**Математические методы исследования экономики**

Всегда и во всех сферах своей деятельности человек принимал решения. Важная область принятия решений связана с производством. Чем больше объем производства, тем труднее принять решение и, следовательно, легче допусить ошибку. Возниает естественный вопрос: нельзя ли во избежание таких ошибок использовать ЭВМ ?

Ответ на этот вопрос дает наука, называемая кибернетика. Кибернетика (произошло от греческого "kybernetike" - искусство управления) - наука об общих законах получения, хранения, передачи и переработки информации.

Важнейшей отраслю кибернетики является экономическая кибернетика - наука, занимающаяся приложением идей и методов кибернетики к экономическим системам.

Экономическая кибернетика использует совокупность методов исследования процессов управления в экономике, включая экономико-математические методы.

В настоящее время применение ЭВМ в управлении производством достигло больших масштабов. Однако, в большинстве случаев с помощью ЭВМ решают так называемые рутинные задачи, то есть задачи, связанные с обработкой различных данных, которые до применения ЭВМ решались так же, но вручную. Другой класс задач, которые могут быть решены с помощью ЭВМ - это задачи принятия решений. Чтобы использовать ЭВМ для принятия решений, необходимо составить математическую модель. Так ли необходимо применение ЭВМ при принятии решений ? Возможности человека достаточно разнообразны. Если их упорядочить, Так уж устроен человек, что того, чем он обладает, ему мало. И начинается бесконечный процесс увеличения его возможностей. Чтобы больше поднять, появляется одно из первых изобретений - рычаг, чтобы легче перемещать груз - колесо. В этих орудиях пока еще используется только энергия самого человека. Со временем начинается применение внешних источников энергии: пороха, пара, электричества, атомной энергии. Невозможно оценить, насколько используемая энергия внешних источников превышает сегодня физические возможности человека.

Что же касается умственных способностей человека, то, как говорится, каждый недоволен своим состоянием, но доволен своим умом. А можно ли сделать человека умнее, чем он есть ? Чтобы ответить на этот вопрос, следует уточнить, что вся интеллектуальная деятельность человека может быть подразделена на формализуемую и неформализуемую.

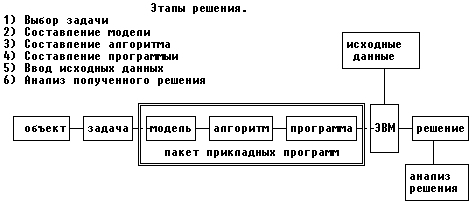
Формализуемой называют такую деятельность, которую выполняют по определенным правилам. Например, выполнение расчетов, поиск в справочниках, графическаие работы, несомненно могут быть поручены ЭВМ. И как все, что может делать ЭВМ, она это делает лучше, то есть быстрее и качественнее, чем человек.

Неформализуемой называют такую деятельность, которая происходит с применением каких-либо неизвестныхы нам правил. Мышление, соображение, интуиция, здравый смысл - мы пока еще не знаем, что это такое, и естественно, все это нельзя поручить ЭВМ, хотя бы потому, что мы просто не знаем, что поручать, какую задачу поставить перед ЭВМ.

Разновидностью умственной деятельности является принятие решений.

Принято считать, что принятие решений относится к неформализуемой деятельности. Однако это не всегда так. С одной стороны, мы не знаем, как мы принимаем решение. И объяснеие одних слов с помощью других типа "принимаем решение с помощью здравого смысла" ничего не дает. С другой стороны, значительное число задач принятия решений может быть формализовано. Одним из видов задач принятия решений, которые могут быть формализованы, являются задачи принятия оптимальных решений, или задачи оптимизации. Решение задачи оптимизации производится с помощью математических моделей и применения вычислительной техники.

Современные ЭВМ отвечают самым высоким требованиям. Они способны выполнять миллионы операций в секунду, в их памяти могут быть все необходимые сведения, комбинация дисплей-клавиатура обеспечивает диалог человека и ЭВМ. Однако не следует смешивать успехи в создании ЭВМ с достижениями в области их применения. По сути, все что может ЭВМ - это по заданной человеком программе обеспечить преобразование исходных данных в результат. Надо четко себе представлять, что ЭВМ решения не принимает и принимать не может. Решение может принимать только человек-руководитель, наделенный для этого определенными правами. Но для грамотного руководителя ЭВМ является великолным помощником, способным выработать и предложить набор самых различных вариантов решений. А из этого набора человек выберет тот вариант который с его точки зрения окажется более пригодным. Конечно, далеко не все задачи принятия решений можно решить с помощью ЭВМ. Тем не менее, даже если решение задачи на ЭВМ и не заканчивается полным успехом, то все равно оказывается полезным, так как способствует более глубокому пониманию этой задачи и более строгой ее постановке.



Чтобы человеку принять решение без ЭВМ, зачастую ничего не надо. Подумал и решил. Человек, хорошо или плохо, решает все возникающие перед ним задачи. Правда никаких гарантий правильности при этом нет. ЭВМ же никаких решений не принимает, а только помогает найти варианты решений. Данный процесс состоит из следующих этапов:

**1) Выбор задачи.**

Решение задачи, особенно достаточно сложной - достаточно трудное дело, требующее много времени. И если задача выбрана неудачно, то это может привести к потере времени и разочарованию в применении ЭВМ для принятия решений. Каким же основным требованиям должна удовлетворять задача ?

А. Должно существовать как минимум один вариант ее решения, ведь если вариантов решения нет, значит выбирать не из чего.

Б. Надо четко знать, в каком смысле искомое решение должно быть наилучшим, ведь если мы не знаем чего хотим, ЭВМ помочь нам выбрать наилучшее решение не сможет.

Выбор задачи завершается ее содержательной постановкой. Необходимо четко сформулировать задачу на обычном языке, выделить цель исследования, указать ограничения , поставить основные вопросы на которые мы хотим получить ответы в результате решения задачи.

Здесь следует выделить наиболее существенные черты экономического объекта, важнейшие зависимости, которые мы хотим учесть при построении модели. Формируются некоторые гипотезы развитиця объекта исследования, изучаются выделеные зависимости и соотношения. Когда выбирается задача и производится ее содержательная постановка, приходится иметь дело со специалистами в предметной области (инженерами, технологами, конструкторами и. т. д. ). Эти специалисты, как правило, прекрасно знают свой предмет, но не всегда имеют представление о том, что требуется для решения задачи на ЭВМ. Поэтому, содержательная постановка задачи зачастую оказывается перенасыщенной сведениями, которые совершенно излишни для работы на ЭВМ.

**2) Составление модели**

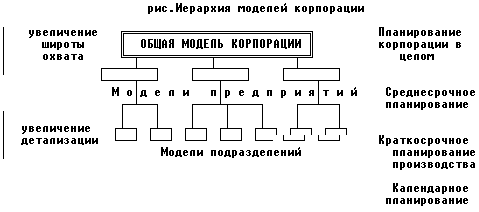
Под экономико-математической моделью понимается математическое описание исследуемого экономического объекта или процесса, при котором экономические закономерности выражены в абстрактном виде с помощью математических соотношений.

Основные принципы составления модели сводятся к следующим двум концепциям:

1. При формулировании задачи необходимо достаточно широко охватить моделируемое явление. В противном случае модель не даст глобального оптимума и не будет отражать суть дела. Опасность состоит в том, что оптимизация одной части может осуществляться за счет других и в ущерб общей организации.

2. Модель должна быть настолько проста, насколько это возможно. Модель должна быть такова, чтобы ее можно было оценить, проверить и понять, а результаты полученные из модели должны быть ясны как ее создателю, так и лицу, принимающему решение. На практике эти концепции часто вступают в конфликт, прежде всего из-за того, что в сбор и ввод данных, проверку ошибок и интерпретацию результатов включается человеческий элемент, что ограничивает размеры модели, которая может быть проанализирована удовлетворительно. Размеры модели используются как лимитирующий фактор, и если мы хотим увеличить широту охвата, то приходится уменьшать детализацию и наоборот.

Введем понятие иерархии моделей, гдте широта охвата увеличивается, а детализация уменьшается по мере того, как мы переходим на более высокие уровни иерархии. На более высоких уровнях в свою очередь формируются ограничения и цели для более низких уровней.



При построении модели горизонт планирования в основном увеличивается с ростом иерархии. Если модель долгосрочного планирования всей корпорации может содержать моло каждодневных текущих деталей то модель планирования производства отдельного подразделеия состоит в основном из таких деталей.

При формулировании задачи необходимо учитывать следующие три аспекта:

1) Исследуемые факторы: Цели исследования определены довольно свободно и в большой степени зависят от того, что включено в модель. В этом отношении Легче инженерам, так как исследуемые факторы у них обычно стандартны, а целевая функция выражается в терминах максимума дохода, минимума затрат или , возможно, минимума потребления какого-нибудь ресурса. В то же время социологи, к примеру, обычно задаются целью "общественной полезности" или в этом роде и оказываются в сложном положении, когда им приходится приписывать определенную "полезность" различным действиям, выражая ее в математической форме.

2) Физические границы: Пространственные аспекты исследования требуют детального рассмотрения. Если производство сосредоточено более чем в одной точке, то необходимо учесть в модели соответствующие распределительные процессы. Эти процессы могут включать складирование, транспортировку, а также задачи календарного планирования иещения оборудования.

3) Временные границы: Временные аспекты исследования приводят к сдерьезной дилемме. Обычно горизонт планирования хорошо известен, но надо сделать выбор: либо моделировать систему в динамике, с тем, чтобы получить временные графики, либо моделировать статическое функционирование в определенный момент времени. Если моделируется динамический (многоэтапный) процесс, то размеры модели увеличиваются соответственно числу рассматриваемых приодов времени (этапов). Такие модели обычно идейно просты, так что основная трудность заключается скорее в возможности решить задачу на ЭВМ за приемлемое время, чем в умении интерпретировать большой объем выходных данных. с Зачастую бывает достаточно построить модель системы в какой-то заданный момент времени, например в фиксированный год, месяц, день, а затем повторять расчеты через определенные промежутки времени. Вообще, наличие ресурсов в динамической модели часто оценивается приближенно и определяется факторами, выходящими за рамки модели. Поэтому необходимо тщательно проанализировать, действительно ли необходимо знать зависимость от времени изменения характеристик модели, или тот же результат можно получить, повторяя статические расчеты для ряда различных фиксированных моментов.

**3) Составление алгоритма.**

Алгоритм - это конечный набор правил, позволяющих чисто мехаически решать любую конкретную задачу из некоторого класса одотипных задач. При этом подразумевается:

а. - исходные данные могут изменяться в определеных пределах: {массовость алгоритма}

б. - процесс применения правил к исходным данным (путь решения задачи) определен однозначно: {детерминированность алгоритма}

в. - на каждом шаге процесса применения правил известно, что считать результатом этого процесса: {результативность алгоритма}

Если модель описывает зависимость между исходными данными и искомыми величинами, то алгоритм представляет собой последовательость действий, которые надо выполнить, чтобы от исходных данных перейти к искомым величинам.

Удобной формой записи алгоритма является блок схема. Она не только достаточно наглядно описывает алгоритм, но и является основой для составления программы. Каждый класс математических моделей имеет свой метод решения, который реализуется в алгоритме. Поэтому очень важной является классификация задач по виду математической модели. При таком подходе задачи, различные по содержанию, можно решать с помощью одного и того же алгоритма. Алгоритмы задач принятия решений, как правило, настолько сложны, что без применения ЭВМ реализовать их практически невозможно.

**4) Составление программы.**

Алгоритм записывают с помощью обычных математических символов. Для того, чтобы он мог быть прочитан ЭВМ необходимо составить программу. Программа - это описание алгоритма решения задачи, заданное на языке ЭВМ. Алгоритмы и программы объединяются понятием "математическое обеспечение". В настоящее время затраты на математическое обеспечение составляют примерно полторы стоимости ЭВМ, и постоянно происходит дальнейшее относительное удорожание математического обеспечения. Уже сегодня предметом приобретения является именно математическое обеспечение, а сама ЭВМ лишь тарой, упаковкой для него.

Далеко не для каждой задачи необходимо составлять индивидуальную программу. На сегодняшний день созданы мощные современные программные средства - пакеты прикладных программ ( ППП ). ППП - это объединение модели, алгоритма и программы. Зачастую, к задаче можно подобрать готовый пакет, который прекрасно работает, решает многие задач, среди которых можно найти и наши. При таком подходе многие задачи будут решены достаточно быстро, ведь не надо заниматься программированием. Если нельзя использовать ППП для решения задачи без изменения его или модели, то нужно либо модель подогнать под вход ППП, либо доработать вход ППП, чтобы в него можно было ввести модель. Такую процедуру называют адаптацией. Если подходящий ППП находится в памяти ЭВМ, то работа пользователя заключается в том, чтобы ввести необходимые искомые данные и получить требуемый результат.

**5) Ввод исходных данных.**

Прежде чем ввести исходные данные в ЭВМ, их, естественно, необходимо собрать. Причем не все имеющиеся на производстве исходные данные, как это часто пытаются делать, а лишь те, которые входят в математическую модель. Следовательно, сбор исходных данных не только целесообразно, но и необходимо производить лишь после того, как будет известна математическая модель. Имея программу и вводя в ЭВМ исходные данные, мы получим решение задачи.

6) Анализ полученного решения

К сожалению достаточно часто математическое моделирование смешивают с одноразовым решением конкретной задачи с начальными, зачастую недостоверными данными. Для успешного управления сложными объектами необходимо постоянно перестраивать модель на ЭВМ, корректируя исходные данные с учетом изменившейся обстановки. Нецелесообразно тратить время и средства на составление математической модели, чтобы по ней выполнить один единственный расчет. Экономико-математическая модель является прекрасным средством получения ответов на широкий круг росов, возникающих при планировании, проектировании и в ходе производства. ЭММ может стать надежным помощником при принятии каждодневных решений, возникающих в ходе оперативного управления производством.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЛОК-СХЕМ**

Физическая природа моделируемой системы может быть представлена с помощью блок-схемы. Простой пример - предыдущая блок-схема, хотя она недостаточно подробна.

