. Инвестиционно-финансовый портфель. - М.: Совинтэк, 1993. - С. 163-176.

7. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математи­ческие методы в экономике. - М.: ДИС, 1997. - С. 245-267.

8. *Клейнер Г. Б.* Риски промышленных предприятий // Российский экономический журнал. - 1994. - № 5-6. - С. 85-92.

9. *Клейнер Г. Б., Тамбовцев В. Л., Качалов Р. М.* Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегии, безопасность. -М.: Экономика, 1997.

10. *Комарова Н. В., Гаврилова Л. В.* Фирма: стратегия и тактика управления рисками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 5. Экономика. - 1993. - Вып. 2 (12). - С. 92-95.

11. *Лагоша Б. А.* Об оценке эффективности инвестиционных про­ектов //Тез. докл. научной конференции «Организационные науки и про­блемы государственного регулирования рыночной экономики». - М.:

ЦЭМИ РАН, Международная академия организационных наук, 1996. -С. 75-77.

12. *Мак Кинси Дж.* Введение в теорию игр: Пер. с англ. - М.: Физматгиз, 1960.

13. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. - М.: Наука, 1970.

14. Основные методические положения оптимизации развития и размещения производства / Под. ред. академиков А. Г. Аганбегяна и Н. П. Федоренко. - М.: Наука, 1978.

15. *Ожегов С. И.* Словарь русского языка. - М.: Русский язык, 1981.

16. *Первозванский А. А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. - М.: Инфра-М, 1992.

17. *Самуэльсон П.* Экономика. Т. 1. - М.: МГП «Алгон», ВНИИСИ, 1992.

18. *Соколинская Н. Э.* Экономический риск в деятельности коммер­ческого банка. (Методы оценки и практика регулирования). - М.: Об­щество «Знание» РСФСР, 1991.

19. *Уилкс С.* Математическая статистика. - М.: Наука, 1967.

20. Хозяйственный риск и методы его измерения: Пер. с венг. / Т. Бочкаи, Д. Месена, Д. Мико, Е. Сеп, Э. Хусти. — М.: Экономика, 1979.

21. *Gren J.* Ocena jacosej wyrobow obiektow ze wzgledn na wielle wymagan. - Warszawa, 1970.

22. *Gren J.* Statystyczne i ich Zastosowania. Panstwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. - Warszawa, 1972.

23. *Dantzig G. B.* A proof of the equivalence of the programming and the game problem. Activity Analysis of Production and Allocation, ed. By Koopmans T. C., Cowles Commission Monograph, № 13, New York, Wiley, 1951. -P.330-335.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Безразличие к риску 73, 74

Безусловный денежный" эквива­лент (БДЭ) 50, 67

Величина страхования оптималь­ная 78, 80

Вероятность 13, 15, 25, 33, 57, 62, 65, 72, 81, 101, 112, 117, 157

Дерево решений 47, 48, 53

Дисперсия 13, 58

Задача линейного программиро­вания 19, 30, 36, 86, 90,158, 162

Игра антагонистическая 18, 108, 113

одношаговая 19

многошаговая 19

с природой 20, 38, 45, 64

с седловой точкой 22, 24, 26, 33, 37

статистическая 20, 108, 110, 111, 114, 123, 129, 136, 149, 153

стратегическая 16, 20, 38, 42, 113, 114, 123, 129, 153

Инвестиции 86, 88, 92, 99, 104

Индекс риска 86

Комбинация стратегий линейная выпуклая 33, 34

Коэффициент дисконтирования 93, 94, 97, 99, 103, 106

Критерий максимакса 42, 45

минимаксного риска (Сэвиджа) 43, 45

пессимизма-оптимизма (Гурвица) 43, 44, 45

Мажорирование (доминирова­ние) стратегий 32, 35, 39, 41, 164

Максимин 21, 22

Математическое ожидание 13, 26, 58, 101, 111, 113

Матрица выигрышей 41, 43, 47

платежная 17, 29, 32, 38, 40, 47, 51, 56, 60, 64

рисков 40, 43, 47

Минимакс 21, 22

Неопределенность 40, 42

Несклонность к риску 73, 74

Ожидаемая денежная оценка (ОДО)50**,** 52, 55,65, 67, 71, 74, 77

Полезность по Нейману - Моргенштерну 70, 71, 73, 76, 80

Планирование финансовое 86

Рандомизация 109, 112

Риск 10, 38, 40, 46, 59, 68, 71, 74, 76, 89, 109, 114, 115

Склонность к риску 44, 59, 73, 74, 76

Спрос на страхование 80, 82

Среднее квадратичное отклоне­ние 13, 59, 61

Стратегия активная 27, 29

игрока 17, 20, 158

оптимальная 24, 27, 29, 108

смешанная оптимальная *26,* 27, 29, 30

чистая оптимальная 23

Стоимость проекта чистая при­веденная 93, 96, 97,99

Теорема основная теории игр 158, 165

Теория игр 16

статистических решений 46

Точка седловая 20, 23

Функция рандомизированная 110, 136, 141

нерандомизированная 110, 124, 136, 140, 144, 149

потерь 111

решения байесовская 112, 114

риска 111, 112, 141

Цена игры 22, 26, 27, 29

чистая верхняя 21, 24

чистая нижняя 21, 24

Ценность ожидаемая точной информа­ции 55, 56

фирмы 96

Учебное пособие

Дубров Абрам Моисеевич

Лагоша Борис Александрович

Хрусталев Евгений Юрьевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ И БИЗНЕСЕ

Ведущий редактор Л.А. Табакова

Редактор А.М. Мжтормка

Художественный редактор Ю.И. Артюхов

Технический редактор Е.В. Кузьмина

Корректоры Т.М. Колоакова, Т.М. Васильева

Обложка художника Н.М. Биксеитеевж

Компьютерная верстка О.Е. Хрусталева

ИБ№3965

Лицензия ЛР № 010156 от 29.01.97

Подписано в печать 17.01.2000. Формат 60х88/16

Гарнитура «Таймс». Печать офсетная

усл.п.л. 10,8. Уч.-изд. л. 8.23

Тираж 4000экз. Заказ 325 «С» 031

Издательство «Финансы и статистика»

101000, Москва, ул. Покровка, 7

Телефон (095) 925-35-02, факс (095) 925-09-57

*E-mail:* mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

Великолукская городская типография

Комитета по средствам массовой информации и связям

с общественностью администрации Псковской области,

182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

Тел./факс: (811-53) 3-62-95

E-mail: VTL@MART.RU