Выделим основные составляющие блок схемы:

1) Прямыми линиями представлены материальные потоки, характеризующиеся определенными свойствами. Это не обязаельно должны быть потоки какого-то физического вещества; таким же образом могут быть представлены, например, потоки информации, денег. Если два материальных потока характеризуются разными свойствами и эти различия существенны для модели, то мы должны изобразить их разными линиями.

2) Прямоугольниками представлены блки предприятия и оборудование, или, в более общем случае, подсистемы, которые имеют свое определенное назначение. Характеристики потоков меняются, а блоки являются точками входа и выхода для множеств линий, представляющих потоки.

3) Принято, что общее направление движения потоков происходит слева направо. Таким образом, в блок-схеме, описывающей производственный процесс, поступающее сырье изображено стрелками входа в левой части блок-схемы, а конечные потоки - линиями, заканчивающимися справа в столбцах, ыотвечающих конечным продуктам. Такие столбцы особенно удобны, когда конечный продукт получается соединением нескольких потоков, как мы это увидим в нашем примере.

**ОПИСАТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ**

Эти ограничения описывают функционирование исследуемой системы. Они представляют особую группу балансовых уравнений, связанных с характеристиками отдельных блоков, такими как масса, энергия, затраты.

Тот факт, что в модели ЛП балансовые уравнения должны быть линейными, исключает возможность представления таких принципиально нелинейных зависимостей, как сложные химические реакц изменения условий функционирования, которые допускают линейное описание (хотя бы приближенно) могут быть учтены в модели. Балансовые соотношения могут быть введены для какой-то законченной части блок-схемы, например для отдельного блока; обычно они выписываются для каждого технологичедского потока, который в блок-схеме изображается линией. Количество вещества, полученного, может быть, более чем из одного блока, входящего в поток, равно количеству этого вещества, выходящего из потока (и поступающего как сырье, возможно, более, чем в один блок).

В статических (одноэтапных) моделях такие соотношения можно представить в виде: - вход + выход = 0

Динамический (многоэтапный) процесс описывается соотношениями:

- вход + выход + накопления = 0, где под накоплениями понимается чистый прирост за рассматриваемый период.

Пусть K потоков входит в какой-то блок, и Xk, k=1. . . K, количество сырья , передаваемого в блок каждым потоком. Пусть также из каждой единицы k-го сырья в блоке производится количество Aik какого-то i-го продукта. Тогда общее количество произведенного продукта определится формулой: E Aik\*Xk .

Предположим далее, что этот продукт сам поступает на вход какого-то только одного блока в количестве равном Xi . Тогда балансовое соотношение (строка i для потока этого продукта имеет вид: - E Aik\*Xk + 1. 0Xj = 0 (2. 2)

Каждый поток состоит из продуктов, произведенных блоками, и сырья и соединяет различные блоки. Тогда при составлении балансовых

соотношений потоков предполагается следующее:

1. Для каждого потока определяется балансовое уравнение, которому соответствует строка i.

2. Каждому входу потока в какой-то блок ставится в соответствие столбец с коэффициентом, равным +1. 0. Каждому столбцу соответствует переменная Xj, значение которой определяет объем потока, входящего в блок. Поток может входить более чем в один блок, тогда в уравнении 2. 2. появится несколько членов +1. 0Xj, каждый из которых будет представлять объем потока на входе в соответствующий блок.

3. Столбец (которому отвечает, например, переменная Xk), соответствующий выходу потока продукта из блока, содержит коэффициент, равный -Aik. Заметим, что в одном и том же балансовом уравнении могут появиться дополнительные члены, если одинаковые потоки (то есть потоки с одинаковыми характеристиками) поступают из разных блоков или сырьевых источников.

В результате получаем балансовое уравнение виа:

- E Aik\*Xk + 1. 0Xj = 0 , в котором может быть несколько членов вида +1. 0Xj, если поток входит более чем в один блок.

Итак, строка балансового уравнения соответствует потоку, который характеризуется набором определенных свойств и может иметь более, чем по одной точке входа и выхода. Столбец, которому отвечает переменная Xj, соответствует каждой новой точке входа потока в блок.

Дальнейшее условие общего вида, касающееся всех типов ограничений, состоит в том, что отрицательные коэффициенты указывают на то , что продукт произведен системой, а положительные - что он потреблен ею.

**ОГРАНИЧЕНИЕ НА РЕСУРСЫ И КОНЕЧНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ**

С этими ограничениями ситуация довольно ясная. В самом простом виде ограничения на ресурсы - это ограничения сверху на переменные, представляющие расход ресурсов, а ограничения на конечное потребление продуктов - это ограничения снизу на переменные, представляющие производство продукта. Ограничения на ресурсы имеют следующий вид:

Ai1X1 + . . . + AijXj + . . . + AinXn <= Bi,

где Aij - расход i-го ресурса на единицу Xj, j = 1 . . . n, а Bi общий объем имеющегося ресурса.

Если же ввести новую переменную, например Xn+1, представляющую суммарный расход, ограничение примет вид:

Ai1X1 + . . . + AijXj + . . . + AinXn - Xn+1 = 0,

Xn+1 <= Bi,

Определяя Aij как выход i-го продукта на единицу Xj, j = 1 . . . n, и поменяв знак неравенства на противоположный, мы получим аналогичные соотношения для учета конечного потребления, где Bi будет представлять общее потребление i-го продукта. Заметим, что ограничение на мощность завода и оборудования можно учесть таким же образом, как ограничение на ресурс. Зависимость затрат от объема используемых ресурсов (или конечного потреблени можно также отразить в модели.

**УСЛОВИЯ, НАЛАГАЕМЫЕ ИЗВНЕ**

Часть ограничений на систему можно рассматривать как внешние. Так условия на качество продуктов устанавливаются законодательными органами. Аналогично учет окружающей среды накладывает ограничения на некоторые свойства продуктов (например на количество серы в нефтетопливе) и на режим работы предприятия и оборудования (например на качество сточной воды) что можно выразить как дополнительные затраты.

Рассмотрим ситуацию, когда смешиваются несколько различных потоков, чтобы образовать конечнылй продукт. Если какое-то свойство i-ой компоненты смеси характеризуется коэффициентом Pi, а Pb определяет нижнюю допустимую границу указанного свойства смеси, то ограничение можно записать в виде: P1X1 + . . . + PiXi => PbXb где в левой части производится суммирование по всем смешиваемым потокам, а Xb представляет общее количество произведенной смеси. Ограничения на качество продуктов лучше всего задавать с помощью таблиц.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ**

Целевая функция модели обычно состоит из следующих компонент:

1) Стоимость произведенного продукта.

2) Капиталовложения в здания и оборудование.

3) Стоимость ресурсов.

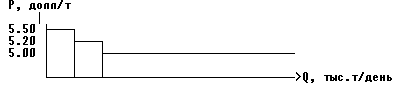
4) Эксплуатационные затраты и затраты на ремонт оборудования.

1) Стоимость произведенного продукта.

Если система моделируется с точки зрения прибыли, то стоимость продукта измеряется в деньгах. Если целью системы является максимизация общественной полезности, то выход системы описывается в терминах полезности, причем различия в определении этой полезности могут привести к разным ответам. Так при планировании медицинского обслуживания вряд ли окажется полезным для общества, если в качестве цели выбирается максимальное число пациентов, обслуживаемых в единицу времени.

В простейшем случае целевую функцию можно сформулировать так:

если мы обозначим через Xi количество продукта, а через Ci стоимость единицы этого продукта, то мы получим член целевой функции CiXi. Но целевая функция может быть описана и более сложным образом. Например стоимость может зависеть от количества проданного продукта, эта зависимость изображена на графике:

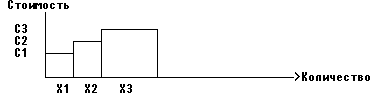


2) Капиталовложения в здания и оборудование.

Если рассматривается статическая модель на определенный момент времени, то все затраты должны быть отнесены к какому-то периоду времени, например рабочему дню (или году). Единовременные капиталовложения выражаются через ежедневные (годовые) затраты. Это осуществляется умножением капиталовложений на норму амортизации (коэффициент восстановления капитала - CRF). Чтобы перейти от годовых затрат к ежедневным, CRF обычно просто делят на 365 или если заводд работает не целый год (например проводятся регулярные плановые ремонтные работы) на число рабочих дней в году, чобы получить затраты отнесеные к рабочему дню. Данные затраты чаще запоминаются как константа и прибавляются к значению целевой функции после получения решения.

3) Стоимость ресурсов.

Способ определения стоимости ресурсов совпадает с определением стоимости произведенного продукта (п. 1): если Xi -количество используемого ресурса, а Ci - стоимость единицы этого ресурса, то мы получим член целевой функции, равный - CiXi. Здесь мы снова можем учесть в модели зависимость стоимости ресурса от его количества, как например на графике:



4)Эксплуатационные затраты и затраты на ремонт оборудования.

Эти затраты обычно являются функцией размеров зданий и оборудования, поэтому их можно включить в амортизационные капитальные затраты. Сюда необходимо включить также : трудовые затраты, затраты на энергоресурсы для производственных нужд (пар, электричество, вода, сжатый воздух и. т. д. ), арендную плату за разработку недр, затраты на катализаторы и другие технологические потребности.

**ПРИМЕР**

Мы хотим исследовать различные варианты расширения существующих блоков и создания новых блоков для максимизации чистого дохода. Нам необходимо:

1) Ввести в ЛП-матрицу ограничения на мощность для кажудого блока.

2) Максимизировать прибыль при фиксированных мощностях.

3 дельно от модели ЛП а затем вычесть их из величины прибыли.

4) Произвести параметрическое изменение мощностей и повторить шаги, начиная с шага 1.

Целевая функция будет выражаться в тыс. долл/рабочий день, так что если Xi выражается в единицах MBSD, то стоимость Ci должна выражаться в долл/баррель.

Мы будем максимизировать целевую функцию, поэтому коэффициенты, отвечающие ценам будут положительными, а коэффициенты, отвечающие затратам - отрицательными.

**ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ БОЛЬШОГО РАЗМЕРА**

Ограничения заачи представляют систему уравнений (неравенств), каждому из которых ставится в соответствие строка матрицы ограничений, в то же время в ЛП матрицу ограничений удобнее представлять в виде впоследовательности столбцов. При этом удобнее объединять в одну группу столбцы соответствующие одному блоку предприятия с испоользованием табличной формы записи данных: таблицы данных составляются для каждого блока предприятия и для каждого набора специальных ограничений на продукт. Поскольку каждой строке и каждому столбцу приписывается свое имя, всю матрицу ограничений можно построить , составив список имен всех таблиц, затем списки имен столбцов каждой таблицы, а затем перечислив все ненулевые элементы каждого такого столбца.

Уравнения из нашего примера поясняют как составляются таблицы. С помощью этих уравнений детально описаны сырьевые потоки, входящие в блок газового насыщения, и потоки продуктов, выходящие из него. Входам сырьевых потоков BOLNP и COLNP отвечают два столбца LNB и LNC на это указывают коэффициенты +1. 0 в соответствующих этим потокам баласовых строках, отрицательные коэффициенты в балансовых строках потока продкта представляют выход этого продукта на единицу сырья, поступающего в блок. Можно составить таблицу, описывающую весь блок газового насыщеия, добавив столбцы, которые представляют входы в этот блок сырьевых потоков 90BBG, 9BBG, HYDBBG.

При составлении таблиц, описывающих блоки предприятия, мы будем руководствоваться следующими правилами:

1) Определить столбец j для каждого сырьевого потока, входящего в блок (тогда Xj - количество j-го сырья). Выполнить шаги 2 - 6 для каждого такого столбца.

2) Записать коэффициент равный +1. 0 в балансовую строку, отвечающую входящему сырьевому потоку.

3) Для каждого продукта, произведенного в блоке из этого сырьевого потока, записать коэффициент -Aij в соответствующую балансовую строку потока продукта, где Aij - количество продукта i, полученного из единицы сырья j.

4) Если для блока существует ограничение по мощности определяемое количеством сырья, записать коэффициент +1. 0 в строку ограничения по мощности. Компонента вектора ограничений, соответствующая этой строке, равна предельному значению суммарного сырьевого па.

5) В каждую строку, представляющую ограничение на ресурс, записать коэффициент +Aij, где Aij - потребление ресурса i на единицу сырья j, (например потребности в энергоресурсах для нашей задачи).

6) Каждой единице сырья j приписать коэффициент затрат Cj в строке целевой функции.

Мы можем составить подобные таблицы и для конечных продуктов, действительно, мы могли бы представить процесс производства или смешивания конечного продукта в виде отдельного блока, в который входит несколько сырьевых потоков, а выходит только один поток (сам конечный продукт). Кроме балансовых соотношений здесь могут появиться строки ограничений специального типа.

При составлении таблиц, описывающих смешивание потоков для получения конечного продукта правила будут следующие:

1) Определить столбец j для каждого сырьевого потока, поступающего в смеситель (Xj - количество j-го сырья). Выполнить шаги 2 - 6 для каждого такого столбца.

2) Записать коэффициент равный +1. 0 в балансовую строку, отвечающую входящему сырьевому потоку.

3) Записать соответствующий коэффициент -1. 0 в балансовую строку для конечного продукта (например EVOLPROD).

4) Для каждого ограничения снизу на какое-то свойство смеси записать коэффициент -Pi в строку, соответствующую этому ограничению.

5) В строку, соответствующую ограничению сверху на какое-то свойство смеси записать коэффициент +Pi.

6) Выполнив шаги 2 - 5 для всех сырьевых потоков j, определить столбец для конечного продукта (смеси), (например B, тогда Xb количество конечного продукта). В этот столбец записать следующие коэффициенты:

а) в балансовую строку (EVOLPROD) этого конечного продукта записать +1. 0,

б) в строку, отвечающую ограничению снизу на какое-то свойство конечного продукта, записать коэффициент равный +Pb,

в) в строку, отвечающую ограничению сверху на какое-то свойство конечного продукта, записать коэффициент -Pb,

г) если есть ограничения на потребление конечного продукта, записать +1. 0 в соответствующую строку, отвечающую этому ограничению (либо учесть его просто как ограничение на переменную Xb),

д) ввести в строку целевой функции коэффициент стоимости конечного продукта Cb.

**Классификация экономико-математических моделей**

Важным этапом изучения явлений предметов процессов является их классификация, выступающая как система соподчиненных классов объектов, используемая как средство для установления связей между этими классами объектов. Основой классификации являются существенные признаки объектов. Поскольку признаков может быть очень много то и выполненные классификации могут значительно отличаться друг от друга. Любая классификация должна преследовать достижение поставленных целей. выбор цели классификации определяет набор тех признаков, по которым будут классифицироваться объекты, подлежащие систематизации. Цель нашей классификации - показать, что задачи оптимизации, совершенно различные по своему содержанию, можно решить на ЭВМ с помощью нескольких типов существующего программного обеспечения.

Классификацию задач оптимизации, возникающих на производстве, выполним по следующим признакам: 1. Область применения 2. Содержание задачи 3. Класс математической модели 1. Обеспечение производства включает в себя : 1. 1 Организацию и управление 1. 2 Проектирование изделий 1. 3 Разработку технологических процессов

Во всех этих элементах производства возникают задачи оптимизации. Так весьма широкий круг самых различных работ можно рассматривать как превращение ресурсов в результат. В связи с этим основные задачи, возникающие при управлении, могут быть отнесены к классу задач распределения ресурсов.

Объект проектирования устройством и действием. Устройство определяется структурой и параметрами. Действие характеризуется процессом функционирования. При решении этих трех вопросов возникают задачи: 1. 2. а Оптимизация параметров объекта проектирования. 1. 2. б Оптимизация структуры объекта проектирования. 1. 2. в Оптимизация функционирования

Технологический процесс определяется последовательностью работ, которые обеспечивают превращение сырья в готовую продукцию. Такую последовательность работ называют маршрутом. Каждая операция, входящая в маршрут характеризуется режимами обработки. Очевидно что задачи, требующие оптимального решения возникают как при выборе маршрута так и при определении параметров операций. 1. 3. а Оптимизация маршрута изготовления изделия 1. 3. б Оптимизация параметров технологических процессов.

Важным признаком классификации является класс математической модели. Проведем классификацию по элментам математической модели: 1 Исходным данным 2 Искомым переменным 3 Зависимостям, описывающим ограничения и целевую функцию

1. 1 Исходные данные, которые заданы определенными величинами называют детерминированными 1. 2 Исходные данные, которые зависят от случайных факторов, например от своевременности поставки ресурсов, исправности оборудования и. т. д. называют случайными величинами.

2. 1 Переменные могут быть непрерывными и дискретными. Непрерывными называют такие величины, которые в заданном интервале могут принимать любые значения. Так масса добываемого угля или объем выпуска ткани представляют собой непрерывные величины. 2. 2 Дискретными называют такитолько целые значения. Так например нельзя выпустить 0. 7 тепловоза или сдать строительный объект из 1. 45 здания.

3. 1 Зависимости межу переменными как в целевой функции так и в ограничениях могут быть линейными и нелинейными. Линейпервой степени и нет их произведения. 3. 2 Если переменые входят не в первой степени или есть произведение переменных, то зависимости являются нелинейными.

Сочетание различных элементов модели приводит к различным классам задач оптимизации. Различные классы задач требуют разных методов решения а сле

Наиболее распространенными задачами оптимизации возникающими в экономике являются задачи линейного программирования. Такая их распространенность объясняется следующим: 1) С их помощью решают задачи распределения ресурсов, к которым сводится очень большое число самых различных задач 2) Разработаны надежные методы их решения, которые реализованы в поставляемом программном обеспечении 3) Ряд более сложных задач сводится к задачам линейного программирования

**Математическое моделирование в управлении и планировании**

Один из мощных инструментов которым располагают люди, ответственные за управление сложными системами - моделирование. Модель является представлением реального объекта, системы или понятия в некоторой форме, отличной от формы их фактического реального существования. Обычно модель служит средством, помогающим в объяснении, понимании или совершенствованииточной копией этого объекта, выполненной в другом масштабе или из другого материала, или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме, в частности в виде математических выражений. Анализ математических моделей дает в руки менеджеров и других руководителей эффективный инструмент, который может использоваться для предсказания поведения систем и сравнения получаемых результатов. Моделирование позволяет логическим путем прогнозировать последстия альтернативных действий и достаточно уверенно показывает какому из них следует отдать предпочтение.

Прих суждений и интуиции. Для достижения цели практически всегда существует несколько вариантов из которых нужно выбрать оптимальный. Для определения лучшего варианта пользуются критерием эффективности или целевой функцией.

**РУКОВОДСТВО ПРЕДПРИЯТИЕМ**

Для достижения поставленной цели предприятию требуются материалы, оборудование, энергия, рабочая сила и другие ресурсы. Каждое предприятие такими ресурсами располагает, но общие запасы ресурсов ограничены. Поэтому возникает важная задача: выбор оптимального варианта, обеспечивающего достижение цели с минимальными затратами ресурсов. Таким образом эффективное руководство производством подразумевает такую организацию процесса, при которой не только достигается цель, но и получается экстремальное (MIN, MAX) значение некоторого критерия эффективности: К = F(X1, X2, . . . , Xn) => MIN(MAX) Функция К является математическим выражением результата действия, направленного на достижение поставленной цели, и поэтому ее называют целевой функцией.

Функционирование сложной производственной системы всегда определяется большим числом параметров. Для получения оптимального решения часть этих параметров нужно обратить в максимум, а другие в минимум. Возникает вопрос: существует ли вообще такое решение, которое наилучшим образом удовлетворяет всем требованиям сразу ? Можно уверенно ответить - нет. На практике решение, при котором какой-либо показатель имеет максимум, как правило, не обращает другие показатели ни в максимум ни в минимум. Поэтому выражения типа: производить продукцию наивысшего качества с наименьшими затратами - это просто торжественная фраза по сути неверная. Правильно было бы сказать: получить продукцию наивысшего качества при той же стоимости, или снизить затраты на производство продукции не снижая ее качества, хотя такие выражения звучат менее красиво, но зато они четко определяют цели. Выбор цели и формулирование критерия ее достижения, то есть целевой функции, представляют собой труднейшую проблему измерения и сравнения мноазнородных переменных, некоторые из которых в принципе несоизмеримы друг с другом: например безопасность и стоимость, или качество и простота. Но именно такие социальные, этические и психологические понятия часто выступают как факторы мотивации при определении цели и критерия оптимальности. В реальных задачах управления производством нужно учитывать то, что некоторые критерии имеют большую важность чем другие. Такие критерии можно ранжировать, то есть устанавливать их относительную значимость и приоритет. В подобных условиях оптимальным приходится считать такое решение, при котором критерии имеющие наибольший приоритет получают максимальные значения. Предельным случаем такого подхода является принцип выделения главного критерия. При этом один какой-то критерий принимается в качестве основного, например прочность стали, калорийность продукта и. т. д. По этому критерию производится оптимизация, к остальным предъявляется только одно условие, чтобы они были не меньше каких-то заданных значений. Между ранжированными параметрами нельзя проводить обычные арифметические операции, возможно лишь установление их иерархии ценностей и шкалы приоритетов, что является существенным отличием от моделирования в естественных науках.

При проектировании сложных техических систем, при управлении крупным производством или руководстве военными действиями, то есть в ситуациях где необпрактический опыт, дающий возможность выделить наиболее существеные факторы, охватить ситуацию в целом и выбрать оптимальный путь для достижения поставленой цели. Опыт помогае также найти аналогичные случаи в прошлом и по возможности избежать ошибочных действий. Под опытом подразумевается е только собственная практика лица, принимающего решение но и чужой опыт, который описан в книгах, обобщен в инструкциях, рекомендациях и других руководящих материалах. Естествено, когда решение уже апробировано, то есть известно какое именно решение наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям проблемы оптимального управления не существует. Однако на самом деле практически никогда не бывает совершенно одинаковых ситуаций, поэтому принимать решения и осуществлять управление всегда приходится в условиях неполной информации. В таких случаях недостающую информацию пытаются получить используя догадки, предположения, результаты научных исследований и особенно изучение на моделях. Научно обоснованная теория управления во многом представляет собой набор методов пополнения недостающей информации о том как поведет себя объект управления при выбраном воздействии.

Стремление получить как можно больше информации об управляемых объектах и процессах включая и особености их будущего поведения может быть удовлетворено путем исследования интересуюих нас свойств на моделях. Модель дает способ представления реального объекта, который позволяет легко и с малыми затратами ресурсов исследовать некоторые его свойства. Только модель позволяет исследовать не все свойства сразу, а лишь те из них, которые наиболее существенны при данном рассмотрении. Поэтому модели поволяют сформировать упрощенное представление о системе и получить нужные результаты проще и быстрее чем при изучении самой системы. Модель производственной системы в первую очередь создается в сознании работника осуществляющего управление. На этой модели он мысленно пытается представить все особенности самой системы и детали ее поведения, предвидеть все трудности и предусмотреть все критические ситуации, которые могут возникуть в различных режимах эксплуатации. Он делает логические заключения, выполняет чертежи планы и расчеты.

Сложность современных технических систем и производственных процессов приводит к тому, что для их изучения приходится использовать различные виды моделей.

Простейшими являются масштабные модели в которых соблюдается размеров умножаются на постоянную величину - масштаб моделирования. Большие объекты представляются в уменьшеном виде, а малые в увеличенном.

В аналоговых моделях исследуемые процессы изучаются не непосредственно а по аналогичным явлениям, то есть по процессам имеющим иную физическую природу, но которые описываются такими же математическими соотношениями. Для такого моделирования используются аналогии между механическими, тепловыми, гидравлическими, электрическими и другими явлениями. Например колебания груза на пружине аналогичны колебаниям тока в электрическом контуре, также движение маятника аналогично колебаниям напряжения на выходе генератора переменного тока.

Самым общим методом научных исследований является использование математического моделирования. Математической моделью описывает формальную зависимость между значениями параметров на входе моделируемого объекта или процесса и выходными параметрами. При математическом моделировании абстрагируются от конкретной физической природы объекта и происходящих в нем процессов и рассматривают только преобразоваие входных величин в выходные. Анализировать математические модели проще и быстрее, чем экспериметально определять поведение реального объекта в различных режимах работы. Кроме того анализ математической модели позволяет выделить наиболее существенные свойства данной системы, на которые надо обратить особое внимание при принятии решения. Дополнительное преимущество состоит в том, что при математическом моделировании не представляет труда испытать исследуемую систему в идеальных условиях или наоборот в экстремальных режимах, которые для реальных объектов или процессов требуют больших затрат или связаны с риском.

В зависимости от вида системы и конкретных целей, которые ставятся при анализе, возможны различные методы описания систем, то есть существует несколько различных подходов к матемтическому моделированию и системному анализу. В основе каждого подхода лежат те или иные представления, какой-то набор основных идей и теоретических предпосылок или как принято говорить определенная концепция.

1) Одна из возможных целей математического моделирования связана с желанием разобраться в свойствах систем вообще. В этом случае требуется иметь такую модель, которая охватывала бы как можно более широкий класс объектов и процессов.

2) Другая задача состоит в тщательном, количественном изучении систем определенного класса. При этом необходимо дать подробное математическое описание объектов интересующего класса и столь же подробное математическое описание происходящих в них процессов.

3) Наконец третий подход с которым часто приходится сталкиваться связан со стремлением использовать для анализа какие-то конкретные виды математических моделей.

Само принятие решения выходит за рамки математического моделирования и относится к компетенции ответственного лица которому предоставлено право окончательногос рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений, которые этим расчетом не были учтены.

В зависимости от того, какой информацией обладают руководитель и его сотрудники, подготавливающие решения, меняются и условия принятия решений и математические методы, применяемые для выработки рекомендаций.

Если известны все действующие в системе факторы, то есть отстствуют случайные воздействия, то это будет принятие решений в условиях определенности.

Когда решение может привести не к определенному исходу, а к одному из множества возможных с разными вероятностями их осуществления, то принимающий решение рискует получить не т результат, на который он рассчитывает. Поскольку исход каждой конкретной реализации случаен и потому зараее точно не предсказуем, метод называют приятием решений в условиях риска.

Если же исход операции зависит не только от стратегии избраной руководителем, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решения, например, действий кокурентов, такая задача называется принятием решений в условиях неопределенности.

Операцией называется комплекс мероприятий объединенных общим замыслом и направленых на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием.

В общем случае цель операции выражается в стремлении к достижению экстремального значения критерия эффективности. При наличии еопределенности это уже не строго математическая задача, которая дает однозначное решение. Теперь она должна формулироваться следующим образом:

При заданных ограничениях B1. . . Вn найти такие элементы управления X1. . . Xm которые с учетом случайных воздействий Q1. . . Qr по возможности обеспечивают максимальное значение критерия эффективности К max(min). Теперь нет уверенности в том, что можно будет получить решение, а если оно будет получено то нет гарантии в том, что оно будет правильным. Именно поэтому в формулировке задачи приходится делать оговорку "по возможности". Таким образом при решении проблем возникющих в реальной жизни математическая теория и научно обоснованные методы не дают точного решения. Причина этого в том, что когда нет точных данных, то есть нет полной информации остается лишь предполагать и строить догадки но нельзя считать что все предсказания сбудутся. И все таки решение, принятоматематических расчетов будет лучше чем взятое наугад. Задача состоит в том, чтобы это решение в возможно большей степени содержало черты разумности, именно в этом смысле следует понимать определение " по возможности оптимальное". Сложность математического моделирования в условиях неопределенности зависит от того какова природа неизвестных факторов. По этому признаку задачи делятся на два класса.

1) Стохастические задачи, когда неизвестные факторы представляют собой случайные величины, для которых известны законы распределения вероятностей и другие статистические харакеристики.

2) Неопределенные задачи, когда неизвестные факторы не могут быть описаны статистическими методами.

Вот пример стохастической задачи:

Мы решили организовать кафе. Какое количество посетителей придет в него за день нам неизвестно. Также неизвесно сколько времени будет продолжаться обслуживание каждого посетителя. Однако характеристики этих случайных величин могут быть получены статистическим путем. Показатель эффективности, зависящий от случайных величин также будет случайной величиной.

В данном случае мы в качестве показателя эффективности берем не саму случайную величину, а ее среднее значение и выбираем такое решение при котором это среднее значение обращается в максимум или минимум.

**Двойственные оценки, экономическая интерпретация и свойства**

Рассмотрим экономический смысл двойственных оценок (оценок оптимального плана) на примере экономико-математической задачи наилучшего использования ресурсов (в частности фонда времени работы производственного оборудования), формулируемой с разными критериями оптимальности:

1. Максимум прибыли.

2. Минимум себестоимости.

3. Максимум выпуска продукции в заданном ассортиментном соотношении.

Рассмотрим последовательно формулировку прямых и двойственных задач и проанализируем экономические свойства двойственных оценок в каждом случае.

**$ 1 Оценки ресурсов - экономическая интерпретация**

Каноническая форма дает возможность экономической интерпретации значений двойственных переменных. В точке оптимума двойственные переменные (у) определяются как относительные оценки дополнительных переменных прямой задачи линейного программирования. а) Предположим что дополнительная переменная Хij отвечающая i-му ограничению является небазисной в точке оптимума а само ограничение имеет вид:

E Aij\*Xj + Xs = Bi

Так как Xs вне базиса равна нулю исходное ограничение

E Aij\*Xj <= Bi можно рассматривать как равенство в точке оптимума, т. е. E Aij\*Xj = Bi

Теперь по определению относительная оценка этой небазисной переменной - это величина на которую может возрасти целевая функция при увеличении этой переменной на единицу. Так как решение оптимально то относительная оценка положительна (неотрицательна) и поэтому целевая функция должна уменьшаться если дополнительная переменная возрастает и возрастать если дополнительная переменная уменьшается Пусть например i-я компонента вектора ограничений увеличилась на единицу, так что ограничение примет вид

\_

E Aij\*Xj = Bi + 1

или после перестановки \_

E Aij\*Xj +(-1) = Bi

то есть дополнительная переменная Xs должна принять значение равное -1 чтобы i-ое ограничение оставалось равенством а относительная оценка даст соответствующее приращение целевой функции. Таким образом относительная оценка i-ой дополнительной переменной дает величину прироста целевой функции на единицу увеличения элемента Bi вектора ограничений. Так как элемент Bi обычно представляет собой объем i-го ресурса то относительная оценка равная Yi называется оценкой ресурса (оценкой единицы i-го ресурса) ибо она представляет относительную ценность единицы дополнительного ресурса. Эти относительые оценки являются маргинальными оценками в том смысле что они действительны лишь при таком диапазоне изменения ресурсов Bi когда текущий базис остается оптимальным. в) Если дополнительная переменная является базисной в точке оптимума то ее относительная оценка по определению равна нулю. Это также имеет смысл так как если ресурс использован не полностью

\_

E Aij\*Xj < Bi то цена которую мы должны были бы заплатить за дополнительную единицу этого ресурса равна нулю. Это приводит к условию дополняющей нежесткости:

В оптимальном решении или E Aij\*Xj = Bi или Yi = 0 (либо и то и другое)

или E Aij\*Yi = Cj или Xj = 0 (либо и то и другое)

Заметим что переменные Y недопустимы на протяжении всех итераций симплекс-метода до тех пор пока не будет достигнуто оптимальное решение.

**МАРГИНАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ**

Оценки ресурсов связаны скорее с ограничениями а не с переменными.

Однако они часто используются для вычисления оценочных или стоимостных показателей, связанных с переменными прямой задачи. Рассмотрим пример. Пусть в задаче связанной с суточной переработкой нефти некоторая переменная Xj соответствует объему неочищенной нефт закупаемой по цене 12. 65 долл/баррель (Сj = -12. 65) Существует ограничение сверху на объем закупаемой по этой цене неочищенной нефти равный 50 тыс. баррель/день.

Это можно записать уравнением: Xj + Xs = 50

Где Xs - это дополнительная переменная. Пусть она имеет относительную оценку равную 1. 04 долл/баррель в оптимальном решении - что это означает ? Оценка ресурса неочищенной неочищенной нефти равна 1. 04 долл/баррель, но это вовсе не означает, что мы должны были заплатить только 1. 04 долл за каждый дополнительный баррель неочищенной нефти. Это означает что мы должны быть готовы заплатить еще по 1. 04 долл/баррель за возможность покупать дополнительный объем этой нефти при условии, что последующие закупки будут осуществляться по цене 12. 65 долл/баррель: то есть целевая функция будет увеличиваться на 1. 04 долл за каждый дополнительный баррель, который мы сможем купить по цене Сj уже учтенной в целевой функции. Это означает, что м должны быть готовы к повышению цены до 12. 65 + 1. 04 = 13. 69 долл/баррель за дополнительную поставку неочищенной нефти.

Заметим, что 13. 69 долл/баррель - это равновесная цена при которой мы будем увеличивать нашу целевую функцию Р, если будем покупать по более дешевой цене чем эта: будем уменьшать Р если будем покупать за большую цену: сохраним Р неизменной если будем покупать точно за 13. 69 долл/баррель.

Если мы определим что МАРГИНАЛЬНАЯ ОЦЕНКА = РАВНОВЕСНАЯ ЦЕНА

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ЦЕНА, то в нашем примере МАРГИНАЛЬНАЯ ОЦЕНКА = 13. 69 - 12. 65 = 1. 04 долл/баррель.

Маргинальная оценка переменной Xj - мэто чистый доход, который может быть получен за каждую единицу Xj закупленную сверх существующего

лимита и равна оценке ресурса, то есть двойственной переменной того условия задачи которое ограничивает количество имеющегося ресурса

Маргинальная оценка остается постоянной только внутри некоторой окрестности существующего оптимума, соответствующей пределам, внутри

которых текущий базис остается оптимальным как при увеличении так и при уменьшении объема ресурсов (объема закупок). Относительную оценку которая отвечает небазисной переменной равной своей нижней границе часто рассматривают как чистый эффект этой переменной. Если принимают решение (неоптимальное) увеличить небазисную переменную равную своей нижней границе то эта относительная оценка показывает уменьшение Р на единицу увеличения переменной (до некоторых пределов). Здесь относительные оценки указывают на эффект (убытки), обусловленный отклонением от оптимального решения.

Так как компоненты вектора Aj (где j - номер небазисной переменной)

показывают величину изменения значений текущих базисных переменных

то их часто называют (маргинальными) нормами замещения, так что Aij

- это норма замещения способа производства i на способ

производства j.

**ДИАПАЗОНЫ УСТОЙЧИВОСТИ**

Часто говорят, что постоптимальный анализ - наиболее важная часть линейного программирования и нетрудно понять почему делается такой вывод. Большая часть параметров задачи ЛП точно не известна и на практике обычно берутся приближенные значения, которым должны быть равны эти параметры. Таким образом нас интересуют такие диапазоны изменения этих параметров, в которых оптимальное решение остается оптимальным в том смысле, что не меняется базис. Исследуем три класса параметров:

коэффициенты целевой функции Cj

компоненты вектора ограничений Bi

коэффициенты матрицы Aij

**Изменения коэффициентов целевой функции**

а) Небазисная переменая

Изменение коэффициента целевой функции небазисной переменной влияет на относительную оценку только этой переменной. Пусть коэффициент целевой функции изменится на величину q тогда

\_ \_

Cj = Cj + q отсюда Dj = Dj - q

Например пусть матрицей А задан производственный процесс и пусть переменная Xj представляет количество некоторого производимого продукта, который может быть продан по цене Cj = 20 долл/ед В оптимальном решении эта переменная небазисная (=0) и ее относительная оценка = 1. 40 долл/ед Таким образом если цен возрастет до 21. 40 долл/ед продукта то относительная оценка станет = 0 и дальнейшее увеличение цены приведет к отрицательной относительной оценке. Это означает что текущее решение перестает быть оптимальным. В таком случае выгодно производить продукт представленный переменной Xj Следовательно 21. 40 долл/ед продукта это равновесная цена для Xj , при любой более низкой цене оптимальное решение будет состоять в том чтобы совсем не производить этот продукт ( Xj остается небазисным) а при более высокой цене выгодно ввести Xj в базис. Для небазисной переменной диапазон устойчивости в котором Cj может меняться так чтобы текущее решение оставалось оптимальным задается выражением \_

\_ Cj + q, где -оо < q <= Dj

и где Dj - относительная оценка переменной Xj отвечающая оптимальному решению. Заметим что при любом отрицательном q относительная оценка этой переменной останется положительной. Многие ППП ЛП дают информацию и о диапазоне изменения переменной Xj (от нулевого до некоторого предельного\_значения) при котором не происходит смены базиса. Если q = Dj то относительная оценка = 0 что означает что Xj можно увеличивать не меняя значения целевой функции. Предельное значение до которого можно увеличивать Xj определяется формулой MIN (B/Aj)i Например предположим что в оптимальном решении вектор базисных переменных, -1 -1 текущий вектор ограничений B=B \* b и вектор Aj=B \*aj заданы в виде:

X5 3. 2 0. 6

Xb = X1 B = 1. 5 Aj = 0. 3

X6 5. 6 -1. 2

Тогда получаем MIN (Bi/Aij) = 1. 5/0. 3 = 5. 0

Таким образом мы можем сделать вывод о том что при цене в 21. 40 долл/ед продукта или более становится выгодным производить продукт Xj то есть продукт которому отвечает переменная Xj ; на каждую единицу произведенного продукта Xj переменные X5 X1 X6 уменьшаются соответственно на 0. 6 0. 3 -1. 2 единиц. Если мы произведем 5. 0 ед продукта Xj то переменная X1 обратится в нуль и дальнейшее увеличение Xj потребует смены базиса. Заметим, что мы получили всю информацию не решая задачу заново, для продолжения анализа нам потребуется лишь выполнить операцию исключения соответствующую изменению базиса.

б) Базисная переменная

Изменение коэффициента целевой функции базисной переменной влияет на относительные оценки небазисных переменных Рассмотрим увеличение коэффициента целевой функции i-ой баисной переменной. В этом случае вектор коэффициентов целевой функции изменится следующим образом

\_

Cb = Cb + q\*Ei, где Ei - вектор специального вида i-ая компонента которого = 1 а остальные нулю. Например

E3 = 0

Относительная оценка j-ой небазисной переменной станет теперь равной

Dj = Dj + q\*Aij

Для того чтобы решение оставалось оптимальным должно выполняться условие

Dj => 0 то есть Dj^ + q\*Aij => 0, где Dj^ - относительная оценка соответствующая текущему оптимальному решению.

Для базисной переменной диапазон устойчивости в котором может изменяться Ci оставляя оптимальным текущее решение адается выражением Ci + q, где

MAX {Dj^/-Aij} <= q <= MIN {Dj^/-Aij}

i/Aij>0 i/Aij<0

Если отсутствуют коэффициенты Aij < 0 то q < +oo и аналогично если нет Aij > 0 то q > -oo

Например пусть оптимальное решение задано следующим образом:

Максимизировать Р= 31. 5 -3. 5X4 -0. 1X3 -0. 25X5

При условиях X1 = 3. 2 -1. 0X4 -0. 5X3 -0. 60X5

X2 = 1. 5 +0. 5X4 +1. 0X3 -1. 00X5

X6 = 5. 6 -2. 0X4 -0. 5X3 -1. 00X5

Если коэффициент целевой функции переменной X2 станет равным С2 + q то относительные оценки небазисных переменных изменятся следующим образом:

D4 = 3. 5 + q\*(-0. 5)

D3 = 0. 1 + q\*(-1. 0)

D5 = 0. 25 + q\*(+1. 0)

Заметим что величины Aij имеют знаки противоположные тем, что приведены выше.

Диапазон значений для q вычисляется в соответствии с формулой:

(0. 25/-1. 0) <= q <= MIN (3. 5/0. 5 , 0. 1/1)

-0. 25 <= q <= 0. 1

Если q принимает значение равное одной из двух границ то относительная оценка некоторой небазисной переменной становится равной нулю Предельное значение до которого можно увеличивать такую переменную вычисляется как и в предыдуащем примере с небазисными переменными

Так в нашем примере при q = 0. 1 относительная оценка переменной X3 равна нулю так что если коэффициент целевой функции переменной X2 увеличится на 0. 1 или более станет выгодно производить X3 и мы сможем производить MIN {3. 2/0. 5 , 5. 6/0. 5} = 6. 4 единиц X3 когда X1 обратится в нуль и потребуется изменение базиса.

1. Существует диапазон изменения q коэффициентов целевой функции как базисных так и небазисных переменных в которых текущее оптимальное решение остается оптимальным. Для небазисных переменных существует только верхняя граница диапазона изменения q ; для базисных переменных обычно существует и нижняя и верхняя граница.

При значении коэффициента целевой функции, выходящем за пределы этого диапазона текущее оптимальное решение становится неоптимальным, так как появится небазисная переменная с отрицательной относительной оценкой.

2. Изменение коэффициента целевой функции базисной переменной приводит к изменению значения целевой функции.

3. Эффект от изменения коэффициентов целевой функции можно рассматривать с двух позиций: с точки зрения сбыта нас интересуют равновесные цены; с точки зрения производства нас интересует диапазон изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которого текущий план ( представленный текущим базисом ) остается оптимальным.

**Изменение компонент вектора ограничений**

Рассмотрим влияние изменения Bi = Bi + q для некоторого 1 <= i <= m Обычно принято рассматривать случай, когда компонента Bi является правой частью ограничения-неравенства в которое введена дополнительная переменная. Мы хотим определить такой диапазон изменения Bi в котором текущее решение остается оптимальным. В случае ограничения-равенства мы могли бы рассматривать соответствующую искусственную переменную как неотрицательную дополнительную (которая должна быть небазисной в допустимом решении)

а) Базисная дополнительная переменная

Если дополнительная переменная i-го ограничения базисная то это ограничение не является активным в точке оптимума. Анализ прост: значение дополнительной базисой переменной дает диапазон изменения, в котором соответствующая компонента Bi уменьшается (увеличивается в случае ограничения типа =>).

Решение остается допустимым и оптимальным в диапазоне Bi + q, где

-Xs <= q <= +oo для ограничений типа <=

-oo <= q <= Xs для ограничений типа =>

Здесь Xs - значение соответствующей дополнительной переменной. Например рассмотрим ограничение-неравенство:

3X1 + 4X2 + 7X3 <= 100

Приведем его к равенству введя дополнительную переменную

3X1 + 4X2 + 7X3 + X4 = 100

Если в оптимальном решении X4 = 26 то оставшиеся переменные удовлетворяют неравенству:

3X1 + 4X2 + 7X3 <= 74

а также любому неравенству того же вида со значением правой части большим 74.

б) Небазисная дополнительная переменная

Если дополнительная переменная небахзисная и равна нулю, то исходное ограничение-неравенство является активным в точке оптимума. На первый взгляд может показаться что так как это ограничение активное то отсутствует возможность изменения значения правой части такого ограничения, в частности возможность уменьшения значения Bi (для ограничений типа <=). Оказывается что изменяя вектор В мы меняем также вектор Xb и так как существует диапазон изменений в котором Xb неотрицателен, то решение остается еще и оптимальным в том смысле, что базис не меняется. (Заметим что при этом изменяется значение как Xb так и Р).

Рассмотрим ограничение:Ak1X1+Ak2X2 +. . . +Xs = Bk где Xs - дополнительная переменная. Пусть теперь правая часть станет равной Bk + q, тогда уравнение можно переписать так: 1. 1) Ak1X1+Ak2X2 +. . . +(Xs-q) = Bk

Так что (Xs - q) заменяет Xs Следовательно, если в оптимальном решении переменная Xs небазисная и равна нулю то мы имеем Xb = B - As\*(-q) где As - столбец конечной таблицы соответствующий Xs. Так как Xs должен оставаться неотрицательным то мы получаем соотношение: B - As\*(-q) => 0 которое определяет диапазон изменения q:

MAX {Bi/-Ais} <= q <= MIN {Bi/-Ais}

i/Ais>0 i/Ais<0

Если нет ни одного Ais > 0 то q > -oo,

а если нет ни одного Ais < 0 то q < +oo

Для ограничений типа => q меняет знак, так как вместо неравенства E AijXj => Bi мы можем рассматривать

-E AijXj <= -Bi

Поэтому в уравнении 1. 1) вместо +(Xs-q) мы должны писать -(Xs+q).

Снова рассмотрим пример:

Максимизировать Р= 31. 5 -3. 5X4 -0. 1X3 -0. 25X

При условиях X1 = 3. 2 -1. 0X4 -0. 5X3 -0. 60X5

X2 = 1. 5 +0. 5X4 +1. 0X3 -1. 00X5

X6 = 5. 6 -2. 0X4 -0. 5X3 -1. 00X5

Пусть X4 - дополнительная переменная некоторого ограничения i (типа <=). Если компонену Bi изменить на величину q, мы получим:

X1 = 3. 2 - 1. 0\*(-q)

X2 = 1. 5 + 0. 5\*(-q)

X6 = 5. 6 - 2. 0\*(-q)

3. 2 1. 0

то есть B = 1. 5 As = -0. 5

5. 6 2. 0

Тогда,

X1 => 0 при 3. 2 - 1. 0\*(-q) => 0, то есть q => 3. 2/-1. 0,

X2 => 0 при 1. 5 + 0. 5\*(-q) => 0, то еасть q <= 1. 5/0. 5,

X6 => 0 при 5. 6 - 2. 0\*(-q) => 0, то есть q => 5. 6/-2. 0

Значит q может меняться в диапазоне:

MAX {3. 2/-1. 0; 5. 6/-2. 0} <= q <= 1. 5/0. 5, то есть -2. 8 <= q <= 3. 0

**ВЫРОЖДЕННОСТЬ**

1. Вырожденность прямой задачи

Вырожденное решение прямой задачи характеризуется тем, что его базисная компонента равна нулю. Вырожденность прямой задачи может часто проявляться через промежуточные (неоптимальные) вырожденые базисные решения. Так например не произойдет улучшения целевой функции от введения в базис переменной, для которой положительна соответствующая компонента вектор а Aq.

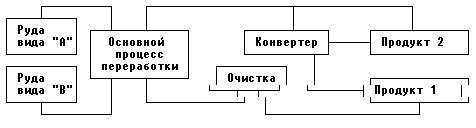
Возможен случай, когда прямая задача ЛП имеет вырожденое промежуточное но невырожденное оптимальое решение. Если оптимально решение прямой задачи вырождено, то двойственная задача имеет бесконечно много оптимальных решеий.

2. Вырожденность двойственой задачи

С вырожденностью двойственной задачи мы сталкиваемся, когда относительная оценка, отвечающая небазисной переменной, равна нулю.

Это означает, что небазисная переменная может увеличиваться, не меняя при этом значения целевой функции. Если такая нулевая относительная оценка соответствует оптимальному решению, то имеется множество оптимальных решений так как Р не меняется). Заметим, что мы получили вырожденное решение двойственной задачи, отвечающее границе диапазоа устойчивости коэффициента целевой функции, а также вырожденное решение прямой задачи соответствующее границе диапазона устойчивости компоненты вектора ограничений.

Как пример источника ценной информации, получаемой при постоптимальном анализе, рассмотрим следующую производственную задачу. Предприятие по переработке руды производит два сорта очищенной продукции, которая продается предприятиям металлургической промышленности. Схема работы предприятия выглядит следующим образом.



Перерабатываются два вида руды: А и В. Заводу может быть поставлено до 100 тыс. т в день руды вида А по цене 3. 25 долл/т и д 30 тыс. т в день руды вида В более высокого качества по цене 3. 40 долл/т. Общая мощность основного процесса переработки равна 100 тыс. т руды в день при затратах на переработку 0. 35 долл. /т.

Основной процесс переработки позволяет получить из каждой тонны руды вида А 0. 15 т продукта 1 и 0. 85 т продукта 2, а из каждой тонны руды вида В 0. 25 т продукта 1 и 0. 75 т продукта 2.

Продукт 1 более ценный, и агрегат, называемый конвертером, способен из каждой тонны продукта 2 получить 0. 5 т продукта 1 и 0. 5 т продукта, который может быть продан как продукт 2, но который нельзя повторно перерабатывать конвертером. Мощность конвертера 50 тыс. т сырья в день при затратах на конвертерную обработку 0. 25 долл/т сырья. Условия реализации следующие. Продукт 2 может быть продан в неограниченном количестве по цене 3. 8 долл/т, продукт 1 продается по цене 5. 5 долл/т и его можно продать по этой цене до 45 тыс. т/день. Существующий контракт требует, чтобы менее 40 тыс. т/день продукта 1. Запасы продукта 1 могут увеличиваться со скоростью 4 тыс. т/день и эти запасы оцениваются из расчета 5. 20 долл/т. Излишек продукта 1 может быть продан в неограниченном количестве по пониженной цене равной 5. 0 долл/т. Оба продукта можно при необходимости докупить: закупочная цена продукта 1 равна 5. 75 долл/т; закупочная цена продукта 2 равна 4. 0 долл/т.

Для построения модели введем следующие обозначения переменных:

X1 - количество переработанной руды вида А

X2 - количество переработанной руды вида В

X3 - количество докупленного продукта 1

X4 - количество докупленного продукта 2

X5 - количество продукта 2 переработанного в конвертере

X6 - количество продукта 1 на складе

X7 - количество продукта 1 проданного по пониженной цене

X8 - дополнительная переменная ограничения на используемые ресурсы руды вида В (<=30)

X9 - дополнительная переменная условия, ограничивающего сверху количество продукта 1 которое можно продать по обычной цене (<=45)

X10 - дополнительная переменная условия, ограничивающего снизу количество продукта 1 которое можно продать по обычной цене (<=40)

X11 - дополнительная переменная условия, ограничивающего сверху объем складируемого запаса продукта 1 (<=4)

X12 - дополнительная переменная условия, ограничивающего сверху мощность основного процесса обработки (<=100)

X13 - дополнительная переменная условия, ограничивающего сверху мощность конвертера (<=50)

X14 - излишек продукта 2, который идет непосредственно на продажу не проходя конвертерной обработки

Ограничения

0. 15X1 + 0. 25X2 + X3 + 0. 5X5 - X6 - X7 + X9 = 45 [ 1 ]

0. 15X1 + 0. 25X2 + X3 + 0. 5X5 + X6 - X7 - X10 = 40 [ 2 ]

X2 + X8 = 30 [ 3 ]

X6 + X11 = 4 [ 4 ]

X1 + X2 + X12 = 100 [ 5 ]

X5 + X13 = 50 [ 6 ]

- 0. 85X1 - 0. 75X2 - X4 + X5 + X4 = 0 [ 7 ]

Целевая функция

5. 50\*(0. 15X1 + 0. 25X2 + 0. 5X5) + 3. 80\*(0. 85X1 + 0. 75X2 - 0. 5X5)

- 0. 35\*(X1 + X2) - 3. 25X1 - 3. 40X2 - 0. 25X5 - 0. 1\*(0. 15X1 +

0. 25X2) - 0. 25X3 - 0. 20X4 - 0. 30X6 - 0. 5X7 - MAX

0. 825X1 + 1. 375X2 + 2. 750X5 + 3. 230X1 + 2. 85X2 - 1. 9X5 - 0. 35X1

- 0. 35X2 - 3. 25X1 - 3. 40X2 - 0. 25X5 - 0. 015X1 - 0. 025X2 - 0. 25X3

- 0. 20X4 - 0. 30X6 - 0. 5X7 -> MAX

0. 44X1 + 0. 45X2 + 0. 6X5 - 0. 25X3 - 0. 2X4 - 0. 3X6 - 0. 5X7 -> MAX

**Оценки ресурсов**

Оценка ограничения на мощность основного процесса переработки равна 0. 44 долл/т (относительная оценка, соответствующая переменной X12 равна 0. 44). Эта оценка справедлива в диапазоне изменения мощности основного процесса определяемом выражением 100 + q, где MAX { 3/-0. 15; 70/-1; 32/-0. 85 } <= q <= MIN { 2/0. 15 } отсюда -20 <= q <= 13. 33

Таким образом, текущий доход можно увеличить на 0. 44 долл. за каждую тонну увеличения мощности основого процесса обработки, если будем увеличивать эту мощность лишь до 113, 33 тыс. т/день.

Оценка ограничения на мощность конвертера равна 0. 6 долл/т (относительная оценка, соответствующая переменной X13 равна 0. 6) Эта оценка справедлива в диапазоне изменения 50 + q, где MAX { 3/-0. 5; 50/-1 } <= q <= MIN { 2/0. 5 } отсюда -6 <= q <= 4

Таким образом, текущий доход можно увеличит на 0. 6 долл. за каждую тонну увеличения мощности конвертера, если будем увеличивать эту мощность лишь до 54 тыс. т/день.

**Маргинальная оценка**

Маргинальная оценка руды В равна 0. 01 долл/т и справедлива в диапазоне 30 + q, где MAX { 3/-0. 1; 30/-1 } <= q <= MIN { 2/0. 1; 70/1; 32/0. 1 } отсюда -30 <= q <= 20

Если лq = -30, то X2=0, то есть руда вида В закупаться не будет. Если q = 20, то X2=50, то есть можно покупать до 50 тыс. т руды В в день.

Можно сделать вывод, что мы получим чистый доход по 0. 01 долл. за каждую тонну руды вида В, купленную сверх 30 тыс. т/день, при условии, что общее количество покупаемой руды этого вида не превысит преела 50 тыс. т/день, при котором меняется маргинальная оценка из-за изменения базиса. Точно так же мы потеряем по 0. 01 долл. за каждую недостающую тонну руды вида В, если мы будем покупать меньше 30 тыс. т/день. Мы можем рассуждать иначе, а именно, что мы могли бы вести переговоры о дополнительной закупке руды вида В сверх 30 т/день (но не более чем на 20 тыс. т/день) по цене до

3. 40 + 0. 01 = 3. 41 долл/т.

**Изменения коэффициентов целевой функции**

1. ( Небазисные переменные )

X4: относительная оценка = 0. 2

Естли продукт 2 можно покупать по 4. 00 - 0. 2 = . 80 долл/т или дешевле, то это выгодно делать и мы можем покупать неограниченное количество этого продукта.

X6: относительная оценка = 0. 3

Если цена продукта 1 хранимого на складе увеличится до 5. 20 + 0. 30 = 5. 50 долл/т или более то выгодно хранить запас, увеличивая его до MIN {3/1, 4/1} = 3 тыс. т/день ( до того как произойдет смена базиса).

X7: относительная оценка = 0. 5

Если пониженная цена продукта 1 возрастет до 5. 00 + 0. 5 = 5. 50 долл/т или более, его выгодно продавать на таком рынке, причем ежеднневно можно продавать до 3 тыс. т, прежде чем изменится базис.

X3: относительная оценка = 0. 25

Если продукт 1 можно купить по цене 5. 75 - 0. 25 = 5. 50 долл/т или дешевле, выгодно сделать это, причем можно покупать до 2 тыс. т/день прежде чем изменится базис.

2. ( Базисные переменные )

X2: коэффициент целевой функции = -3. 40

Коэффициент целевой функции может меняться в диапазоне С2 + q, где 0. 01/-1 <= q <= оо

Если цена руды вида В станет равной 3. 41 долл/т или более ( С2 = -3. 40 - 0. 01 ) то выгодно увеличить X8, т. е. уменьшить количество покупаемой руды вида В; диапазон изменения X8 задается соотношениями MAX {2/-0. 1; 70/-1; 32/-0. 1} <= X8 <= MIN {3/0. 1; 30/1}

Обычно нас интересуют только положительные пределы. В нашем примере X8 может меняться до 30 тыс. т/день, прежде чем потребуется изменить базис ( X2 оратится в нуль ). Исследование полученных результатов показывает, что вычисление пределов осуществляется аналогично вычислению маргинальных оценок, выполненномоу ранее.

Это указывает нам путь вычисления маргинальных оценок для переменных, которые не равны значению своей верхней границы ( как мы увидим для руды вида А ( X1 ) )

X1: коэффициент целевой функции = - 3. 25

Коэффициент целевой функции может меняться в диапазоне С1 + q, где - 0. 44 <= q <= 0. 01

Если цена руды вида А уменьшится до 3. 24 долл/т или еще меньше ( С1 = -3. 25 + 0. 01 ), то станет выгодно увеличить X8 ( т. е. заменить руду вида В рудой вида А ) до X8 = 30, что соответствует X1 = 100, X2 = 0. Таким образом маргинальная оценка руды вида А в диапазоне 50-70 тыс. т/день равна 0. 44 долл/т.

Заметим, что скачок маргинальной оценки, отвечающей базисной переменной, происходит при значении, которое эта переменнаяi принимает в оптимальном решении ( в нашем примере при X1 = 70 ) Маргинальные оценки интерпретируются несколько иначе, чем изменения цен, требующиеся для того, чтобы изменить оперативный план. Если руда вида А может быть закуплена дешевле на 0. 01 долл/т, то от замены такой рудой руды вида В целевая функция не изменится; если цена руды вида А возрастет на 0. 44 долл/т, то уменьшение ее закупки на величину, не превосходящую 20 тыс. т/день, также не изменит значения целевой функции.

**Изменения компонент вектора ограничений**

1. ( Базисная дополнительная переменная )

Величина изменения может быть вычислена непосредственно:

X9 = 2 и X10 = 3 указывают, что количество продукта 1, которое можно продавать по обычной цене равно 43 ( меньше верхней границы на 2 и больше нижней границы на 3 ).

Значение X11 показывает, что верхний предел запаса продукта 1 может быть уменьшен на 4.

2. ( Небазисная дополнительная переменная )

Диапазоны изменения компнент вектор ограничений уже рассматривались выше при обсуждении оценок ресурсов, маргинальных оценок и изменений коэффициентов вектора целевой функции. Однако нам может понадобиться исследовать отдельно влияние изменения имеющихся ресурсов безотносительно к изменению цен. Поэтому мы кратко просуммируем результаты изменения только компонент вектора ограничений и укажем диапазоны, внутри которых текущее решение останется оптимальным.

X12: Мощность основного процесса обработки может меняться в диапаз MAX {3/-0. 15; 70/-1; 32/-0. 85} <= q <= MIN{2/0. 15} т. е. -20 <= q <= 13. 33

X8: Ресурсы руды типа В могут меняться в диапазоне 30 + q, где MAX {3/-0. 1; 30/-1} <= q <= MIN {2/0. 1; 70/1; 32/0. 1} т. е. -30 <= q <= 20

X13: Мощность конвертера может меняться в диапазоне 50 + q, где MAX {3/-0. 5; 50/-1} <= q <= MIN {2/0. 5} т. е. -6 <= q <= 4

Оптимальность сохраняется в том смысле, что базис не меняется, хотя значения переменных и целевой функции меняются, но остаются допустимыми.

**Задача к семинарскому занятию**

Предприятие может перерабатывать двавида руды: руда вида А может быть поставлена в объеме 50 тыс. т/день по цене 2. 80 долл/т, руда вида Б может быть поставлена в объеме 75 тыс. т/день по цене 2. 50 долл/т.

Оба вида руды проходят через блок основной переработки. На заводе есть еще три блока, ксплуатационные затраты и предельные мощности которых задаются следующей таблицей:

Блоки Эксплуатационные Предельные мощности затраты ($/т) тыс. т/день

Блок основной переработки 0. 20 100

Обогащение 0. 15 25

Измельчение 0. 10 40

Очистка 0. 15 40

Данные о продаже:

Продукт Доход (долл/т) Потребление (МАХ)

1 6. 00 Не ограничео

2 5. 00 60 тыс. т/день

3 4. 00 Не ограничено

Выход продуктов ( в т/т сырья )

Процесс основной обработки Обогащение

Руда А Руда Б proc1 proc2 gr1

proc1 0. 15 0. 12 tret1 0. 15 0. 20 0. 18

proc2 0. 10 0. 10 tret2 0. 35 0. 38 0. 40

proc3 0. 20 0. 15 tret3 0. 50 0. 42 0. 42

proc4 0. 23 0. 25

proc5 0. 32 0. 33

Измельчение Очистка

proc4 proc5 proc3 gr2

gr1 0. 15 0. 10 gr2 0. 20 0. 20 ref2 0. 55 0. 70

gr3 0. 25 0. 35

gr4 0. 40 0. 35

Каждый столбец соответствует потоку поступающего сырья, так чтотим данным можно легко построить блок-схему потоков.

Характеристика качества продукта:

Продукты 1 и 3 не имеют никаких ограничений на качество.

Продукт 1 состоит из tret1 и ref1.

Продукт 3 состоит из tret3, ref2 и gr4.

Продукт 2: % окиси металла => 55

Запасы смесей сырья для продукта 2:

tret2 tret3 ref1 ref2 gr3 gr4

% окисей металлов 65 60 53 50 45 40

Мы хотим максимизировать чистый доход за день !

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

x1 + x21 = 50 . . . . ruda1

x2 + x22 = 75 . . . . ruda2

x1 + x2 + x23 = 100 . . . . blok osn

0. 15x1 + 0. 12x2 = x3 . . . . pr1

0. 10x1 + 0. 10x2 = x4 . . . . pr2

0. 20x1 + 0. 15x2 = x5 . . . . pr3

0. 23x1 + 0. 25x2 = x6 . . . . pr4

0. 32x1 + 0. 33x2 = x7 . . . . pr5

0. 15x6 + 0. 10x7 = x9 . . . . gr1

0. 20x6 + 0. 20x7 = x10 . . . . gr2

0. 25x6 + 0. 35x7 = x11 . . . . gr3

0. 40x6 + 0. 35x7 = x12 . . . . gr4

0. 15x3 + 0. 20x4 + 0. 18x9 = x13 . . . . tr1

0. 35x3 + 0. 38x4 + 0. 40x9 = x14 . . . . tr2

0. 50x3 + 0. 42x4 + 0. 42x9 = x15 . . . . tr3

0. 45x5 + 0. 30x10 = x16 . . . . ref1

0. 55x5 + 0. 70x10 = x17 . . . . ref2

0. 5x13 + 0. 5x16 = x18 . . . . Q1

0. 3x15 + 0. 3x17 + 0. 4x12 = x19 . . . . Q3

65x14 + 60x15 + 53x16 + 50x17 + 45x11 + 40x12 = 55x20

**УСТРОЙСТВО ПК**

Персональный компьютер - это настольная ЭВМ организованная таким образом, что для работы на ней не обязательно быть специалистом по вычислительной технике и программированию, а достаточн о иметь лишь самое общее представление об ЭВМ. Наибольшее распространение в мире получили компьютеры фирмы IBM - IBM PC.

Типовая система IBM PC включает системный блок, где размещены основая электроника компьютера и накопители, клавиатуруЂ, дисплей и принтер. Системный блок имеет размеры порядка 15\*40\*50см и весит около 13 кг.

Внутри системного блока находятся главные компоненты, выполняющие функции компьютера: блок питания, основная системная плата (центральный процессор) с микросхемами памяти, и гнезда для подключения дополнительных устройств.

Cистемный блок IBM PC состоит из следующих основных компонентов:

1. Центральный процессор представляющий собой микросхему, и

включающий в себя:

А) Устройство управления, интерпретирующее команды компьютера и инициирующее сигналы, которые заставляют схемы компьютера выполнять определенные действия;

Б) Арифметико-логическое устройство выполняющее все вычисления. Центральный процессор определяет быстродействие компьютера. Модель IBM PC/AT использует микропроцессор Intel-80286 и математический сопроцессор Intel-80287 обеспечивающие достаточно высокую производительность и быстродействие.

2. Блок памяти, котоый используется для хранения программ, данных и результатов. Этот блок включает в себя два типа памяти:

А) Оперативное запоминающее устройство (ОЗУ) - Оперативная память в которой располагаются программы, выполняемые компьтером и данные используемые программами. Емкость оперативной памяти обычно равна 640 Кбайт(байт-единица информации). Из ОЗУ можно считывать и в него записывать информацию. При выключении питан хранившаяся в ОЗУ будет потеряна, если она предварительно не сохранена на диске.

Б) Постояное запоминающее устройство (ПЗУ) - Основная память из него можно только считывать информацию. В ПЗУ программы записываются при изготовлении компьютера и остаются там даже при отсутствии питания. В ПЗУ хранится часть операционой системы DOS, которая обеспечивает тестирование компьютера, начальную загрузку операционной системы, а также выполнение основных низкоуровневых услуг ввода-вывода.

3. Контроллеры - электроанные схемы, управляющие работой различных устройств входящих в компьютер (дисководов, монитора и. т. д. ).

4. Порты ввода-вывода через которые процессор обменивается данными с внешними устройствами. Имеются специализированые порты, через которые происходит обмен данными с внутренними устройствами компьютера, и порты общего назачения, к которым могут подключаться различные дополнительные вешние устройства (принтер, мышь и. т. д. ).

Порты общего назначения бывают двух видов: параллельные (обозначаемые LPT1, LPT2. . . ) и асинхронные последовательные (обозначаемые COM1, COM2. . . ). Параллельные порты выполняют ввод и вывод с большей скоростью чем последовательные, но требуют и большего числа проводов для обмена данными.

5. Дисководы для гибких магнитных дисков - дискет, используемые для чтения и записи на дискетах. Наиболее распространены дискеты размером 5. 25 дюйма (133мм) В настоящее время чаще всего используются дискеты емкостью 360 Кбайт и 1. 2 Мбайта. Для чтения и записи дискет емкостью 1. 2 Мбайта предназначены специальные дисководы, которые устанавливаются на компьютерах моделей IBM PC/AT. Эти дисководы могут также читать дикеты емкостью 360 Кбайт. Часто используются и накопители на дискетах размером 3. 5 дюйма (89мм) и емкостью 0. 7 и 1. 4 Мбайта.

Дискеты - прецезионные устройства и потому требуют очень аккуратного обращения. Во избежание порчи записанной на дискетах информации их следует хранить подальше от источников магнитных полей телевизоров, электромотор. д. Дискеты не следует гнуть и трогать руками открытые участки магнитного покрытия. Большинство дискет имеет защиту от случайной порчи содержащейся на них информации. Так дискеты размером 5. 25 дюйма имеют на боковй кромке прорезь разрешения записи позволяющую производить запись на дискете при установке ее в дисковод. Чтобы защитить такую дискету, достаточно закрыть вырез непрозрачной наклейкой. При этом повторная запись необходимо ее специальным образом отформатировать.

6. Накопитель на жестком диске - винчестер, предназначенный для постоянного хранения информации, используемой при работе с компьютером: программ операционной системы, часто используемых ПП, редакторов документов, трансляторов с языков программирования и. т. д. Наличие винчестера зачительно повышает удобство работы с компьютером. По сравнению с гибкими дисками время доступа к информации на жестком диске значительно меньше. На моделях IBM PC/AT жесткий диск чаще всего имеет емкость 40 Мбайт.

Клавиатура IBM PC - размеры 6\*20\*51 см. , устройство, предназначенное - - для ввода в компьютер информации. Наиболее широкое распространение получила клавиатура с 102 клавишами, (где некоторые клавиши продублированы в целях удобства работы), которые могут генерировать все 128 символов в кодах ASCII (Американский стандартный код для обмена информацией), а также специальные символы и графические знаки. Рсположение латинских букв на клавиатуре IBM PC, как правило такое же как на английской пишущей машинке, а букв кириллицы - как на русской пишущей машинке.

С правой стороны клавиатуры имеются цифровые клавиши, некоторые из них используютсям также для управления курсором - (клавиши со стрелками, клавиши Home, End, Page Up, Page Down). Для удобства пользователя часть этих клавиш продублирована.

В верхнем ряду расположены 12 программируемых функциональных клавиш. Функции этих клавиш программируются разработчиком математического обеспечения. Обычно их действие указывается в нижней части экрана.

На клавиатуре есть еще ряд специальных клавиш : Enter, Control, Altenate, Tab, Insert, Delete и другие. Некоторые из этих клавиш можно нажимать одновременно, чтобы выполнять специальные функции. Например нажимая клавиши CTRL, ALT и DEL можно перезагрузить систему (так называемая "теплая перезагрузка DOS"). Нажатие на любую клавишу в течеие полусекунды приведет к автоматическому повторению символа. В отличие от клавиатур других компьютеров клавиатура IBM PC содержит электронные схемы, расширяющие возможности клавиш и позволяющие переопределять их.

Дисплей и принтер - эти устройства делают компьютер законченной системой.

Дисплеи(мониторы) бывают цветными и монохромными. Они могут работать в одном из двух режимов: текстовом или графическом. В текстовом режиме экран монитора условно разбивается на отдельные участки - знакоместа, чаще всего на 25 строк по 80 символов.

В каждое знакоместо может быть выведен один из символов. Графический режим предназначе для вывода на экран рисунков, графиков и. т. д. В этом режиме можно выводить и текстовую информацию причем буквы и цифры могут быть произвольного размера. В графическом режимет экран монитора состоит из точек. Количество точек по горизонтали и вертикали называется разрешающей способностью монитора в данном режиме. Например разрешающая способность 640\*350 означает, что в данном режиме монитор выводит 640 точек по горизонтали и 350 по вертикали. Наиболее широкое распространение в компьютере IBM PC получили цветные мониторы EGA и VGA. В текстовом режиме они работают примерно одинаково, а в графическом VGA обеспечивает более высокую разрешающую способность, то есть выводит большее количество точек на экран, что повышает качество изображения и снижает утомление глаз.

Принтер преедназначен для вывода информации на бумагу. Все принтеры могут выводить текстовую информацию, а многие также рисунки и графики. С IBM PC совместим ряд принтеров. Фирма IBM рекомендует и продает графическое матричное печатающее устройство производимое фирмой EPSON. Принцип работы матричных притеров таков: печатающая головк принтера содержит вертикальный ряд тонких металлических стержней (иголок). Головка движется вдоль печатаемой строки, а иголки в нужный момент ударяют по бумаге через красящую ленту. Скорость печати матричных принтеров в зависимости от требуемого качества печати от 10 до 60 секуд на страницу.

Существуют и другие виды принтеров: струйные, литерные, лазерные и. т. д. но они как правило более дорогие и не всегда совместимы с имеющимися программами.

К компьютеру IBM PC могут подключаться и другие устройства: Мышь - манипулятор для ввода информации в компьютер. Свое название это устройство получило за свой внешний вид: небольшая икоробочка обычно серого цвета с двумя или тремя клавишами, легко умещающаяся в ладони. Вместе с проводом для подключения к компьютеру действительно сильно напоминает мышь с хвостом. Чтобы изменить положение курсора на экране монитора пользователь перемещает мышь по столу, нажимая ту или иную клавишу. Некоторые программы рассчитаны только на работу с мышью но большинство программ допускают ввод как с клавиатуры так и с мыши.

Сканер - устройство для считывания графической и текстовой информации в компьютер. Сканеры бывают настольные, позволяющие обрабатывать весть лист целиком или ручные их нужно построчно проводить над нужным рисунком или текстом.

Модем - устройство используемое при приеме или передаче информации по телефонной линии. Модем может соединить компьютер с другим омпьютером используя стандартную телефонную линию. Существует широкий выбор и других периферийных устройств встраиваемых в компьютер: графопостроители, игровые адаптеры, блоки расширения памяти, стриммеры и. т. д.

**ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА**

Операционная система - это программа, которая загружается при включении компьютера. Она производит диалог с пользователем, осуществляет управление компьютером, запускает другие программы. Операционная система обеспечивает пользователю удобный способ . общения (интерфейс) с устройствами компьютера.

Основная причина необходимости операционной системы состоит в том, что элементарные операции для работы с устройствами компьютера - это операции очень низкого уровня, поэтому действия, необходимые пользователю состоят из тысяч таких элементарных операций. Так даже для выполнения такого простого действия как копирование файла с одной дискеты на другую необходимо выполнить тысячи операций по запуску команд дисководов, проверке их выполнения, поиску и обработке информации в таблицах размещения файла на диске и. т. д. Операционная система скрывает от пользователя эти сложные и ненужные ему подробности и предоставляет ему удобный интерфейс для работы. Как правило IBM PC работает под управлением операционной системы MS DOS фирмы Microsoft Corp. MS DOS получила широкое распространение благодаря сравнительно небольшому занимаемому дисковому пространству и затрачиваемой оперативной памяти, удобному интерфейсу хорошей совместимости с различной периферией.

Операционная система MS DOS состоит из следующих частей:

1) Базовая система ввода-вывода находящаяся в ПЗУ ко Эта часть ОС является встроенной в компьютер. Она выполняет наиболее простые и универсальные услуги ОС связаные с осуществлением ввода-вывода и содержит тест компьютера, проверяющий работу его устройств и памяти при включении электропитания. Базовая система ввода-вывода содержит программу вызова загрузчика ОС.

2) Загрузчик операционной системы - это короткая программа, находящаяся в первом секторе дискеты с ОС или винчестера. ЕЕ функция заключается в считывании в память еще двух модулей ОС.

3) Дисковые файлы IO. SYS и MSDOS. SYS. Они загружаются в память загрузчиком ОС и остаются в памяти компьютера. Файл IO. SYS представляет собой дополнение к базовой системе ввода-вывода в ПЗУ. Файл MSDOS. SYS реализует основные высокоуровневые услуги MSDOS.

4) Командный процессор DOS - обрабатывает команды вводимые пользователем. Командный процессор находится в файле COMMAND. COM на диске с которого загружается ОС. Некоторые команды пользователя, называемые внутренними например DIR или COPY командный процессор выполняет сам. Для выполнения остальных (внешних) команд он ищет на дисках программу с соответствующим именем и если находит то загружает ее в память и передает ей управление. По окончании работы командный процессор удаляет программу из памяти и выдает приглашение DOS.

5) Внешние команды DOS - это программы поставляемые вместе с ОС в виде отдельных файлов. Они выполяют действия обслуживающего характера, например форматирование дискет, тестирование дисков и. т. д.

6) Драйверы устройств - это специальные программы, которые дополняют систему ввода-вывода DOS и обеспечивают обслуживание новых устройств. Драйверы загружаются в память компьютера при загрузке ОС и их имена указываются в специальном файле CONFIG. SYS. Это облегчает добавление новых устройств и позволяет делать это не затрагивая системных файлов DOS.

Начальная загрузка DOS выполняется автоматически в следующих случаях:

а) При включении электропитания.

б) При нажатии на клавишу "Reset"

в) При одновременном нажатии клавиш C В начале загрузки работают программы проверки оборудования находящиеся в ПЗУ. После окончания тестирования программа начальной загрузи пытается прочесть с дискеты установленной в дисководе А программу- загрузчик ОС. Если на дисководе А нет дискеты то загрузка ОС будет производиться с винчестера. Если на дисководе А находится дискета без ОС то будет выдано сообщение об ошибке. Следует сменить дискету на системную или убрать дискету и повторить загрузку. После того как с диска прочитана программа-загрузчик ОС, она считывает в память компьютера модули ОС - файлы IO. SYS и MSDOS. SYS и передает им управление.

Далее с того же диска читается файл конфигурации CONFIG. SYS и в соответствии с указаниями содержащимися в нем, загружаются драйверы устройств и устанавливаются параметры ОС.

После этого с системного диска читается файл COMMAND. COM и ему передается управление. COMMAND. COM ищет в корневом каталоге системного диска файл AUTOEXEC. BAT в котором указываются команды и программы, выполняемые при каждом запуске компьютера. Например программа, обеспечивающая работу с русскими буквами на клавиатуре, программа-оболочка NORTON COMMANDER. После выполнения файла AUTOEXEC. BAT процесс загрузки ОС заканчивается и DOS выдает приглашение показывающее, что она готова к приему команд : например C:\>

Сетевое планирование по методу критического пути.

(Critical Path Method) CPM

CPM является одним из самых популярных инструментов при планировании хозяйственных проектов. Сетевой график представляет собой графическое изображение проекта, в котором отдельные операции, то есть работы по выполнению проекта, изображаются стрелками. Начало и конец стрелки обозначают начало и окончание операции соответственно. Время, которое предполагается затратить на выполнение операции, называется ее плановой длительностью. Для ясности на сетевом графике даются краткое описание и длительность каждой операции(рис. 1)



Одно из важнейших понятий сетевого графика-путь. Путь-это любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Среди различ- ных путей сетевого графика наибольший интерес представляет полный путь. Полный путь-это любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец с завершающим событием сети. Наиболее продолжительный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути. Критический путь имеет особое значение, так как работы этого пути определяют общий цикл завершения всего комплекса работ, планируемых при помоши сетевого графика. И для сокращения продолжительности проекта необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути. Если единица времени(день, неделя) одна и та же для всех операций сетевого графика, то для указания длительности достаточно привести только число этих единиц. Изображение операций делается без учета масштаба. Различают три вида операций: а)Действительная операция-процесс, требующий затрат времени и pесурсов выполнение монтажных работ, подвоз материалов и. т. д. ) б)Операция-ожидание-процесс, требующий только затрат времени(затвердение бетона, сушка штукатурки и. т. д)

в)Фиктивная операция-логическая зависимость, которая отражает технологическую или ресурсную зависимость в выполнении некоторых операций. Ее обозначают штриховыми стрелками. Такая операция имеет нулевую длительность и не требует выполнение какой-либо работы. Для каждой операции в сетевом графике могут существовать операции, заканчиваемые до ее начала, выполняемые параллельно с ней или начинающиеся только после ее завершения. Сетевой график не должен иметь замкнутых циклов;все его операции направлены слева направо. Его следует вычерчивать несколько раз, добиваясь мининума пересечений и постепенно улучшая ясность. Сетевой график для большого проекта может содержать тысячи операций.

Поэтому необходим простой способ определения и обозначения операции. Каждая операция определяется двумя узлами(событиями)-начальным и конечным. Смысл названия узла 'событием' состоит в том, что он изображает как раз такой момент, когда все операции, входящие в этот узел, заканчиваются, и, поэтому могут быть начаты все операции, выходящие из этого узла. Для нумерации операций удобно использовать i-j правило, причем номер i всегда меньше номера j. Проблема обозначения возникает в случае, если две или более операции соединяют два или более узла.

Для ее решения используется фиктивная оерация. Иногда события нумеруются не последовательным образом(1, 2, 3. . . ) а получают номера 10, 20, 30, 40. . . . Это облегчает добавление в сетевой график новых операций. Такие операции получают промежуточные номера, например 11-12, 14-18 и. т. п. Составляя сетевой график, необходимо тщательно анализировать его логику, постоянно задаваясь следующими вопросами: а)Какие операции должны быть закончены прежде, чем данная операция может начаться? б)Какие операции могут начинаться одновременно с данной? в)Какие операции зависят от свершения данной операции?

На каждой стрелке следут предусмотреть горизонтальный участок, на котором указываются описание и длтельность операции. Описание следует помещать над стрелкой, а длительность-под ней. Стрелки следуют рисовать слева направо. Нумеровать узлы следует только после того, как построение диограммы закончено.

В целях ясности следует избегать пересечени, насколько это возможно, даже если ради этого придется изменить структуру графика.

**МОМЕНТЫ СОБЫТИЙ.**

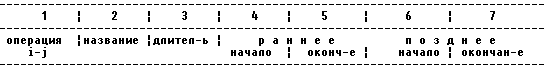
Событием считается момент времени, когда выполнены все предыдущие операции и могут быть начаты все непосредственно следуюшие операции. В методе СPM с каждым событием ассоциируются два момента времени:ранний момент события и поздний момент события.

a)Ранний момент события определяется как наиболее раннее время, когда могут быть начаты операции, исходящие из соответствующего узла. Вычислительный процесс, используемый при определении ранних моментов событий сетевого графика, называется прямым проходом. припрямом проходе вычисления начинаются с правого узла и продолжаются последовательно слева направо до тех пор, пока не будут определены ранние моменты для каждого события сетевого графика Для начального узла ранний момент события полагается равным нулю. ранний момент для последующего события определяется прибавлением длительности предыдущей операции к раннему моменту предшествующего события. Если в узел входят несколько операций, то его ранним моментом события считается наибольшее из всех ранних времен окончания операций.

б)Поздний момент события для данного узла определяется как наибольшее из всех поздних времен окончания операций, входящих в этот узел. Вычислительный процесс для определения позлних моментов событий называется обратным подходов. При обратном проходе вычисления начинаются с последнего узла и продолжаются последовательно для каждого события сетевого графика вплоть до начального. Поздний момент последнего события полагается равным раннему моменту этого события, найденному при прямом проходе. Очевидно, что нет никакого резона в затягивании проекта на время большее, чем фактически требуется для его выполнения. Поздний момент предшествующего события находится вычитанием длительности прешествующей операции из позднего момента последующего события. Если из узла выходит несколько операций, то перед определением позднего момента соответствующего(в этом узле)следует рассмотреть поздние начальнче моменты событий для каждой операции, исходящей из этого узла. Ясно, что в качестве позднего момента события нужно взять поздний момент начала той операции, которая должна начаться первой по времени.

**МОМЕНТЫ НАЧАЛА И ОКОНЧАНИЯ ОПЕРАЦИЙ.**

В методе CPM моменты начала и окончания операций рассчитываются с помощью моментов событий и обычно табулируются, а представляются на сетевом графике. Ранним началом любой операции называется ранний момент предшествующего ей события. Поздним окончанием любой операции называется поздний момент следующего за ней события. Поздним началом началом операции называется ее позднее окончание за вычетом длительности операции. Ранним окончанием операции называется ее раннее начало + длительность операции. Позднее начало операции всегда не меньше позднего момента события предшествующего узла. Раннее окончание операции всегла не больше ранего момента событий последующего узла. Если имеется сетевой график с рассчитанными ранними и поздними моментами событий, то для расчета и табулирования моментов начала и окончания операций можно использовать следующую процедуру из 6 шагов: 1. Упорядочит нию номера i, а затем для каждого i упорядочить их по возрастанию номера j). 2. Занести название каждой операции в столбец 2, а их длительности в столбец 3 3. Занести моменты раннего начала для каждой операции в столбце 4. Ими являются ранние моменты событий, соответствующих i узлам операций. 4. Определить моменты раннего окончания для каждой операции добавлением ее длительности к моменту раннего начала и поместить данные в столбце 5. 5. Занести моменты позднего окнчания для каждой операции в столбц 7. Ими являются поздние моменты событий, соответствуюших j узлам операций. 6. Определить момент позднего начала для каждой операции вычитанием ее длительности из момента позднего окончания и поместить данные в столбце 6.



**РЕЗЕРВ:НАЧАЛЬНЫЙ И КОНЕЧНЫЙ.**

Каждая операция проекта должна быть завершена в пределах от момента раннего начала до момента позднего окончания. Если все операции заканчиваются в этих пределах, то проект будет окончен вовремя. Когда промежуток времени между этими двумя пределами превышает длительность операций, тогда имеется свободное время, либо до начала , либо после окончания операции. Это свободное время называют резервом. Промежуток времени между поздним окончанем операции и ее ранним началом называется начальным резервом, а промежуток времени между поздним окончанием операции и ее ранним окончанием называется конечным резервом, то есть:

НАЧАЛЬНЫЙ РЕЗЕРВ= ПОЗДНЕЕ НАЧАЛО-РАННЕЕ НАЧАЛО

КОНЕЧНЫЙ РЕЗЕРВ= ПОЗДНЕЕ ОКОНЧАНИЕ-РАННЕЕ ОКОНЧАНИЕ

Начальный резерв времени для операции равен конечному.

РЕЗЕРВ:ПОЛНЫЙ.

НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫМ ИЗ ВСЕХ РЕЗЕРВОВ ЯВЛЯЕТСЯ ПОЛНЫЙ РЕЗЕРВ.

Он указывает количество времени, на которое может быть увеличена продолжительность операции без угрозы срыва планового срока завершения поекта. Поэтому следует отличать задержку, внушающую опасение, от задержки, не представляющей угрозы для срока завершения проекта. Полный резерв определяется как момент позднего окончания операции-момент раннего начала-длительность операции.

**СВОБОДНЫЙ И НЕЗАВИСИМЫЙ РЕЗЕРВ.**

Свободный резерв FF определяется, как ранний момент Еj последующего события минус ранний момент Eiпредшествующего события минус длительность операции D определяемой этими событиями:

FF=Ej-Ei-D

Свободный резерв используется в основном для выявления операций, выполнение которых может задерживаться без ущерба для полного резерва последующих операций.

Независимый резерв IF определяется обычно как ранний момент последующего события минус длительность операции D, определяемой этими событиями:

IF=Ej-Li-D

Heзависимый резерв позволяет выявить операции, затягивание которых не влияет на полный резерв ни предыдущих, ни последующих операций. Полный резерв(свободный и независимый) подсчитываются и табулируются с использованием моментовначала и окончания операций. Если полный резерв равен нулю, то нулевыми являются также свободный и независимый резервы. Поэтому, когда подсчет приводит к нулевому полному резерву и одновременно ненулевому иному резерву, то это свидетельствует об ошибке в вычислениях.

**АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ.**

Последовательность операций, требующая наибольшего времени для ее завершения определяет наименьшее время за которое может быть выполнен проект. то время называется длительностью выполнения проекта. Указанная последовательность операций, определяющая длительность проекта является очень важной и называеся критическим путем. Критический путь всегда начинается с самого первого события сетевого графика и проходит через весь график, заканчиваясь последним событием. Каждая операция критического пути являетсякритической операцией. Для анализа сетевого графика важно определить все критические операции. Критические операция должна одновременно удовлетворять следующим трем критериям: 1)Ранний и поздний моменты событий для узла i должны быть равными:

Ei=Lj 2)Ранний и поздний моменты событий j равны тоже:

Ei=Lj 3)Длительность операции должна равняться разнице между поздним моментом события j и ранним моментом события i:

Lj-Ei-D=0

Tретье условие означает, что критическая операция не должна иметь резерва. Поэтому полный резерв оказывается полезным инструментом для выявления критической операции. Часто на сетевом графике существует несколько критических путей. Иногда короткие цепи, содержащие критические операции могут отходить от основного критического пути и снова возвращаться к нему. Критические операции должны быть завершены вовремя, иначе сроки выполнения проекта будут сорваны. Некритическими операциями называются лишь те, у которых достаточен размер резерва. Операции с большим резервом являются субкритическими, вообще, чем больше резерв операции, тем менее она критична по отношению с другими. Критические операции должны контролироваться руководителем проекта в первую очередь, ибо задержка любой из них увеличивает длительность проекта. Поскольку критические операции составляют в проекте, как правило, 10-15%, сосредоточение внимания руководства на них вполне реально прежде всего за счет менее важных операций. Важным достоинством метода является возожность концентрировать внимание руководства на наиболее ответственных операциях, что совершенно необходимо в больших, сложных проектах.

**Сетевое планирование в условиях неопределенностии**

При определении временных параметров сетевого графика до сих пор

предполагалось что время выполнения каждой работы точно известно. Такое предположение в действительности выполняется редко: ведь сетевое планирование обычно применяется для разработки сложных \*\*\*\*\* зачастую не имевших в прошлом никаких аналогов. Чаще всего продолжительность работы

по сетевому графику заранее не известна и может принимать лишь одно из ряда своих возможных значений. Другими словоми, продолжительность работы является случайной вееличиной, характеризующейся своим законом распределения, а значит, своими числовыми характеристиками- ожидаемой длительностью и мерой разброса.

Сетевые графики могут иметь детерминированную или стохастическую структуру. Причем следует четко различать отличия между детерменированными и стохастическими структурами. а) Если все операции сетевого графика ии их взаимосвязь четко определены,

то такая структура графика называется детерменнированой. б) Стохастическая структура означает, что все операции включаются в сеть с некоторой вероятностью. То еесть в некоторых в некоторых проектах на отдельных этапах тот или иной комплекс работ зависит от неизвестного заранее результата и его фактическое выполнение может быть предсказано лишь с некоторой вероятностью. Так например, в научно-исследовательских и опытно-крнструкторских разработках заранее не известны не только продолжительности отдельных операций, но и их перечень, а также структура сети.

Расчет параметров и анализ графиков стохастической структуры связан со значительными трудностями, поэтому на практике обычно применяются графики с детерминированной структурой и со случайными временными оценками операций. Такие сети получили название стохастических или вероятностных сетей.

При исследовании вероятностных сетей могут встретиться два случая: 1) Операции не являются новыми, и мы приближенно знаем для каждой изних функцию распределения продолжительности выполнения. 2) Операции являются новыми, малоизученными, и для них функции распределения продолжительностей неизвестны.

В первом случае ожидаемая длительность и мера разброса определяются по известной функции распределения.

Во втором случае применяется метод усреднения. исходными данными для метода усреднения являются вероятностные оценки продолжительности каждой операции:а- минимальная продолжительность (оптимистическая оценка ) операции, б- максимальная продолжиительность (пссимистическая оценка) операциии, m-наиболее вероятная продолжительность операции. Эти оценки времени задаются ответственным исполнителем или группой экспертов.

Статистический анализ, проведенный эмпирико-экспериментадьным путем разработчиками математического аппарата сетевого планирования в условиях неопределенности установить что: a+4m+b Ожидаемая длительность ij операции- Fij= 6

b-a Мера разброса \*\*\*= 6

После определения ожидаемых длительностей продолжительностей операций по данной формуле, проводится расчет временных параметров сети, как и в детерминированном случае. Ожидаемую длительность критического пути рассматривают как сумму случайных величин, т. e. работ решающих на \*\*\*\*\*

(Fкр)= Е F(ij)кр.

(i, j)кр Меру разброса продолжительности критического пути считают равной сумме пути:

d(Ткр)= Е dij(Fij)

(i, j)кр Расчет временных параметров сети по ожидаемым длительностям продолжительностей операций не позволяет строго определить срок завершения комплекса операций. Фактическое отклонение случайных величин Tij от их средних значений Tij может быть как в большыыю так и в меньшую сторону. Поэтому фактическая продолжительность выполнения комплекса операций может быть больше или меньше Ткр(ожидаемой длительности критического пути) В связи с этим большой интерес представляет оценка вероятности завер шения комплекса операций к определенному сроку, которая зависит от меры разброса продолжительности критического пути. При одних значениях величин Tij можт быть один критический путь, при других-другой.

Если операция выполняется при достаточно благоприятных условиях то она будет завершена в сравнительно короткие сроки. Так определяется оптимистическая оценка деятельности. Вероятность ее фактической реализации составляет около 0. 01. Если же операция выполняется при крайне неблагоприятных условиях, то выполнение ее затянется. Из этих соображений определяется пессимистическая оценка длительности операций, вероятность ее реализации составляет также приблизительно 0. 01 В подавляющем большинстве случаев длительность операции будет находиться в интервале, ограниченном предыдущими двумя оценками. Оценка же длительности наиболее близкая к действительной называется наиболе вероятной.

Рассмотрим следующий пример операций:

Оптимистическая оценка длительности: a=4

Наиболее вероятная длительность: m=6

Пессимистическая оценка длительности: b=7 Три оценки отражают степень правдоподобия времени выполнения задачи; одна оценка достаточна лишь для случая полной уверенности. В свою очередь, правдо подобие может быть выражено в статистических терминах, то есть в виде кривой плотности распределения, описывающей частоту реализации различных длительностей операции, выполняемой большое число аз.

Вероятность завершения операции в рассматриваемом примере за 4 ( или за 7)рабочих дней составляет, как указывалось выше, 0. 01 . Наиболее вероятно, что операция закончится за 6 дней. Предполагается, что если операция выполняется большое число раз, причем ведется регистрация всех данных, то график частот длительности даст асимметричную кривую, называемую функцией. Приведенные числовые оценки длительности выполнения операций и вероятность реализации представлены b-функцией на схеме 1. Вертикальные линии над точками 4. 0 6. 0 7. 0 обозначают частоту реализации операции за то число рабочих дней, которое измеряется по горизонтальной линии.

Вследствие того, что вертикальная линия в точке 6. 0 не делит площадь под кривой на две равные части, вероятность завершения этой операции за 6 (или меньше) рабочих дней не равна 0. 5. Для определения ожидаемой длительности операции этого типа используются средневзвешанные значения. Ожидаемая длительность, или математическое ожидание, как мы помним, вычисляется по формуле;

а+4m+b=6

То есть в нашем примере равна

4+4\*6+7 = 5. 8

Лицо, оценившее наиболее вероятную длительность операции в 6 дней, было настроено пессимистически, поскольку 5. 8 меньше 6.

На схеме 2 делит площадь под -функцией на 2 равные части.

Таким образом, вероятность окончания операции не более чем за 5. 8 рабочего дня равна 0. 5.

Другая интерпретация этого обстоятельства такова; представляет собой длительность, для которой существуют равные шансы на окончание операции либо раньше, либо позже.

Рассмотрим другой случай, где оценки таковы; а=4 m=5 b=18

(4+4\*5+18)/6= 7. 0

Это показано на рисунке 3. Как и на предыдущем рисунке, здесь делит площадь под b-функцией на две равные части. Т. о. , вероятность окончания операции за ожидаемое время 7. 0 рабочих дней равна 0. 5. В этом случае прогноз был оптимистическим, поскольку больше оценки наиболее вероятной длительности, равной 5.

**МЕРА РАЗБРОСА**

Рассмотрим две операции А1 и А2 со следующими длительностями;

А1 А2

а=4 а=3

m=6 m=5

b=8 b=13

=( 4+24+8)/6=6=(3+20+13 )/6=6

Для каждой операции =6, хотя оптимистическая, наиболее вероятная, и пессимистическая оценки сильно различаются. Мера разброса указанных оценок называется дисперсией D.

D( )=((b-a)/6)^2

D(А1)=((8-4)/6)^2 =0. 444

D(А2)=((13-3)/6) =2. 777

По существу мера разброса характеризует неопределенность, связанную с процессом оценивания продолжительности операции. Если мера разброса велика, то есть оптим истическая и пессимистическая оценки сильно отличаются друг от друга, то это означает большую неопределенность относительно времени завершения оаерации. Соответственно малая мера разброса указывает на сравнительную определенность времени завершения операции.

\*\*\*\*, длительность выполнения проекта и резервы могут быть рассчитаны с помощью прямого и обратного прохода.

Поскольку вероятность выполнения каждой операции за ожидаемое время t(ij) =0. 5. , то вероятность окончания всего проекта за время Ts = сумме t(ij), также равна 0. 5. Но длительность выполнения проекта уже не описывается B-функцией, как это имеет место для отдельных операций проекта. Предполагая, что проект состоит из большого числа операций, получим результирующее распределение его длительности, близкое к нормальному;поэтому можно принять, что ожидаемая длительность выполнения проекта имеет нормальное распределение.

Может оказатья, что ожидаемая длительность выполнения проекта Ts неприемлима для руководства, вместо нее выбирается другое время Tc, меньше, чем Ts. Tc<Ts.

Для определения вероятности реализации проекта за Tc нужно рассмотреть стандартное отклонение кривой нормального распределения, вычисляемое по формуле:

g(t)= корень квадратный из суммы мер разброса операций.

Рассмотрим пример состоящий из четырех операций:

A B C D 1-2-3-4-5

a = 4 a = 3 a = 2 a = 4

m = 6 m = 8 m = 4 m = 5

b = 8 b = 9 b = 7 b = 6

\*\*\*\*\*\*=6+7. 33 + 4. 17 + 5 = 22. 5

Величина стандартных отклонений длительности выполнения проекта равна

g(t)=\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*=1. 5

на рисунке изображена плотность распределения вероятностей длительности выполнения проекта для нашего примера.

Здесь стандартное отклонение иллюстрирует степень неопределенности выполнения проекта за время Tc. В пределах одного стандартного отклонения с обеих сторон от Ts длительность выполнения проекта может измениться от 21 до 24 единиц времени (22. 5+-1. 5) вероятность этого равна 0. 68. (площадь под кривой в границах +-g)

Чтобы найти вероятность завершения проекта к определенному моменту времени необходимо вычислить величину Z по формуле планируемая длительность - ожидаемая длительность

Z = стандартное отклонение а затем использовать эту величину для определения вероятности по таблице стандартного нормального распределения, где для каждой величины Z соответствует определенная величина вероятности. В нашем примере определим вероятность выполнения проекта не позднее, чем за 21. 5 дней.

21. 5 - 22. 5

Z =- = - 0. 67.

1. 5 в таблице для данного Z вероятность выполнения составит 0. 25.

И субкритический, длительностью немного меньше.

Но если сумма мер разброса для этого субкритического пути больше, чем для критического, то на практике такой субкритический путь с большой вероятностью может стать критическим.

Так, имея критический путь ожидаемой длительностью = 80 ед. времени и стандартном отклонении =2 , вероятность окончания проектаи 86 ед. времени равно 0. 9987.

Если субкритический путь имеет длительность = 78 , то стандартное от клонение =5, то с той же вероятностью 0. 9987 работа на этом пути будет закончена между 63 и 93. Отсюда следует, что превращение субкритического пути в критический весьма вероятно.